DỰ ÁN THE GIFTED BATTLEFIELD
BAN CHUYÊN MÔN TOÁN HỌC

LỜI GIẢI THI THỬ TS CHUYÊN ĐỢT 3
MÔN: TOÁN HỌC (CHUYÊN)

Bài 1: (1,5 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$.

Lời giải:

Phương trình đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = b'^2 - ac = (m-1)^2 - (m^2-3) = -2m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Do x_1 là nghiệm của phương trình đã cho nên

$\Leftrightarrow x_1^2 - 2(m-1)x_1 + m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2(m-1)x_1 + 3 - m^2$

Như vậy,

$x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1 \Leftrightarrow 2(m-1)x_1 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = m^2 - 2$

$\Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = m^2 - 2$.

Theo hệ thức Viéte,

$x1 + x2 = -\frac{b}{a} = 2(m-1) \Rightarrow 2(x_1 + x_2) = 4(m-1) = m^2 - 2$

$\Rightarrow m^2 - 4m + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 2 - \sqrt{2} \end{matrix}\right.$,

Mà $m \leq 2$ nên chỉ có $m = 2 - \sqrt{2}$ TMĐK. Thử lại đúng.

Bài 2: (1,5 điểm) Tìm m, n là các số nguyên dương sao cho $2^m.5^n + 25$ là số chính phương.

Lời giải: Giả sử $2^m.5^n + 25 = l^2$ với $l \in N \Rightarrow (l+5)(l-5) = 2^m.5^n$.

Vì $(l+5) - (l-5) = 10 = 2.5$ nên cả hai số $l+5$ và $l-5$ cùng chia hết cho 2 và 5 $\Rightarrow (l+5, l-5) = 10$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} l + 5 = 10 \\ l - 5 = 10.2^{m-2}.5^{n-2} \end{cases}$ (loại).

Trường hợp 2: $\begin{cases} l + 5 = 10.2^{m-2} \\ l - 5 = 10.5^{n-2} \end{cases} \Rightarrow 2^{m-2} = 5^{n-2} + 1$.

Vì $5^{n-2} + 1 \equiv 2 \pmod 4$ nên $m = 3, n = 2$.

Trường hợp 3: $\begin{cases} l + 5 = 10.5^{n-2} \\ l - 5 = 10.2^{m-2} \end{cases} \Rightarrow 5^{n-2} - 1 = 2^{m-2}$.

Nếu $m \geq 5$ thì $5^{n-2} - 1 \vdots 8 \Rightarrow n - 2$ chẵn. Đặt $n - 2 = 2k$, $k \in N$.

Khi đó $(5^k - 1)(5^k + 1) = 2^{m-2}$.

Vì $(5^k - 1, 5^k + 1) = 2$ nên $5^k - 1 = 2$ (loại).

Với $m \le 4$, thử trực tiếp ta thấy $m = 4$, $n = 3$ thoả mãn.

Trường hợp 4: $\begin{cases} l + 5 = 10.2^{m-2}.5^{n-2} \\ l - 5 = 10 \end{cases} \Rightarrow l = 15$ và $2^{m-2}.5^{n-2} = 2$

$\Rightarrow m = 3, n = 2.$

Vậy $(m; n) \in \{(3; 2), (4; 3)\}$.

Bài 3: (2 điểm) Với mỗi giá trị thực p, ta kí hiệu R_p là dãy số (a_n) thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) $a_1 + p \ge 0$, $a_2 = -p$.

(ii) $a_{4n-1} < a_{4n}$ với mọi $n \in N^*$.

(iii) $a_{m+n} \in \{a_m + a_n + p; a_m + a_n + p + 1\}$, với mọi $m, n \in N^*$.

a) Giả sử rằng (a_n) là một dãy R_0. Xác định giá trị của a_5.

b) Kí hiệu S_m là tổng m số hạng đầu tiên của dãy số (a_n). Tìm tất cả các giá trị thực của p sao cho tồn tại dãy số R_p là (a_n) thoả mãn $S_n \ge S_{10}$ với mọi $n \in N^*$.

Lời giải:

a) Giả sử rằng (a_n) là một dãy R_0. Xác định giá trị của a_5.

Chọn $m = n = 1$ và thay vào (iii), ta được: $a_2 \in \{2a_1 + p; 2a_1 + p + 1\}$

Vì $a_2 = -p$ nên:

$$\left[\begin{array}{l} 2a_1 = -2p \\ 2a_1 + 1 = -2p \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = -p\ (nhận) \\ a_1 = -p - \frac{1}{2}\ (loại\ vì\ a_1 \ge -p) \end{array}\right.$$

Thay $m = 1$, $n = 2$ vào (iii), ta có: $a_3 \in \{a_1 + a_2 + p,\ a_1 + a_2 + p + 1\}$, với $a_1 = a_2 = -p$, ta có: $a_3 \in \{-p, -p + 1\}$ (1)

Thay $m = 1, n = 2$ vào (1), ta có: $a_4 \in \{2a_2 + p; 2a_2 + p + 1\}$, với $a_2 = -p$, ta có: $a_4 \in \{-p, -p + 1\}$ (2)

Đồng thời từ (ii), với $n = 1$, ta có: $a_3 \le a_4$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $a_3 = -p$, $a_4 = -p + 1$

Thay $m = 1$, $n = 4$ vào (1), ta có: $a_5 \in \{a_1 + a_4 + p, a_1 + a_4 + p + 1\}$, với $a_1 = -p$, $a_4 = -p + 1$, ta có: $a_5 \in \{-p + 1, -p + 2\}$ (4)

Thay $m = 2$, $n = 3$ vào (1), ta có: $a_5 \in \{a_2 + a_3 + p, a_2 + a_3 + p + 1\}$, với $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, ta có: $a_5 \in \{-p, -p + 1\}$ (5)
Từ (4) và (5) suy ra: $a_5 = -p + 1$.
Như vậy, với (a_n) là một dãy R_0, ta có $p = 0$, vậy $a_5 = 1$

b) Kí hiệu S_m là tổng m số hạng đầu tiên của dãy số (a_n). Tìm tất cả các giá trị thực của p sao cho tồn tại dãy số R_p là (a_n) thoả mãn $S_n \geq S_{10}$ với mọi $n \in N^*$.

Ta sẽ chứng minh rằng: với mọi $n \in N$, $a_{4n+i} = n - p$ $(i = 1,2,3)$, $a_{4n+4} = n + 1 - p$ $(*)$
Thật vậy, từ ý a), ta đã tính được: $a_1 = a_2 = a_3 = -p$, $a_4 = -p + 1$.
Vậy $(*)$ đúng với $n = 0$, giả sử rằng $(*)$ đúng với n = k, $k \in N^*$.
Khi đó, ta có: $a_{4k+i} = k - p$ $(i = 1,2,3)$, $a_{4k+4} = k + 1 - p$
Thay $m = 1$, $n = 4k + 4$ vào (iii), ta có: $a_{4k+5} \in \{a_1 + a_{4k+4} + \text{p},\ a_1 + a_{4k+4} + p + 1\}$, với $a_1 = -p$, $a_{4k+4} = k + 1 - p$, ta có: a_{4k+5} € $\{k + 1 - p, k + 2 - p\}$. (6)
Thay $m = 2$, $n = 4k + 3$ vào (iii), ta có: $a_{4k+5} \in \{a_2 + a_{4k+3} + \text{p},\ a_2 + a_{4k+3} + p + 1\}$, với $a_2 = -p$, $a_{4k+3} = k - p$, ta có: $a_{4k+5} \in \{k - p, k + 1 - p\}$ (7)
Từ (6) và (7), ta được: $a_{4k+5} = k + 1 - p$
Thay $m = 1$, $n = 4k + 5$ vào (iii), ta có: $a_{4k+6} \in \{a_1 + a_{4k+5} + \text{p},\ a_1 + a_{4k+5} + p + 1\}$, với $a_1 = -p$, $a_{4k+5} = k + 1 - p$, ta có: $a_{4k+6} \in \{k + 1 - p, k + 2 - p\}$. (8)
Thay $m = 3$, $n = 4k + 3$ vào (iii), ta có: $a_{4k+6} \in \{a_3 + a_{4k+3} + \text{p},\ a_3 + a_{4k+3} + p + 1\}$, với $a_3 = -p$, $a_{4k+3} = k - p$, ta có: $a_{4k+6} \in \{k - p, k + 1 - p\}$. (9)
Từ (8) và (9), ta được: $a_{4k+6} = k + 1 - p$
Thay $m = 1$, $n = 4k + 6$ vào (iii), ta có: $a_{4k+7} \in \{a_1 + a_{4k+6} + \text{p},\ a_1 + a_{4k+6} + p + 1\}$, với $a_1 = -p$, $a_{4k+6} = k + 1 - p$, ta có: $a_{4k+7} \in \{k + 1 - p, k + 2 - p\}$. (10)
Thay $m = 2$, $n = 4k + 6$ vào (iii), ta có: $a_{4k+8} \in \{a_2 + a_{4k+6} + \text{p},\ a_2 + a_{4k+6} + p + 1\}$, với $a_2 = -p$, $a_{4k+6} = k + 1 - p$, ta có: $a_{4k+8} \in \{k + 1 - p, k + 2 - p\}$. (11)
Từ (ii), ta có: $a_{4k+7} < a_{4k+8}$ (12)
Từ (10), (11), (12), ta được: $a_{4k+7} = k + 1 - p$, $a_{4k+8} = k + 2 - p$.
Vậy $(*)$ đúng với $n = k + 1$, theo nguyên lý quy nạp, ta có được $(*)$.
Giả sử rằng tồn tại số thực p sao cho tồn tại dãy số R_p là (a_n) thoả mãn $S_n \geq S_{10}$ với mọi $n \in N^*$, khi đó:
S_{11} - S_{10} = a_{11} = 2 – p ≥ 0, S_9 - S_{10} = $-a_{10}$ = - (2 – p) ≥ 0, hay $p = 2$

Vậy $p = 2$ là giá trị duy nhất để tồn tại dãy số R_p là (a_n) thoả mãn $S_n \geq S_{10}$ với mọi $n \in N^*$.

Bài 4: (3,5 điểm) Cho (O) cố định có dây cung BC cố định và $\angle BOC = 120°$, điểm A di động trên cung lớn BC. Hai tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại D. AD cắt (O) tại điểm thứ hai là T. Hai tiếp tuyến tại A, T của (O) cắt nhau ở E. OE cắt AT tại M.

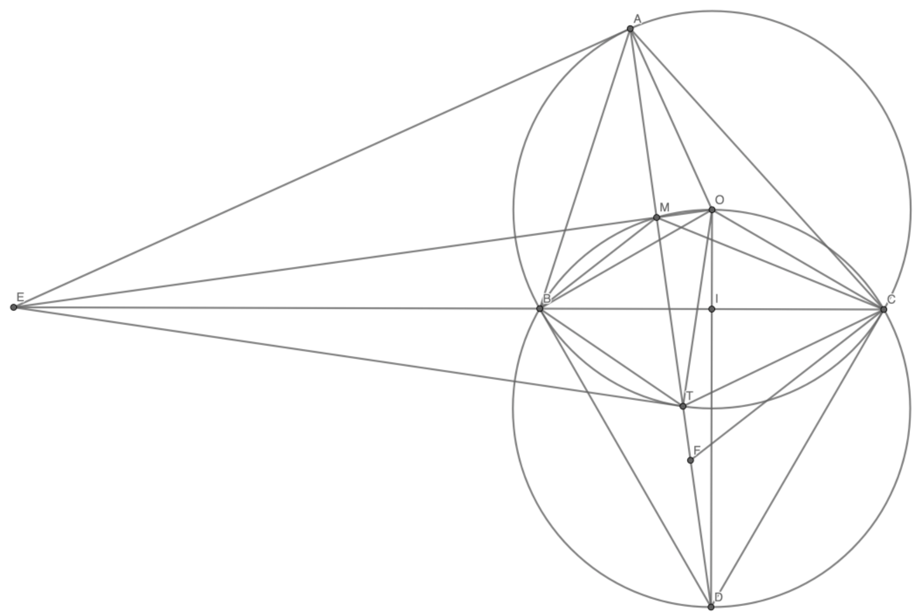
a) Chứng minh bốn điểm B, C, O, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MT^2 = MB.MC$.

c) Chứng minh E di động trên một đường thẳng cố định.

d) Tìm vị trí của điểm A trên cung lớn BC sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:



a) Ta có DB, DC là tiếp tuyến từ D tới $(O) \Rightarrow OB \perp BD, OC \perp CD$.

Tứ giác $BOCD$ có $\angle OBD + \angle OCD = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BOCD$ nội tiếp hay B, C, O, D cùng thuộc một đường tròn. (1)

Ta có $EA = ET$ (tính chất hai tiếp tuyến giao nhau) và $OA = OT$

$\Rightarrow EO$ là trung trực $AT \Rightarrow AT \perp OE$.

Tứ giác $OMDC$ có $\angle OMD + \angle OCD = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OMDC$ nội tiếp hay M, C, O, D cùng thuộc một đường tròn. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow B, C, O, M, D$ cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow B, C, O, M$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có $\angle CMD = \angle COD = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC$.

Mà $\angle ABC = \angle ATC$ (góc chắn cung AC) $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MTC$ (g-g).

Chứng minh tương tự $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MBT$ (g-g) $\Rightarrow \Delta MTC \sim \Delta MBT \Rightarrow \frac{MT}{MC} = \frac{MB}{MT} \Rightarrow MT^2 = MB.MC$.

c) Vẽ OD cắt BC tại I. Ta có EO là trung trực AT.

Chứng minh tương tự $\Rightarrow OD$ là trung trực $BC \Rightarrow I$ là trung điểm BC.

Tam giác OCD vuông tại C có CI là đường cao $\Rightarrow OC^2 = OI.OD$.

Tam giác OAE vuông tại A có AM là đường cao $\Rightarrow OA^2 = OM.OE$.

Mà $OC = OA \Rightarrow OI.OD = OM.OE \Rightarrow \frac{OM}{OD} = \frac{OI}{OE}$.

Xét ΔOMD và ΔOIE có $\angle DOE$ chung và $\frac{OM}{OD} = \frac{OI}{OE} \Rightarrow \Delta OMD \sim \Delta OIE$ (c-g-c)

$\Rightarrow \angle OMD = \angle OIE = 90°$.

Ta có $EI \perp OI$ tại I. Mà $BC \perp OI$ tại I

$\Rightarrow E, B, C$ cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với OI tại I, hay E, B, C thẳng hàng $\Rightarrow$ E di động trên đường thẳng BC cố định.

d) Gọi bán kính của (O) là $R \Rightarrow R$ không đổi.

Ta có $\angle COD = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}.120° = 60°$.

Tam giác OCD vuông tại $C \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \cos COD = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow OD = 2OC = 2R$.

Trên tia MD lấy điểm F sao cho $MF = MC \Rightarrow \Delta CFM$ cân tại M.

Mà $\angle CMD = \angle COD = 60° \Rightarrow \Delta CFM$ đều $\Rightarrow \begin{cases} CM = CF \\ \angle FCM = 60° \end{cases}$.

Ta có DB, DC là tiếp tuyến từ D tới $(O) \Rightarrow DB = DC \Rightarrow \Delta BCD$ cân tại D.

Mà $\angle CBD = \angle COD = 60° \Rightarrow \Delta BCD$ đều $\Rightarrow \begin{cases} CB = CD \\ \angle BCD = 60° \end{cases}$.

Ta có $\angle FCM = \angle BCD = 60° \Rightarrow \angle BCM = \angle DCF$.

Xét ΔBCM và ΔDCF, ta có:

$\begin{cases} BC = DC \\ \angle BCM = \angle DCF \\ CM = CF \end{cases} \Rightarrow \Delta BCM = \Delta DCF$ (c-g-c) $\Rightarrow BM = DF$

$\Rightarrow MA + MB + MC = AM + MF + FD = AD \leq OA + OD = R + 2R = 3R$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ trên cung lớn } BC \text{ của } (O) \\ A, O, D \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung lớn BC của (O).

Vậy A là điểm chính giữa cung lớn BC của (O) thì $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5: (1,5 điểm) Có bảng trắng 4×4 ô vuông đơn vị. A và B chơi một trò chơi. Ở lượt của A, anh ấy tô đỏ 1 ô vuông đơn vị đang màu trắng thoả ô đó không chung cạnh với ô vuông đơn vị đỏ khác. Ở lượt của B, anh ấy tô xanh 3 ô vuông đơn vị đang màu trắng thoả 3 ô đó tạo thành hình chữ nhật 1×3 hoặc 3×1. Người đầu tiên không tô được sẽ thua.

a) Biết rằng A chơi trước, chứng minh rằng A có chiến thuật thắng.

b) Biết rằng B chơi trước, hỏi ai có chiến thuật thắng? Chứng minh.

Lời giải:

Ta đánh số các ô vuông đơn vị như sau:

1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3
1	2	3	1

Ta thấy hai ô chung cạnh thì không được đánh cùng số và hình chữ nhật mà B phải tô luôn phủ kín một ô số 1, một ô số 2, một ô số 3.

a) A đi trước $\Rightarrow$ A đi các lượt số lẻ và B đi các lượt số chẵn.

Đến lượt của A, ta cho A tô các ô số 2 không chung cạnh với nhau.

Khi đó, sau mỗi lượt của mỗi người thì một ô số 2 sẽ được tô.

Nếu đến lượt thứ hai hoặc thứ tư B không đi được $\Rightarrow$ A thắng.

Nếu đến lượt thứ tư B vẫn đi được, mà có 5 ô số 2 $\Rightarrow$ Ở lượt thứ năm A sẽ tô ô số 2 cuối cùng $\Rightarrow$ Ở lượt tiếp theo B không tô được $\Rightarrow$ A thắng.

Vậy A có chiến thuật thắng.

b) B đi trước ⇒ A đi các lượt số chẵn và B đi các lượt số lẻ.

Đến lượt của A, ta cho A tô các ô số 1 không chung cạnh với nhau.

Khi đó, sau mỗi lượt của mỗi người thì một ô số 1 sẽ được tô.

Nếu đến lượt thứ nhất, thứ ba hoặc thứ năm B không đi được ⇒ A thắng.

Nếu đến lượt thứ năm B vẫn đi được, mà có 6 ô số 1 ⇒ Ở lượt thứ sáu A sẽ tô ô số 1 cuối cùng ⇒ Ở lượt tiếp theo B không tô được ⇒ A thắng.

Vậy A có chiến thuật thắng.

--HẾT--