DỰ ÁN THE GIFTED BATTLEFIELD
BAN CHUYÊN MÔN TOÁN HỌC

KÌ THI THỬ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
ĐỢT 1 – NĂM HỌC 2022 – 2023

HƯỚNG DẪN CHẤM
(gồm 03 trang)

Môn thi: TOÁN (chuyên)
Ngày thi: 05/03/2023 – 15/03/2023
Thời gian làm bài: 150 phút *(Không kể thời gian phát đề)*

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

1. Giám khảo chấm đúng theo Hướng dẫn chấm của Dự án The Gifted Battlefield.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	Ý	Hướng dẫn chấm	Điểm
Bài 1 (1,5 điểm)		Chứng minh rằng: $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)$ là số chính phương.	**1,5**
		Do a,b là hai nghiệm thực của phương trình $x^2+px+1=0$ và c,d là hai nghiệm thực của phương trình $y^2+qy+1=0$ nên theo định lí Vieta, ta có: $\begin{cases} a+b=-p \\ ab=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} c+d=-q \\ cd=1 \end{cases}$.	0,5
		Khi đó, ta có $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)$ $=[a^2-a(c+d)+cd][b^2-b(c+d)+cd]$ $=(a^2+aq+1)(b^2+bq+1)$ $=a^2b^2+a^2bq+a^2+ab^2q+abq^2+aq+b^2+bq+1$ $=1+q^2+abq(a+b)+q(a+b)+1+(a+b)^2-2ab$ $=q^2-2pq+p^2$ $=(p-q)^2$ Vậy $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)=(p-q)^2$ là số chính phương.	1,0
Bài 2 (2,0 điểm)	a	Chứng minh rằng $7(x+y)(1+3x-x^2-y)=2(3^x+1)$.	**1,0**
	a	Ta có $(1) \Leftrightarrow 21x^2+7(1-x)x(1+x)+14xy+7y-7x^2y-7y^2=2(3^x+1)$ $\Leftrightarrow 7x+21x^2-7x^3-7xy+7y+21xy-7x^2y-7y^2=2(3^x+1)$ $\Leftrightarrow 7x(1+3x-x^2-y)+7y(1+3x-x^2-y)=2(3^x+1)$ $\Leftrightarrow 7(x+y)(1+3x-x^2-y)=2(3^x+1)$.	1,0
	b	Tìm tất cả các bộ số $(x;y)$ nguyên thỏa phương trình (1).	**1,0**
	b	Ta có đẳng thức $7(x+y)(1+3x-x^2-y)=2(3^x+1)$. Do $2(3^x+1)\equiv 0 \pmod 7$ nên $3^x \equiv -1 \pmod 7$. Đặt $x=6k+q$ với k,q là số nguyên và $0\le q\le 6$. Ta có $-1\equiv 3^x = 3^q\cdot 728^k \equiv 3^q \pmod 7 \Rightarrow q=3$. Vậy $x\equiv 3 \pmod 6$.	0,25
	b	Do có vế trái của (1) là số nguyên nên $2(3^x+1)$ là số nguyên. Với $x=0$ thì phương trình vô nghiệm nên x nguyên dương. Với $x=1$, ta có $2(3^x+1)=2\cdot 3^x+2\equiv 2 \pmod 6$. Từ đồng dư thức trên ta suy ra được $7(x+y)(1+3x-x^2-y)\equiv(3+y)(1-y)=3-2y-y^2\equiv 2 \pmod 6$. Ta thu được $y(y+2)\equiv 1 \pmod 6$ (2).	0,25

Ta xét bảng đồng dư với 6 của các số sau:

y	0	1	2	3	4	5
$y+2$	2	3	-2	-1	0	1
$y(y+2)$	0	3	-4	-3	0	5

Ta suy ra (2) vô lí. Vậy phương trình (1) vô nghiệm nguyên $(x;y)$.

0,5

Bài 3

(1,5 điểm)

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=6 \ (1) \\ \dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}=3 \ (2) \end{cases}$$

1,5

ĐKXĐ: $\begin{cases} xy\ge 0, yz\ge 0, zx\ge 0 \ (\text{i}) \\ (y+z)(z+x)(x+y)\ne 0 \ (\text{ii}) \end{cases}$

0,25

Nhận xét rằng nếu $x<0$ thì từ (i) ta suy ra $y<0$ và $z<0$. Tuy nhiên, khi đó $\text{VT}_{(2)}$ âm, vô lí. Vậy $x\ge 0$, từ (i) suy ra $y\ge 0 \Rightarrow z\ge 0$.

0,25

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm, ta có:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\ge 2\sqrt{\frac{x^2(y+z)}{4(y+z)}}=x.$$

Chứng minh tương tự, ta thu được kết quả

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{x+y+z}{2}\Leftrightarrow 6\ge x+y+z \ (3)$$

0,25

Lại có:

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2+(\sqrt{z}-\sqrt{x})^2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x+y+z\ge\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=6 \ (4)$$

Từ (3) và (4) ta suy ra $x+y+z=6$ (5). Chú ý rằng dấu đẳng thức của bất đẳng thức (4) chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z\ge 0$ (6).

Từ (5) và (6) ta suy ra được $x=y=z=2$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy hệ có nghiệm $(x;y;z)=(2;2;2)$.

0,75

Bài 4

(2,0 điểm)

Chứng minh rằng n có tính chất "4 *mùa*" khi và chỉ khi n là số chẵn.

2,0

Với mọi tập con có 4 phần tử như đề bài đã nêu, ta có

$$a=\frac{b+c+d}{3}\Leftrightarrow a+b+c+d=4a.$$

Ta có tổng của tất cả các phần tử trong tập A_n là:

$$\sum_{i=1}^{4n} i=\frac{4n(4n+1)}{2}=2n(4n+1)$$

Do tổng 4 phần tử của mỗi tập con đều chia hết cho 4 nên $2n(4n+1)$ chia hết cho 4, đồng nghĩa với việc n là số chẵn.

1,0

Với p nguyên dương, xét một bộ số gồm 8 số nguyên dương liên tiếp từ $p+1$ đến $p+8$. Ta chia bộ 8 số đó thành 2 tập hợp như sau:

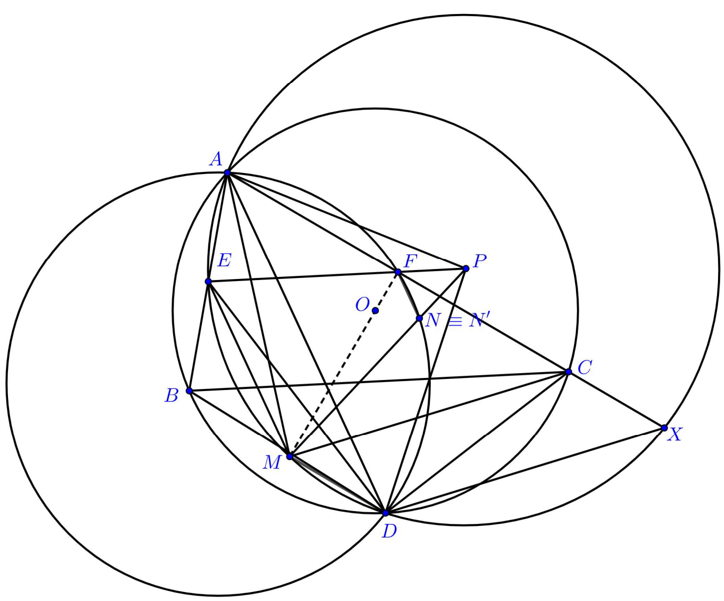
$$\{p+1;p+5;p+6;p+8\}$$
$$\{p+2;p+3;p+4;p+7\}$$

Khi đó, mỗi tập hợp trong hai tập hợp trên đều thỏa mãn yêu cầu bài toán. Từ đó, ta thực hiện chia $8k$ phần tử của tập A_n thành k bộ số, mỗi bộ chia thành hai tập như trên.

Vậy n có tính chất "4 *mùa*" khi và chỉ khi n là số chẵn.

1,0

		Chứng minh rằng $CX = AE$.	**0,5**
	a	Xét hai tam giác BDE và CDX có: $\begin{cases} \widehat{DCX} = \widehat{DBE} \text{ (tứ giác } ABCD \text{ nội tiếp)} \\ \widehat{CXD} = \widehat{BED} \text{ (tứ giác } AEDX \text{ nội tiếp)} \\ BD = CD \left(AD \text{ là phân giác của } \widehat{BAC}\right) \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta BDE = \Delta CDX \text{ (g} - \text{c} - \text{g)} \Rightarrow CX = BE = AE.$	0,5
		Chứng minh rằng M, O, F thẳng hàng.	**1,0**
		Do $EM \parallel AD$ nên tứ giác $AEMD$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{EAD} \equiv \widehat{BAD} = \widehat{DAC} \Rightarrow DM \parallel AX$ (1).	0.5
	b	Do tứ giác $AEMD$ là hình thang cân nên ta cũng có $CX = AE = MD$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra tứ giác $CMDX$ là hình bình hành $\Rightarrow CM = DX$ (3).	0.25
Bài 5 (3,0 điểm)		Từ (1) ta cũng suy ra được tứ giác $AMDX$ là hình thang cân $\Rightarrow DX = AM$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $CM = AM \Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực của đoạn AC. Lại có $OA = OC$ và $AF = FC$ nên O và A cũng thuộc đường trung trực của đoạn AC. Vậy M, O, F thẳng hàng.	0.25
		Chứng minh rằng $PA = PD$.	**1,5**
		Gọi N' là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AFD và đường thẳng qua F song song với AD. Chứng minh tương tự câu b), ta thu được N', O, E thẳng hàng $\Rightarrow N'$ trùng với N, hay $FN \parallel AD \Rightarrow$ tứ giác $AFND$ là hình thang cân.	0,5
	c	Chú ý rằng tứ giác $AEMD$ cũng là hình thang cân nên ME, AD và NF đều có chung đường trung trực.	0,5
		Vậy $MEFN$ là hình thang cân $\Rightarrow P = EF \cap MN$ nằm trên đường trung trực chung của hai đoạn thẳng ME và $FN \Rightarrow P$ cũng nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng $AD \Leftrightarrow PA = PD$.	0,5
		Tổng điểm	**10,0**



– HẾT –