

Bài 1: (2 điểm) Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn biểu thức B .

b) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Lời giải:

a) Ta có: $B = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$

b) Với $x > 0$, ta có:

$$\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 > 3\sqrt{x} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 4 \text{ (Do } x > 0\text{)}.$$

Bài 2: (2 điểm)

a) Giải phương trình: $(\sqrt{x-1} - x + 3)(\sqrt{|x|+1} - x + 1) = 0$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + xy = 8 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} = 4 \end{cases}$$

Lời giải:

a) ĐKXD: $x \geq 1$

Ta có: $(\sqrt{x-1} - x + 3)(\sqrt{|x|+1} - x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} - x + 3 = 0 \text{ hoặc } \sqrt{|x|+1} - x + 1 = 0$$

TH1: $\sqrt{x-1} - x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x - 3 \text{ (} x \geq 3\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = 2 \text{ (loại do } x \geq 3)$$

$$\text{TH2: } \sqrt{|x| + 1} - x + 1 = 0$$

Do $x > 0$ nên $|x| = x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + 1} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 0 \text{ (loại do } x \geq 1)$$

Vậy $x = 3$ hoặc $x = 5$.

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + xy = 8 \\ \sqrt{x + 2} + \sqrt{y + 2} = 4 \end{cases}$$

Đặt $a = \sqrt{x + 2}, b = \sqrt{y + 2}$ ($a, b \geq 0$)

$$\Rightarrow x = a^2 - 2 \text{ và } y = b^2 - 2.$$

$$\text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2 + b^2 - 2 + (a^2 - 2)(b^2 - 2) = 8 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2b^2 - a^2 - b^2 = 8 & (1) \\ a + b = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow b = 4 - a \text{ (} a \leq 4)$$

Thay vào (1)

$$\Leftrightarrow a^2(4 - a)^2 - a^2 - (4 - a)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow a^2(a^2 - 8a + 16) - a^2 - (a^2 - 8a + 16) = 8$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 8a^3 + 16a^2 - a^2 - a^2 + 8a - 16 = 8$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 8a^3 + 14a^2 + 8a - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^3 - 6a^3 + 12a^2 + 2a^2 - 4a + 12a - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3(a - 2) - 6a^2(a - 2) + 2a(a - 2) + 12(a - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)(a^3 - 6a^2 + 2a + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)(a^3 - 2a^2 - 4a^2 + 8a - 6a + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)^2(a^2 - 4a - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \text{ (Do } 0 \leq a \leq 4)$$

$$\text{Với } a = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$\Leftrightarrow x = y = 2$$

Bài 3: (2 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 4 = 0$ (1) (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + 2(m + 1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

Lời giải:

a) Xét $m = 2$:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2(2 + 1)x + 2^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy $x = 2$ hoặc $x = 4$.

$$\text{Từ (1) có: } \Delta = [-2(m + 1)]^2 - 4.(m^2 + 4)$$

$$= 4m^2 + 4 + 8m - 4m^2 - 16$$

$$= 8m - 12 \geq 0 \text{ (do (1) có 2 nghiệm)}$$

$$\Rightarrow m \geq \frac{3}{2}$$

Áp dụng định lý Viet cho (1), ta có: $x_1 x_2 = m^2 + 4$ và $x_1 + x_2 = 2m + 2$

$$x_1^2 + 2(m + 1)x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 \leq 3x_1 x_2 + 4$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (2m + 2)^2 - 4(m^2 + 4) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 8m - 12 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2$$

Vậy $\frac{3}{2} \leq m \leq 2$ thì thỏa đề.

Bài 4: (1 điểm) Ngày 14/2/2022, Sở giáo dục và đào tạo TP.HCM ra quyết định cho phép tất cả các học sinh trên địa bàn thành phố được phép quay trở lại trường học. Bin là một học sinh lớp Chồi nhưng vì nghỉ dịch khá lâu nên chưa có hứng thú đến trường. Để tạo ra động lực cho em mình, Nam nghĩ ra một cách là mỗi ngày sẽ tặng Bin một số viên kẹo socola, nhưng theo một quy luật: ở hai ngày đầu tiên, mỗi ngày Nam sẽ tặng em mình một số viên kẹo, kể từ ngày thứ ba trở đi, mỗi ngày Nam sẽ tặng em mình số kẹo bằng số kẹo của hai hôm trước đó trừ số kẹo của một hôm trước đó. Theo quy luật đó, bước qua ngày thứ tám, Nam sẽ dừng tặng kẹo cho Bin. Biết giá trị mỗi viên kẹo là 3000 đồng và trong ví của Nam chỉ có hai tờ 50000 đồng. Hỏi sau một tuần mua kẹo cho em mình, trong ví của Nam còn lại bao nhiêu đồng?

Lời giải:

Gọi x là số kẹo Nam tặng ở ngày thứ 7 ($x \in N^*$).

Vì ngày 8 Nam không tặng kẹo, nên hiệu số kẹo của ngày thứ 6 và ngày thứ 7 bằng 0.

Hay số kẹo ngày thứ 6 cũng là x .

Từ đó ta có:

- Số kẹo ở ngày thứ 5 là $2x$
- Số kẹo ở ngày thứ 4 là $3x$
- Số kẹo ở ngày thứ 3 là $5x$

- Số kẹo ở ngày thứ 2 là $8x$
- Số kẹo ở ngày thứ 1 là $13x$

Vậy tổng số kẹo trong 1 tuần là $33x$.

$$\Rightarrow 33x \cdot 3000 \leq 100000$$

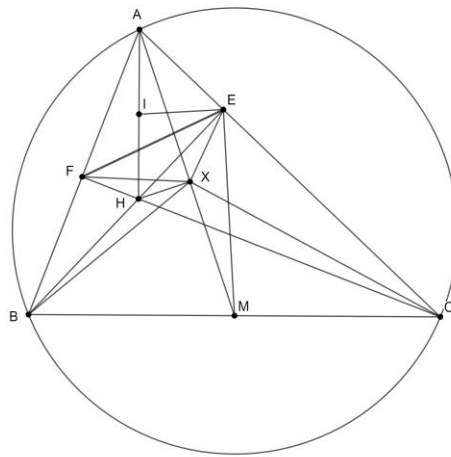
Hay $x = 1$.

Vậy Nam mua kẹo còn dư 1000 đồng.

Bài 5: (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) có đường cao BE, CF cắt nhau tại H ($AB < AC$). Gọi M, I lần lượt là trung điểm BC, AH . Gọi X là hình chiếu của H lên AM .

- Chứng minh $BCEF$ nội tiếp, $EFHX$ nội tiếp.
- Chứng minh $EM \perp EI, ME^2 = MX \cdot MA$.
- Chứng minh $\Delta MBX \sim \Delta MAB, BCXH$ nội tiếp.

Lời giải:



a) Vì $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

Vì $\angle AFH = \angle AEH = 90^\circ \Rightarrow$ 4 điểm A, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính (AH) .

Mà $\angle AXH = 90^\circ \Rightarrow X$ cũng thuộc đường tròn đường kính (AH) hay tứ giác $EFHX$ nội tiếp.

b) Ta có: $IE = IH \Rightarrow \triangle IEH$ cân hay $\angle IEH = IHE$

Mặt khác, $ME = MB \Rightarrow \triangle MEB$ cân hay $\angle MEB = \angle MBE$

$$\Rightarrow \angle IEM = \angle IEH + \angle HEM = \angle EHA + \angle MBE = \angle EHA + \angle HAE = 90^\circ$$

$$\Rightarrow EM \perp EI.$$

Ta có: $\angle MEX = \angle MEB - \angle HEX = \angle MBE - \angle HFX = \angle HFE - \angle HFX = \angle XFE = \angle XAE$

$$\Rightarrow \angle MEX = \angle XAE \Rightarrow \triangle MEX \sim \triangle MAE$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{MX}{ME} \Rightarrow ME^2 = MX \cdot MA$$

c) Ta có: $ME^2 = MB^2 = MX \cdot MA \Rightarrow \frac{MB}{MX} = \frac{MA}{MB}$

$$\Rightarrow \triangle MBX \sim \triangle MAB$$

$$\Rightarrow \angle MXB = \angle ABC$$

Tương tự ta cũng có: $\angle MXC = \angle ACB$

$$\Rightarrow \angle BXC = \angle MXB + \angle MXC = \angle ABC + \angle ACB = 180 - \angle BAC = \angle FHE$$

$$\Rightarrow \angle BXC = \angle FHE = \angle BHC$$

\Rightarrow tứ giác $BCXH$ nội tiếp.

---Hết---