Kiến thức toán dành cho lý 1

Ban chuyên môn Vật lý − The Gifted Battlefield

Xuất bản vào Ngày 4 tháng 12 năm 2022

Lời mở đầu

Đối với người học Vật lý, từ mức độ làm quen cơ bản cho đến nghiên cứu chuyên sâu hay tham dự các kỳ thi quốc tế, việc trang bị cho bản thân những kỹ năng Toán học là thiết yếu. Tuy nhiên, Toán học dành cho Vật lý thường chỉ mang tính ứng dụng, cũng như là công cụ hỗ trợ để phân tích, biểu diễn các mô hình, đặc biệt còn bao hàm, ẩn chứa các ý nghĩa Vật lý của sự vật, hiện tượng. Để phục vụ cho nhu cầu bổ túc kỹ năng giải Toán cho Vật lý, chuyên đề đầu tiên giúp người đọc tiếp cận với các công cụ tính toán cơ bản trong bộ môn Giải tích, đồng thời đặt nền móng để phát triển về sau này.

I. Hàm ngược

1. Hàm ngược(Inverse function)

Hàm ngược, hay hàm nghịch đảo, là hàm hoàn tác lại tính toán của một hàm f. Ví dụ: hàm ngược của $y = -x$ là $-y = x$, của $y = x + 5$ là $y = x - 5$, của $y = \sqrt{x}$ là $y = x^2$. Hàm ngược của một hàm số $f(x)$ thường được ký hiệu là $f^{-1}(x)$. Lưu ý, ta thường nhầm lẫn hàm ngược với nghịch đảo của một hàm (reciprocal): $f^{-1}(x) \neq f(x)^{-1} = 1/f(x)$. Với tính chất song ánh của hàm có hàm ngược, ta có được tính chất: $f^{-1}(f(x)) = x$,hay: $f(f^{-1}(x)) = x$.

2. Các hàm lượng giác ngược (Inverse trigonometric function)

Các hàm $\sin^{-1}(x)$, $\cos^{-1}(x)$ là các hàm ngược của các hàm sin, cos (inverse function) cần được phân biệt với $\sin(x)^{-1}$, $\cos(x)^{-1}$ là những hàm nghịch đảo của sin cos (reciprocal) $\Leftrightarrow$ 1/sin, 1/cos. Để tránh nhầm lẫn, hàm ngược của các hàm $\sin^{-1}(x), \cos^{-1}(x)$ được đặt lần lượt là: $\arcsin, \arccos$. Ví dụ: $sin(\pi/6) = 1/2 \Leftrightarrow arcsin(1/2) = \pi/6$

II. Giới hạn

Trong Toán học, khái niệm "giới hạn" được sử dụng để chỉ giá trị mà một hàm số hoặc một dãy số tiến gần đến khi biến số tương ứng tiến gần đến một giá trị nào đó. Trong một không gian đầy đủ, khái niệm giới hạn cho phép ta xác định một điểm mới từ một dãy Cauchy các điểm đã được xác định trước. Giới hạn là khái niệm quan trọng của Giải tích và được sử dụng để định nghĩa về tính liên tục, đạo hàm và phép tính tích phân. Sự tồn tại của một giới hạn tại một điểm cũng là một điều kiện cần để một hàm số có thể liên tục.

1. Giới hạn hữu hạn

Định nghĩa:

Đối với một chuỗi $u_1, u_2, \ldots u_n$; ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi $n \to +\infty$, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Ký hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số a khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$

Ký hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$

Đối với hàm số:

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K hoặc trên $K\backslash\{x\}$; ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K\backslash\{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

a. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} x = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ thì:

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = L + M$

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) - g(x)] = L - M$

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x).g(x)] = L.M$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x} f(x) = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

Chú ý: Định lí 1 vẫn đúng khi $x_n \to +\infty$ hoặc $x_n \to -\infty$.

Định lí 2.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = L$.

2. Giới hạn trái, phải. Giới hạn một bên

Khi nói về giới hạn, ta hiểu đó là sự tiệm cận của biến đến một giá trị, như vậy chiều tiệm cận ở phía nào của giá trị? Câu trả lời là cả hai. Để một giới hạn tồn tại, biến dù tiến tới từ trái hay phải cũng phải tiến đến một giá trị. Để phân biệt hai giới hạn này, người ta ký hiệu:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{và} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Dấu cộng và trừ biểu trưng cho chiều tiệm cận của biến số, hay còn gọi lần lượt là giới hạn phải và trái.

Ví dụ:
Cho hàm số $f(x) = |x|/x$. Dễ thấy hàm số bị gián đoạn tại $x = 0$ do điều kiện của mẫu số.

Xét giới hạn phải, với $x > 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Xét giới hạn trái, với $x < 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Từ kết quả trên, ta nhận thấy từ phía dương hay âm đối với điểm $x = 0$, giới hạn hàm số đều tiến về $x = -1$, vậy không tồn tại giới hạn tại $x = 0$, hay có thể nói $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$ như đã quan sát định tính như ban đầu.

3. Giới hạn vô cực

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; +∞), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n >$ a, $x_n \to +\infty$ thì ta có $f(x_n) \to L$.

a. Các giới hạn đặc biệt

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} c = c$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x} = 0$ (c là hằng số)
$\lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ (k nguyên dương)
$\lim_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ (k lẻ)
$\lim_{x \to -\infty} x^k = +\infty$(k chẵn)

4. Giới hạn và sự liên tục của hàm số

Từ mục về giới hạn một bên, ta đã biết điều kiện để tồn tại một hàm số liên tục, tuy nhiên điều kiện trên chưa xét đến sự dịch giá trị tức thời của hàm $f(x)$ (chỉ một điểm lệch khỏi hàm thay vì cả một phần tử) nên xét bằng tích phân một bên vẫn thỏa mản. Ta tổng quát hóa điều kiện cho sự liên tục của hàm số bằng phép giới hạn: điểm cô lập

Một hàm số được gọi là liên tục tại một điểm c trên miền của nó khi giới hạn của $f(x)$ khi $x \to c$ tồn tại và có giá trị $f(c)$. Biểu diễn toán học:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Ta có thể rút ra: $f(c)$ tồn tại trong miền của hàm số, $\lim_{x \to c} f(c)$ tồn tại và nó bằng $f(c)$ (đảm bảo được sự liền mạch).

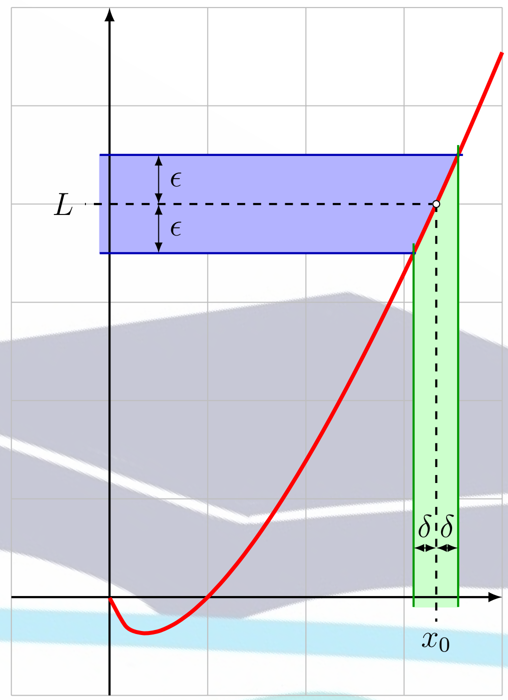
5. Định nghĩa (ϵ, δ) cho giới hạn

Phát biểu: Gọi f là một hàm định nghĩa trên miền xác định D. Gọi c là một điểm nằm trong miền xác định và L là một số thực; ta nói $\lim_{x \to c} f(x) = L$ nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại một $\delta > 0$ sao cho, với mọi $x \in D$, nếu $0 < |x - c| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.

Cách định nghĩa này có thể viết một cách cơ bản bằng các ký hiệu toán học như sau: Nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ thì có nghĩa:

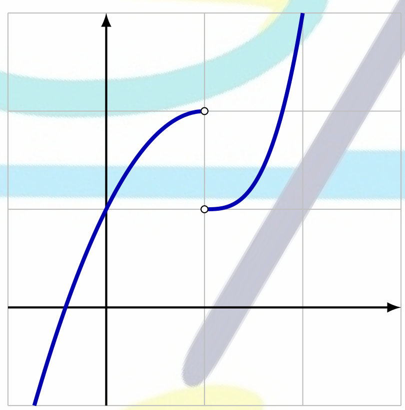
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{sao cho} \, \forall x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Biểu diễn qua hình vẽ:

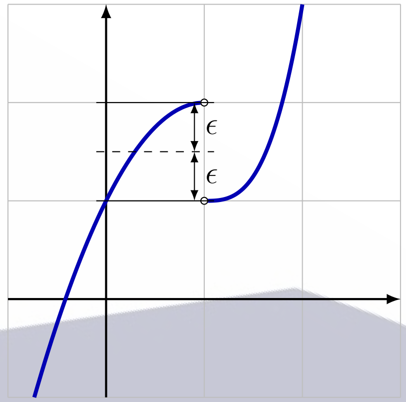


6. Liên hệ giữa tính liên tục và định nghĩa (ϵ, δ) của hàm số:

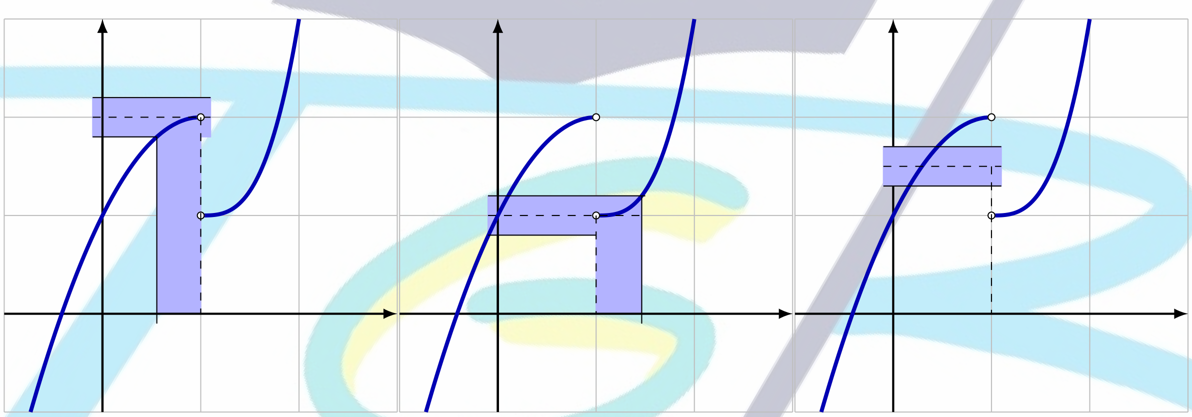
Ta xét ví dụ với hàm $f(x)$ có đồ thị như sau:



Dễ dàng thấy hàm này không liên tục tại $x = 1$. Dùng định nghĩa (ϵ, δ) ta nhận thấy tại điểm $x = 1$ tồn tại một giá trị của ϵ sao cho không có giá trị nào của δ nào thỏa mãn.



Nhận thấy nếu ϵ nhỏ hơn giá trị trên thì sẽ không có δ nào cho phép x đạt các giá trị đó $(\epsilon - L, \epsilon + L)$ về cả 2 phía:



Chỉ thỏa về bên trái | Chỉ thỏa về bên phải | Không thỏa về cả 2 phía

Chú ý: ta không nhận phần cắt đường cong còn lại và để δ lớn, vì như vậy sẽ tồn tại $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mà $f(x) \notin (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Cộng thêm điều kiện về sự không tồn tại của điểm cô lập, phát biểu về tính liên tục bằng định nghĩa (ϵ, δ) được phát biểu lại:

Một hàm số f trên miền D được coi là liên tục tại $x \in D$, khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$ luôn tồn tại một $\delta > 0$, sao cho $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ luôn đúng với mọi $x \in D$ với $|x - x_0| < \delta$. Với các ký hiệu, định nghĩa này được viết:

$$\forall \epsilon, \quad \exists \delta > 0 \text{ sao cho } \forall x \in D, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

III. Đạo hàm

Đạo hàm là một toán tử vi phân tác dụng lên một hàm đặc trưng sự biến thiên tức thời của hàm tại một điểm. Ví dụ: vận tốc tức thời được định nghĩa là đạo hàm của vị trí theo thời gian, gia tốc tức thời là đạo hàm của vận tốc theo thời gian.

Các kí hiệu thông dụng: $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, $f'(x)$ và $\dot{f}(x)$. Kí hiệu cuối thường được dùng trong vật lý để mô tả đạo hàm của một đại lượng theo thời gian: $df(x)/dt$.Về mặt toán học, đạo hàm được định nghĩa:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

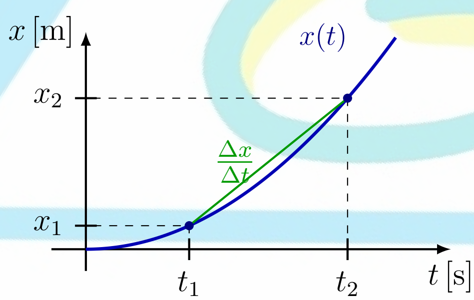
Ví dụ: Vận tốc trung bình sau khoảng Δt kể từ thời điểm t được biểu diễn:

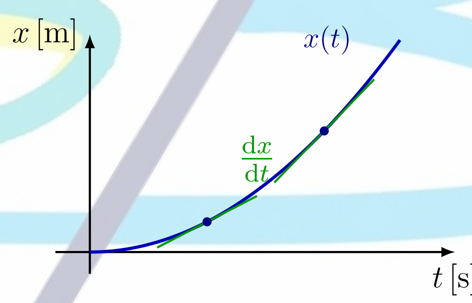
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Nếu xét khoảng Δt rất bé, sự biến thiên này mang ý nghĩa tức thời, người ta thay kí hiệu Δt bằng dt

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Về mặt hình học, trên đồ thị, đạo hàm của hàm số tại một điểm là giá trị độ dốc (hệ số góc) của đường tiếp tuyến tại điểm đang xét:





1. Hàm Logarit

Hàm log (logarithm) là hàm ngược của hàm mũ, nghĩa là $a = \log_b(c)$ thì $c = b^a$, b gọi là cơ số của hàm log_b. Ví dụ: $\log_3(9) = 2$ vì $3^2 = 9$. Một hàm log có cơ số đặc biệt là hàm ln, nó là hàm log có cơ số là số Euler e. Hàm này thường xuyên xuất hiện trong vật lý với nhiều tính chất đặc biệt do nó phát sinh từ những khái niệm có liên quan đến tự nhiên như phân phối chuẩn, lãi suất kép,...

Trong các bài toán về logarit, ta có thể sử dụng biến đổi sau: $f(x) = e^{\ln f(x)}$.

2. Một số đạo hàm thông dụng

Đa số các hàm đều có thể lấy đạo hàm, trừ những hàm không liên tục hay gấp khúc. Đặc biệt, trong Vật lý, việc tìm đạo hàm của hàm số sẽ giúp ta đánh giá được các tính chất hay diễn biến của quá trình. Sau đây là một số đạo hàm thông dụng:

- $f(x) = c \quad$ thì $\quad f'(x) = 0$ Do hàm hằng thì không có sự thay đổi
- $g(x) = c \cdot f(x) \quad$ thì $\quad g'(x) = c \cdot f'(x)$
- $h(x) = f(x) \pm g(x) \quad$ thì $\quad h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- **Công thức hạ bậc (Power rule):** $f(x) = x^n \quad$ thì $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- **Đạo hàm một tích (Product rule):** $h(x) = f(x)g(x) \quad$ thì $\quad h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- **Đạo hàm một thương (Quotient rule):** $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad$ thì $\quad h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- **Đạo hàm của hàm hợp (Chain rule):** $h(x) = f(g(x)) \quad$ thì $\quad h'(x) = f'(g(x))g'(x)$
- **Đạo hàm của các hàm lượng giác:**
  - ⋆ $f(x) = \sin(x) \quad$ thì $\quad f'(x) = cos(\theta)$
  - ⋆ $f(x) = \cos(x) \quad$ thì $\quad f'(x) = -sin(x)$
  - ⋆ $f(x) = \tan(x) \quad$ thì $\quad f'(x) = 1/\cos^2(\theta) = \sec^2(\theta)$
  - ⋆ $f(x) = \cot(x) \quad$ thì $\quad f'(x) = -1/\sin^2(\theta) = \csc^2(\theta)$
- **Đạo hàm hàm lượng giác ngược:**
  - ⋆ $f(x) = \arcsin(x) \quad$ thì $\quad f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$
  - ⋆ $f(x) = \arccos(x) \quad$ thì $\quad f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$
  - ⋆ $f(x) = \arctan(x) \quad$ thì $\quad f'(x) = 1/(1+x^2)$
  - ⋆ $f(x) = \mathrm{arccot}(x) \quad$ thì $\quad f'(x) = -1/(1+x^2)$
- **Đạo hàm hàm mũ:**
  - ⋆ $f(x) = e^x \quad$ thì $\quad f'(x) = e^x \quad$ với e là hằng số Euler xấp xỉ 2.7182
  - ⋆ $f(x) = a^x \quad$ thì $\quad f'(x) = \ln(a)a^x \quad$ với ln là logarith cơ số e

- **Đạo hàm hàm log:**

    ⋆ $f(x) = \ln(x)$ thì $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

    ⋆ $f(x) = \log_a(x)$ thì $f'(x) = \dfrac{1}{ln(a)x}$

    ⋆ $f(x) = \ln(g(x))$ thì $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Ví dụ: Phương trình li độ của một vật đang thực hiện dao động điều hòa có dạng $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Hãy tìm vận tốc của vật theo thời gian và tìm hệ thức liên hệ giữa tọa độ và vận tốc độc lập thời gian.

Đáp án: Nhận xét: nếu đặt $g(t) = \omega t$, $h(t) = \phi$ và $f(x) = \cos x$ thì ta có thể viết lại phương trình của đề bài dưới dạng $x(t) = A.f(g(t) + h(t))$. Như vậy ta sẽ dùng công thức hàm hợp đối với $f(g(t) + h(t))$, công thức cộng đối với $g(t) + h(t)$. Ta có vận tốc của vật là:

$$\begin{aligned} v = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= A.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(cos(\omega t + \phi)) \\ &\Leftrightarrow v = A.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x.\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega t + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right) \\ &\Leftrightarrow v = A. -\sin x.\omega; \qquad \text{thay } x = \omega t + \phi \\ &\Leftrightarrow v = -\omega.A.\sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Từ đây ta rút ra được hệ thức liên hệ giữa tọa độ và vận tốc độc lập thời gian:

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \phi) & \Rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 = \cos(\omega t + \phi)^2 \\ v = -\omega A\sin(\omega t + \phi) & \Rightarrow \left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 = \sin(\omega t + \phi)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2}$$

3. Đạo hàm bậc cao

Đạo hàm bậc cao, hay đạo hàm cấp cao mô tả việc lấy đạo hàm của một hàm số nhiều lần. Ví dụ: hàm gia tốc tức thời theo thời gian là đạo hàm bậc nhất của hàm vận tốc, hay là đạo hàm bậc hai của quãng đường.

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

Các ký hiệu thường dùng:
$$\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}, \quad f^{(n)}(x)$$
Với n là số bậc đạo hàm, đối với đối với đạo hàm bậc thấp như bậc hai, ta còn có hai cách ký hiệu thường dùng:$f''(x)$, $\ddot{f}(x)$

Ví dụ Từ phương trình dao động điều hòa $x = A\cos(\omega t + \phi)$ hãy tìm sự liên hệ giữa gia tốc và li độ, từ đó chứng minh rằng một vật gắn trên lò xo lệch khỏi vị trí cân bằng sẽ dao động điều hòa.

Đáp án Ta có: $x = A\cos(\omega t + \phi)$
$$\Rightarrow v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$
$$\Rightarrow a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = \boxed{-\omega^2 x}$$
Vậy những chuyển động có gia tốc tỉ lệ nghịch với li độ, hay $\ddot{x} = -\omega^2 x$ sẽ biểu thị cho một dao động điều hòa. Xét trường hợp vật trên lò xo, từ định luật II Newton và định luật Hooke:
$$ma = F_k = -kx$$
$$\Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$
Đặt $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ta được $a = -\omega^2 x$. Vậy vật này dao động điều hòa [1].

4. Phép tính vi phân

Đây là phép tính có ứng dụng quan trọng trong việc mô tả sự liên hệ giữa các biến thiên của các đại lượng vật lý trong quá trình đang khảo sát. Giả sử ta có một phương trình $f(x) = g(y)$ Để tìm sự liên hệ giữa các biến đổi rất bé của các biến, ta tiến hành lấy vi phân. Kí hiệu $\mathrm{d}(f(x)), \mathrm{d}(g(y))$ Để lấy vi phân ta lấy đạo hàm của hai vế phương trình theo biến của hai vế phương trình đó($f'(x)$, $g'(y)$) và sau đó nhân hai vế phương trình với vi phân của các biến($\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$) mà hàm đó phụ thuộc vào. Với phương trình trên,

[1] Lý thuyết về dao động điều hòa và chứng minh dao động điều hòa bằng cách giải phương trình vi phân sẽ được bàn đến kĩ lưỡng hơn trong các chuyên đề khác

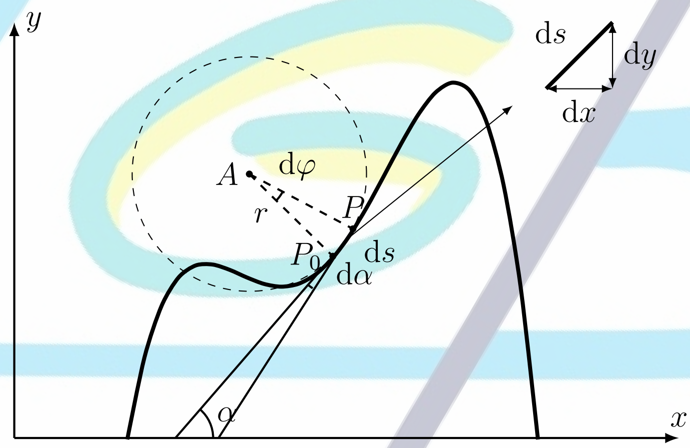
dạng vi phân của nó là $f'(x)\mathrm{d}x = g'(y)\mathrm{d}y$. Tóm lại:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(y) \\ \mathrm{d}(f(x)) &= \mathrm{d}(g(y)) \\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y} \cdot \mathrm{d}y \\ f'(x)\mathrm{d}x &= g'(y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

5. Bán kính cong

Khi một chất điểm chuyển động trên một quỹ đạo cong bất kì, trong hệ tọa độ tự nhiên, tại mỗi điểm gia tốc của vật có thể được phân tích thành hai phần:

- Gia tốc tiếp tuyến đặc trưng cho sự thay đổi về độ lớn của vector vật tốc $a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$.
- Gia tốc pháp tuyến (gia tốc hướng tâm) đặc trưng cho sự thay đổi về hướng của vecto vận tốc, với độ lớn $a_n = v^2/r$. r đây chính là bán kính cong (bán kính chính khúc) của quỹ đạo.



Xét một cung nhỏ P_0P có độ dài ds như hình vẽ
Ta có (dấu trị tuyệt đối biểu thị giá trị dương của bán kính):

$$r = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\right|$$

Từ định lý Pytago ta có:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + y'^2}$$

$$tan(\alpha) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$$

Lấy vi phân hai vế, chú ý rằng:

$$\begin{cases} \mathrm{dy' = (dy'/dx) \cdot dx = y''dx} \\ \sec^2(\alpha) = 1 + \tan^2(\alpha) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sec^2(\theta)\mathrm{d}\theta = (1 + \tan^2(\alpha))\mathrm{d}\alpha = y''\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}\alpha = \frac{y''\mathrm{d}x}{(1 + tan^2(\alpha))} = \mathrm{d}x\frac{y''}{(1 + y'^2)}$$

Thế hai phương trình trên vào phương trình ban đầu, $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\alpha$ (độc giả có thể sử dụng hình học tự chứng minh vì sao hai vi phân này bằng nhau):

$$r = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}\right| \Leftrightarrow r = \left|\frac{\mathrm{d}x\sqrt{1 + y'^2}}{\mathrm{d}x\frac{y''}{(1+y'^2)}}\right|$$

$$\Leftrightarrow r = \left|\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|$$

6. Đạo hàm của hàm ngược

Giả sử một hàm $f(x)$ có hàm ngược là $f^{-1}(x) = g(x)$. Ta có:

$$y = f^{-1}(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow f'(y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f'(y)}$$

Thế $y = g(x)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g'(x)$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Từ đây ta có thể chứng minh được một đạo hàm của một hàm ngược bất kì chỉ với đạo hàm của hàm ban đầu. Ví dụ như hàm $f(x) = \sin(x)$ có hàm ngược $f^{-1}(x) = \arcsin x =$

$g(x)$. Đạo hàm của sin $f'(x) = \cos(x)$. Thế các phương trình này vào phương trình bên trên, ta ra được:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Giả sử như $\arcsin(x) = \theta$ thì $\sin(\theta) = x = x/1$, từ Pytago cho một tam giác vuông có cạnh đối bằng x và cạnh huyền bằng 1 (thỏa mãn $\sin(\theta) = x$), nên $\cos(\arcsin(x)) = \cos(\theta) = \sqrt{1-x^2}$.

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

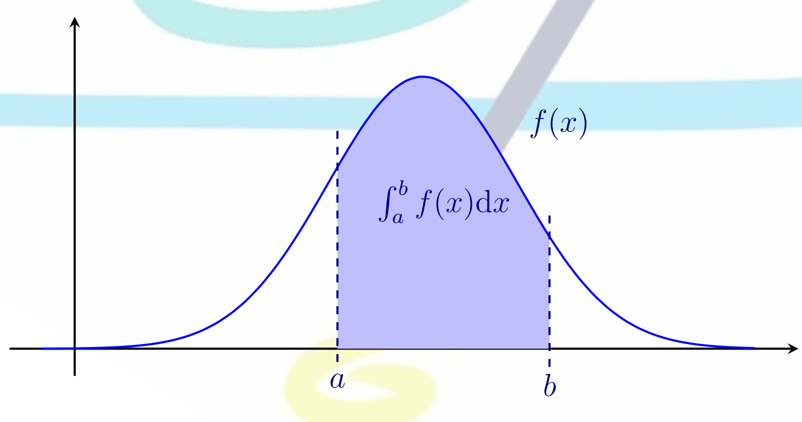
IV. Nguyên hàm, Tích phân

Tích phân xác định được định nghĩa (không chính quy) là quá trình tìm diện tích dưới một hàm từ hai khoảng.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Cách ký hiệu này được định nghĩa là diện tích của một vùng trong không gian phẳng xy được bao bởi đồ thị của hàm f, trục hoành, và các đường thẳng x = a và x = b, sao cho các vùng trên trục hoành sẽ được tính vào tổng diện tích, còn dưới trục hoành sẽ bị trừ vào tổng diện tích. Có tên tiếng Việt là tính diện tích hình thang cong.

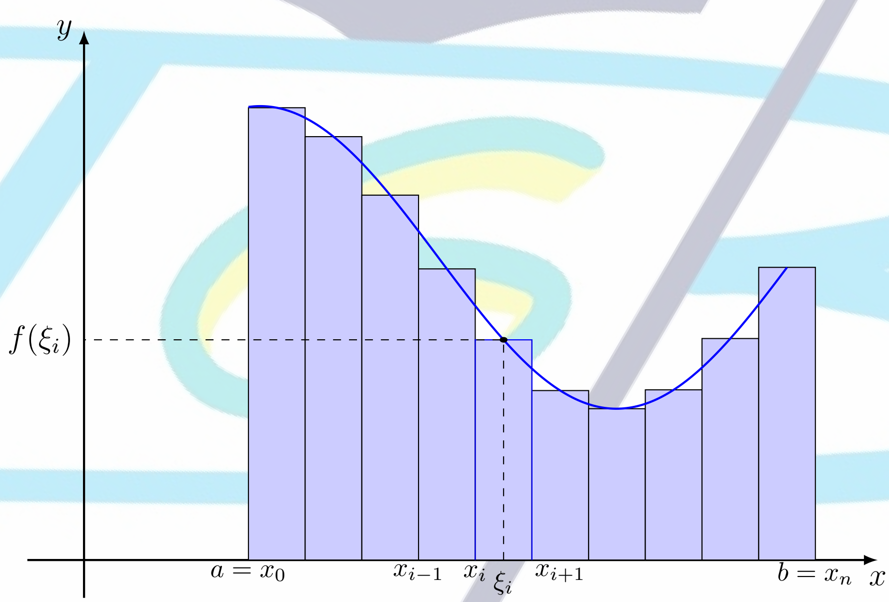
Ta gọi a là cận dưới của tích phân, còn b là cận trên của tích phân.



Theo định nghĩa toán học nó là một phép tính tổng với rất nhiều số hạng. Giả sử ta muốn tính diện tích phần dưới đồ thị $f(x)$ từ a đến b. Ta chia nhỏ đoạn [a,b] ra thành từng đoạn nhỏ với những điểm phân cách từng đoạn là x_i, sao cho $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, và sau đó tìm tổng:

$$S = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Với $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ và $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$. Phép tính tổng này có có tên gọi là tổng Riemann. Có thể hiểu cách tính tổng này như việc chia đồ thị hàm số ra thành các hình chữ nhật có đáy là Δx và chiều cao là $f(\xi)$ sau đó tính tổng diện tích các hình chữ nhật. Khi n tiến tới vô cùng, tổng S sẽ có thể tiến tới một giá trị nhất định, thì đó sẽ là tích phân của $f(x)$ từ a đến b; còn nếu tổng S không tiến tới một giá trị xác định nào cả, thì tích phân đấy không xác định. Tùy vào cách chọn ξ_i mà có những cách xấp xỉ khác nhau, ví dụ như $\xi_i = x_i$ là tổng Riemann trái, $\xi_i = x_{i+1}$ là tổng Riemann phải, ξ_i là trung bình cộng thì là tổng Riemann giữa như đồ thị dưới đây:



Từ tổng này ta cũng có thể thấy được nhưng tính chất của tích phân như:

$$\int_a^b 0\mathrm{d}x = 0, \quad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)$$

Nguyên hàm là toán tử ngược của đạo hàm, tức là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là tìm hàm mà đạo hàm ra $f(x)$, quá trình này còn được gọi là tích phân bất định, và được ký hiệu là:

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

Vì đạo hàm của hằng số bằng 0, nên nguyên hàm của 1 hàm sẽ là một hàm dạng $f(x)+C$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

1. Sự liên hệ của đạo hàm và tích phân

Giả sử ta có 1 tích phân xác định:

$$\int_a^x f(u)\mathrm{d}u = F(x)$$

với $f(u)$ là 1 hàm liên tục, a là một số hạng bất kì, phương trình này chỉ phụ thuộc vào x nên ta có thể đặt nó bằng F(x), từ đây ta có thể biến đổi:

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_a^x f(u)\mathrm{d}u + \int_x^{x+\Delta x} f(u)\mathrm{d}u \\ &= F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(u)\mathrm{d}u \\ \Rightarrow \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Khi Δx tiến tới 0, ta thấy vế trái của phương trình sẽ trở thành định nghĩa của đạo hàm phương trình $F(x)$ bên trên, còn ở vế phải thì tích phân xác định sẽ bằng $f(x)\Delta x$ theo định nghĩa hình học, nhân với Δx ta được $f(x)$. Tóm lại ta sẽ có:

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(u)\mathrm{d}u\right) = f(x)$$

Vậy $F(x)$ chính là nguyên hàm của $f(x)$. Đây cũng chính là phần I của định lý cơ bản của giải tích

Từ đây ta sẽ có thể tính một tích phân tổng quát:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^b f(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^a f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

với x_0 là 1 điểm cố định nào đó. Vậy tích phân của $f(x)$ từ a đến b sẽ bằng *hiệu nguyên hàm của $f(x)$ tại b và nguyên hàm $f(x)$ tại a.*

2. Tích phân suy rộng

Đây là một dạng tính tích phân xác định nhưng có một hoặc hai cận nằm ở dương vô cùng hoặc âm vô cùng. Ví dụ:

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

Ở đây ta biến đổi các cận vô cùng thành một giá trị rồi lấy giới hạn của giá trị đó đến vô cùng. Phân tích ví dụ trên:

$$\lim_{b\to\infty}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) = \lim_{b\to\infty}(F(b) - F(a))$$

Kĩ thuật này thường được áp dụng với những bài toán yêu cầu tính từ trường và điện trường của các mặt phẳng, đoạn dây dài vô hạn để xấp xỉ vào các trường hợp tính từ trường điện trường khi điểm xét rất gần mặt phẳng, đoạn dây và có thể xấp xỉ đến vô hạn.

3. Phương pháp lấy tích phân

Khác với đạo hàm, phép tính nguyên hàm không có phương pháp chung rõ ràng để tính toán, có những hàm số không tồn tại tích phân, hay không thể viết kết quả tích phân dưới dạng tường minh. Tuy nhiên, đối với một số hàm đặc biệt, ta có thể đảo ngược quá trình đạo hàm để tìm nguyên hàm của hàm số:

$$\int \mathrm{d}x = x + C, \quad \int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \quad \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C, \quad \int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

Đối với những bài toán phức tạp mà ta không tìm được dạng tường minh của kết quả tích phân, ta có thể biểu diễn kết quả dưới dạng một tích phân. Tuy nhiên, một số dạng phức tạp của hàm số có thể dùng một số mẹo biến đổi đặc biệt để đưa về những dạng cơ bản có thể lấy tích phân được dưới đây.

a. Đổi biến

Phương pháp (Định hướng ngược lại với Chain rule) Biến đổi một phương trình $f(x)$ thành $f(u)$ hoặc $f(t)$, sau đó sử dụng vi phân để biến đổi dx thành du hoặc dt. Ví dụ ta lấy nguyên hàm hàm số $f(x) = (4x-3)(2x^2-3x+5)$

$$\int (4x-3)(2x^2-3x+5)\mathrm{d}x$$

Lưu ý: ta có thể tách các hạng tử của hàm số rồi sử dụng các tích phân bản đã nêu ở trên, dưới đây tác giả chỉ dùng phương pháp đổi biến. Nếu tinh ý, ta nhận thấy $4x-3$ chính là đạo hàm của $2x^2-3x+5$, vì thế sau khi đổi biến ta sẽ ra được phương trình gọn gàng hơn. Tiến hành đổi $u = 2x^2-3x+5$

$$\int (4x-3)u\mathrm{d}x$$

Để tìm mối liên hệ giữa dx và du ta lấy vi phân: $u = 2x^2-3x+5 \Rightarrow \mathrm{d}u = (4x-3)\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow \int (4x-3)u\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + C$$

Cuối cùng, ta biến đổi kết quả tích phân từ biến u sang biến x:

$$\Rightarrow \int (4x-3)(2x^2-3x+5)\mathrm{d}x = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(2x^2-3x+5)^2}{2} + C$$

Đối với các tích phân xác định ta cần thay đổi các cận tích phân theo biến mới. Giả sử ta xét phương trình $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$. Tích phân của phương trình từ 0 đến $\pi/2$ là:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\mathrm{d}x$$

Nhận thấy $d(sin(x)) = cos(x)dx$, đặt $t = sin(x)$ và $dt = cos(x)dx$:

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} t^2 \mathrm{d}t$$

Sau đấy ta thực hiện quá trình đổi cận bằng cách thế lần lượt các cận vào phương trình đổi biến. Cận dưới: $\sin(0) = 0 \rightarrow t = 0$, Cận trên $\sin(\pi/2) = 1 \rightarrow t = 1$.

$$\Leftrightarrow \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Ngoài ra, đổi biến còn có một cách thức phức tạp hơn đó là sử dụng các hàm lượng giác để thay thế. Giả dụ như nguyên hàm phương trình:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(4+x^2)^{3/2}}$$

Ta tiến hành thế $x = 2\tan(\theta) \rightarrow \mathrm{d}x = 2\sec^2(\theta)\mathrm{d}\theta$, Sử dụng công thức $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$ (chia $\cos^2(x)$ từ $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$):

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{(4+x^2)^{3/2}} &= \int \frac{2\sec^2(\theta)\mathrm{d}\theta}{[4+(2\tan(\theta))^2]^{3/2}} \\
&= \int \frac{2\sec^2(\theta)\mathrm{d}\theta}{[4(1+\tan^2(\theta))]^{3/2}} \\
&= \int \frac{2\sec^2(\theta)\mathrm{d}\theta}{[4\sec^2(\theta)]^{3/2}} \\
&= \int \frac{2\sec^2(\theta)\mathrm{d}\theta}{8\sec^3(\theta)} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sec(\theta)} = \frac{1}{4}\int \cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4}\sin(\theta) + C
\end{aligned}$$

Vì $\tan(\theta) = x/2$ nên $\sin(\theta) = x/\sqrt{x^2+2^2}$

$$\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{(4+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$$

b. Tích phân từng phần

Phương pháp (Định hướng ngược lại với Product rule): tách phương trình ra thành hai phần để tính toán riêng:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Chứng minh: Giả sử ta có một phương trình $g(x) = u(x)v(x)$, Lấy vi phân 2 vế $g'(x)\mathrm{d}x = u'(x)v(x)\mathrm{d}x + u(x)v'(x)\mathrm{d}x$. Nguyên hàm hai vế:

$$\int g'(x)\mathrm{d}x = g(x) = u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

Giả sử như phương trình xe^x ta có thể tách $x = u(x)$, $e^x = v'(x) \Rightarrow u'(x) = 1, v(x) = e^x$

$$\Rightarrow \int xe^x\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$$

Hay như nguyên hàm $\ln(x)$(lấy $\ln(x) = u(x), 1 = v'(x)$):

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x = \int (\ln(x))(1\mathrm{d}x) = \ln(x)x - \int \frac{1}{x}\cdot x\mathrm{d}x = \ln(x)x - x + C$$

Ta cũng có thể kết hợp các phương pháp này lại với nhau để có thể giải một nguyên hàm phức tạp. Giả dụ như:

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

Ta thế $\sqrt{x} = u$ để tối giản mũ,vi phân 2 vế ta tìm được $1/(2\sqrt{x})\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \Rightarrow \mathrm{d}x = 2u\mathrm{d}u$

$$\Rightarrow \int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int e^u 2u\mathrm{d}u$$

Từ đây ta sử dụng tích phân từng phần như ví dụ ở trên và ra được:

$$\int 2ue^u\mathrm{d}u = 2ue^x - 2e^x + C$$

Hoặc các tích phân có thể giải bằng những biến đổi đại số thông thường, ví dụ như:

$$\int \frac{2-3x}{6x-4}\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{2}\cdot\frac{6x-4}{6x-4}\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{2}\mathrm{d}x = \frac{-1}{2}x + C$$

4. Ví dụ

Định luật Biot-Savart cho từ trường của một dòng điện trong chân không:

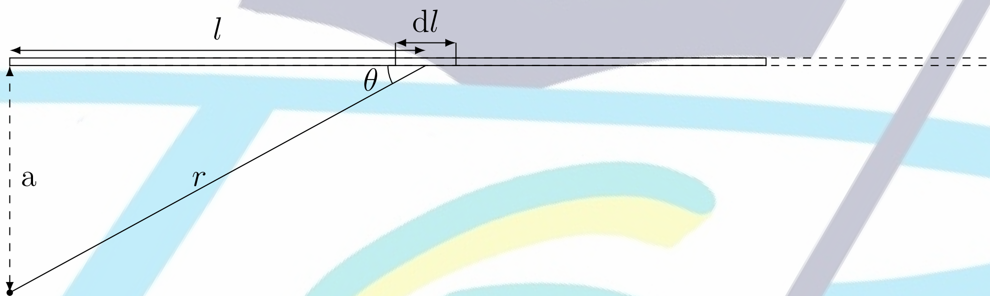
$$\mathrm{d}\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{r}}{r^3}$$

và ở dạng đại số:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin(\phi)\mathrm{d}l}{r^2}$$

với I là cường độ dòng điện,μ_0 là độ từ thẩm trong chân không có giá trị $4\pi.10^{-7}$, r là vị trí tính từ trường và $\sin(\phi)$ là góc giữa dây và $\overrightarrow{r}$.

Tính từ trường của một dây điện mỏng dài vô hạn về một phía, tính tại đầu không vô hạn cách dây một khoảng a



Từ hình vẽ: $l = a\cot(\theta)$, lấy vi phân hai vế:

$$\mathrm{d}l = \frac{-a}{\sin^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

ta cũng có được $r = a/\sin(\theta)$. Thế hai kết quả trên vào phương trình định luật Bio-Savart:

$$\Rightarrow \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin(\theta)[-a/\sin^2(\theta)]\mathrm{d}\theta}{[a/\sin(\theta)]^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{-\sin(\theta)\mathrm{d}\theta}{a}$$

Lấy tích phân hai vế (khi l tiến đến vô cực thì θ tiến đến 0):

$$\begin{aligned}\int_0^B \mathrm{d}B &= \int_{\pi/2}^0 \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(-\sin(\theta))\mathrm{d}\theta}{a}\\ \rightarrow B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\end{aligned}$$

V. Chuỗi

1. Cấp số nhân/Chuỗi hình học (geometric series)

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó một số không đổi q. Số q gọi là công bội của cấp số nhân. Các số hạng của dãy số có dạng $u_{n+1} = u_n q$ với $n \in \mathbb{N}$.

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_1 q^k = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \cdots u_1 q^n$$

Để tính tổng này, ta cần nhân hai vế phương trình với q và lấy hiệu giữa kết quả vừa thu được với phương trình đầu. Sau một vài biến đổi, ta rút ra:

$$\sum_{k=0}^{n} u_1 q^k = \frac{u_1(1 - q^{(n+1)})}{1 - q}$$

Để n tiến đến vô cùng, nếu như q<1 thì ta ra được kết quả:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_1 q^k = \frac{u_1}{1 - q}$$

Còn nếu q lớn hơn 1 thì tổng này phân kỳ và tiến đến vô cùng.

Ví dụ: Một quả bóng được tung lên từ sàn nhà. Bóng thực hiện một loạt những cú nảy liên tiếp ở sàn nhà. Giả sử rằng do tính chất đàn hồi nội tại và do có ma sát ở sàn nhà mà sau mỗi lần nảy lên thì có độ lớn của thành phần thẳng đứng của vận tốc lại bị giảm đi bởi một hệ số $\mathcal{E}_y$ và của thành phần nằm ngang của vận tốc bị giảm đi bởi một hệ số $\mathcal{E}_x$, tức là $v_{0y,n+1} = \mathcal{E}_y v_{0y,n}; v_{0x,n+1} = \mathcal{E}_y v_{0x,n} \quad (\mathcal{E}_y, \mathcal{E}_x < 1)$

Gọi l là khoảng cách tổng cộng theo phương ngang mà quả bóng thực hiện được sau một loạt cú nảy và τ là thời gian chuyển động tương ứng. Hãy tìm θ là góc mà vecto vận tốc làm với phương ngang sau lần nảy đầu tiên và được viết theo $l, \tau, \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$. Bỏ qua sức cản không khí

Đáp án: Thời gian giữa hai lần va chạm bất kì: $t_i = t_{i\uparrow} + t_{i\downarrow} = \frac{2v_{iy}}{g}$

Khoảng cách giữa hai lần va chạm tương ứng là: $l_i = v_{ix} t_i = \frac{2v_{ix}v_{iy}}{g}$. Tổng thời gian va chạm τ:

$$\tau = \sum_{i=0}^{\infty} t_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2v_{0y}}{g} \mathcal{E}_y^i$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2v_{0y}}{g}\frac{1}{1-\mathcal{E}_y} \tag{1}$$

Tổng quãng đường l vật đi được:

$$l = \sum_{i=0}^{\infty} l_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}(\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y)^i$$

$$l = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}\frac{1}{1-\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y} \tag{2}$$

Từ (1) $\rightarrow v_{0y} = \frac{g\tau(1-\mathcal{E}_y)}{2}$ (3)
Từ (2) và (3) $\rightarrow v_{0x} = \frac{l(1-\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y)}{4\tau(1-\mathcal{E}_y)}$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{g\tau^2(1-\mathcal{E}_y)^2}{2l(1-\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y)}$$

2. Chuỗi Taylor

Đây là một cách xấp xỉ một hàm tổng quát thành một hàm đa thức. Cách xấp xỉ chuỗi có biểu thức:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

Với $f^{(n)}$ là đạo hàm của $f(x)$ bậc n, và a là giá trị của x mà bạn muốn xấp xỉ. Dưới đây trình bày cách tiếp cận bài toán. Giả sử bạn muốn xấp xỉ đến bậc 2 tại 0:

$$f(x) \approx c_0 + c_1x + c_2x^2$$

Để đa thức này có nét tương đồng với hàm ban đầu, đầu tiên tại điểm xấp xỉ hai phương trình phải bằng nhau, vì bạn đang xấp xỉ tại 0, việc này tức là:

$$f(0) = c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2 \Rightarrow c_0 = f(0)$$

Để thực hiện phép xấp xỉ, giá trị cần lấy xấp xỉ sẽ gần giá trị gốc, vậy nên sự biến thiên từ giá trị gốc đến giá trị xấp xỉ bằng phương trình cần xấp xỉ, tức là đạo hàm của hai phương trình tại điểm gốc bằng nhau:

$$f'(0) = c_1 + 2c_2(0)^2 \Rightarrow c_1 = f'(0)$$

Để hai hàm có nét tương đồng về độ cong, xu hướng biến thiên, hay đồng nghĩa đạo hàm của hàm xấp xỉ và hàm gốc tương đương:

$$\Rightarrow f''(0) = 2c_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{1}{2}f''(0)$$

Vậy cuối cùng ta thu được:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

Bạn có thể tiếp tục lập luận và chứng minh rằng các để xấp xỉ tiến về 0, hay hai hàm tương đương, thì các đạo hàm bậc cao của 2 phương trình sẽ như nhau, từ đó ta sẽ có:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(0)x^3 + \cdots \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Nếu bạn muốn xấp xỉ với một giá trị gần a, ta thay thế cụm $x \mapsto x - a$

$$\Rightarrow f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

Độ chính xác của phép xấp xỉ càng cao khi n tiến tới vô cùng, vậy:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

Tuy nhiên, đối với một số hàm, phép xấp xỉ Taylor là không khả dụng $\ln(x)$ và $\sqrt{x}$. Giả dụ như $ln(1+x)$, dù xấp xỉ đến bao lâu đi chẳng nữa, phương trình xấp xỉ sẽ không bao giờ giống với phương trình quá x=1. Những phương trình liên tục mà không thể được xấp xỉ hoàn toàn bằng chuỗi Taylor được gọi là phương trình không toàn thể (entire function) và có bán kính hội tụ (radius of convergence) mang giá trị khác vô cùng. Những định nghĩa này nằm ngoài khuôn khổ của bài này nên các bạn từ tìm hiểu thêm.

a. Xấp xỉ bậc nhất/xấp xỉ tuyến tính

Xấp xỉ tuyến tính (First order approximation) là phép xấo xỉ mà ta chỉ lấy số hạng có đạo hàm bậc nhất:

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$$

Xét trường hợp x lệch khỏi a một khoảng rất nhỏ h, ta thế $x = a + h$, $h = x - a$ vào phương trình, ta có:

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

Phương trình trên là phương trình của phép xấp xỉ tuyến tính. Với a là một số cho trước, và h là một số rất nhỏ chỉ độ lệch cực nhỏ so với a. Thường dùng để khảo sát khi lệch khoảng cực nhỏ so với vị trí cân bằng.

Tương tự, xấp xỉ bậc 2 là khi ta lấy số hạng có đạo hàm bậc 2, khi biến đổi sẽ ra biểu thức:

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a)$$

Trong các bài toán Vật lý, thường xấp xỉ từ sau bậc 2 nhỏ hơn mức sai số đo được và có thể bỏ qua, người ta thường chỉ cân nhắc sử dụng xấp xỉ bậc 1, hoặc 2 tùy vào bài toán đang xét.

Từ việc xấp xỉ bậc 1 và bậc 2 ta thu được một số công thức gần đúng thường dùng trong Vật lý:

Khi $\theta << 1$:

$$sin(\theta) \approx \theta \quad cos(\theta) \approx 1 + \frac{\theta^2}{2} \quad tan(\theta) \approx \theta$$

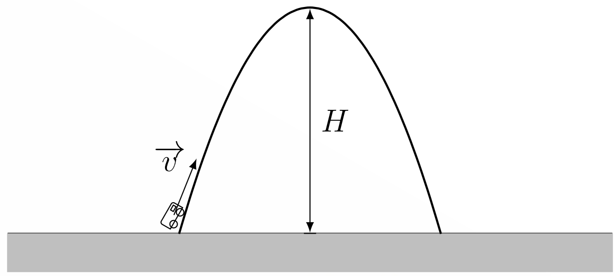
Khi $x << 1$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

VI. Bài tập ví dụ

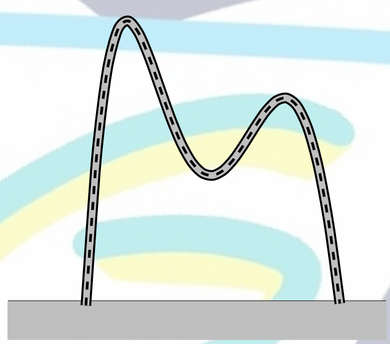
1. Xe vượt địa hình

Một người lái xe vượt địa hình và gặp một ngọn núi lớn có dạng parabol được biểu diễn theo phương trình: $h(x) = 3 - x^2(km)$. Do sự cố, khi vừa đến chân núi thì xe hết xăng, chỉ còn lại vận tốc v. Để vượt qua núi xe phải chạy từ chân đồi (A) đến đỉnh đồi và rơi xuống tại (B) sao cho tại mọi điểm trên quỹ đạo xe luôn tiếp xúc với mặt đất. Vận tốc v để có thể đạt được điều này sẽ nằm trong khoảng từ v_{min} đến v_{max}. Tìm $v_{max} - v_{min}$. Điều kiện lý tưởng bài toán xem như mặt núi nhẵn và không có chướng ngại vật. Cho gia tốc trọng trường $g \approx 10m/s^2$.



2. Dây chuyền không chuyển động

Một ống nhẵn không ma sát đặt trên một mặt phẳng nằm ngang và có hình thù như đồ thị của một phương trình có điểm đầu và điểm cuối ở cùng một độ cao nhưng những phần còn lại thì ở vị trí bất kì (hình vẽ). Bỏ một sợi dây chuyền có khối lượng đều vào trong ống, ống và dây có chiều dài bằng nhau. Hãy chứng minh ống chứa đoạn dây sẽ không di chuyển khi được để tự do.



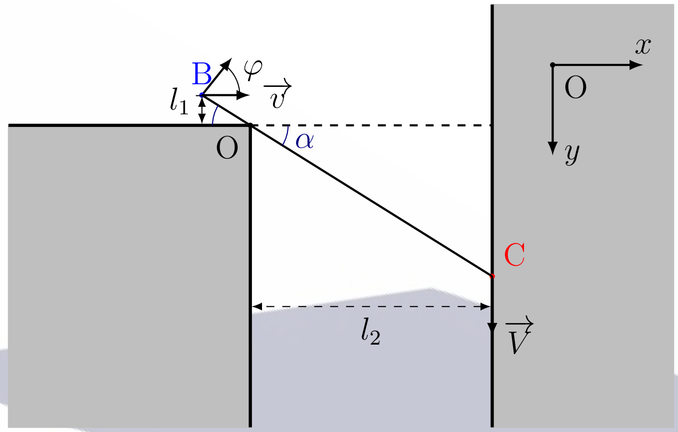
Gợi ý: xét từng phần tử rất nhỏ của đoạn dây.

3. Cậu bé tinh nghịch

Một cậu bé hiếu động cầm đèn pin chạy quanh nhà. Khi tiến đến gần một khúc rẽ vào hành lang (hình vẽ), cậu bật đèn pin và hướng về phía cạnh tường. Cho rằng cậu bé không chạy vào phần hành lang, tìm biểu thức cho vận tốc của rìa vệt sáng trên bức tường đối diện trong 2 trường hợp:

1. Cậu bé chạy song song với tường, cách một khoảng l_1 với vận tốc v không đổi

2. Cậu bé chạy nhanh dần đều cách tường l_0 theo hướng tạo với tường một góc φ không đổi



4. Chú kiến tăng động

Một chú kiến được đặt trên một đường đua dài vô tận, để kích thích chú kiến di chuyển, người làm thí nghiệm cho kiến ăn đường. Sau mỗi lần ăn một cục đường thì kiến chạy được một khoảng thời gian τ, rồi phải dừng lại trong thoáng chốc để nghỉ và lại được tiếp thêm đường (khoảng thời gian nghỉ và ăn không đáng kể). Dưới tác dụng của những cục đường liên tiếp, ta quan sát được một hiện tượng kì lạ với chú kiến, cứ sau mỗi lần ăn đường liền kề thì lần lượt vận tốc và những đạo hàm bậc cao của vận tốc lại không đổi và bằng g, trong khi đó các đạo hàm bậc thấp hơn ngay lúc đó bằng 0. Tức là trong khoảng thời gian đầu tiên vận tốc của chú kiến không đổi, trong khoảng thời gian thứ 2 thì đạo hàm của vận tốc là gia tốc sẽ không đổi, trong khoảng thời gian thứ 3 thì đạo hàm của gia tốc không đổi... Tìm quãng đường mà chú kiến có thể đi được nếu cho chú chạy mãi mãi. Sử dụng chuỗi Taylor, chứng minh rằng quãng đường kiến đi được có dạng $g(e^{\tau} - 1)$.

VII. Đáp án

1. Xe vượt địa hình

Đỉnh của ngọn núi:

$$H = 3\,(km) = 3000(m)$$

Để vượt được ngọn núi thì trước hết xe phải có đủ vận tốc để vừa tới được đỉnh. Có nghĩa là động năng ngay tại đỉnh sẽ nhỏ nhất và bằng 0. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho vị trí chân núi và định núi:

$$\frac{1}{2}mv_{min}^2 = mgH$$

$$\Rightarrow v_{min} = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 3000} = 4\sqrt{10} \approx 244.959(m/s) = 68.041(km/h)$$

Để tìm vận tốc tối đa, ta xét định luật 2 Newton cho vật:

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} = \overrightarrow{F_{ht}}$$

Với $\overrightarrow{F_{ht}}$ là lực hướng tâm. Khi xe vượt khỏi mặt đất $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P} = \overrightarrow{F_{ht}}$$

$$mg\cos(\theta) = \frac{mv^2}{r}$$

r là bán kính cong của quỹ đạo, từ công thức ở trên ta có:

$$r = \frac{(1+h'^2)^{\frac{3}{2}}}{h"}$$

$$h'(x) = 2x, \quad h''(x) = 2$$

$$\Rightarrow r = \frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

từ định luật bảo toàn năng lượng ta cũng có $v^2 = v_0^2 - 2gh$,

$$\Rightarrow mg\cos(\theta) = \frac{2m(v_{max} - 2gh)}{(1+4x^2)^{3/2}}$$

Từ đạo hàm ta cũng có $\tan(\theta) = h'(x) = -2x = -2x/1 \Rightarrow cos(\theta) = 1/\sqrt{1+4x^2}$

$$\Rightarrow \frac{g}{(1+4x^2)^{1/2}} = \frac{2m(v_{max} - 2gh)}{(1+4x^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow g = \frac{2m(v_{max} - 2gh)}{1+4x^2}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{g+4gx^2}{2} + 2gh}$$

Vậy v_{max} nhỏ nhất tại $x = 0$, nên

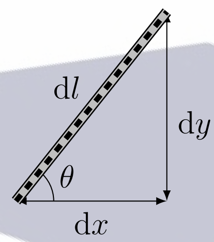
$$v_{max} = \sqrt{\frac{g}{2} + 2g \cdot 3000} = \sqrt{\frac{10}{2} + 20 \cdot 3000} = 244.959\,(m/s) = 68.044\,(km/h)$$

$$\rightarrow v_{max} - v_{min} = 68.044 - 68 - 041 = \boxed{0.003km/h}$$

2. Dây chuyền không chuyển động

Đặt hình dáng của cái ống theo hàm $f(x)$ từ a đến b. Xét một phần tử rất nhỏ của thanh, từ x đến $x + \mathrm{d}x$. Chiều dài của phân tử này là (từ Pytago):

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$$



Vậy khối lượng của của nó là $\mathrm{d}m = \rho\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$, với ρ là khối lượng riêng của dây. Lực giúp kéo thành phần này ra khỏi ống là $-(dP)\sin(\theta) = -g(\mathrm{d}m)f'(x)/\sqrt{1 + f'(x)^2}$, với chiều dương chỉ phương kéo từ a đến b. Tổng hợp lực có tác dụng kéo đoạn dây lên cả đoạn dây lúc này sẽ là:

$$\begin{aligned}
F = \int_a^b \mathrm{d}P\sin(\theta) &= \int_a^b \frac{-gf'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}\mathrm{d}m \\
&= \int_a^b \frac{-gf'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \cdot \rho\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -g\rho\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \\
&= -g\rho(f(a) - f(b)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vì tổng lực kéo ra khỏi thanh bằng 0 nên thanh được giữ nguyên vị trí.

3. Cậu bé tinh nghịch

Chọn hệ quy chiếu gốc tại O, chiều dương x hướng sang phải, chiều dương y hướng xuống (hình vẽ) Ta có phương trình:

$$\tan\alpha = \frac{y(t)}{l_2} = \frac{l_1}{-x(t)} \Rightarrow y(t) = \frac{l_1.l_2}{-x(t)}$$

Đạo hàm 2 vế theo thời gian, thay $x(t) = vt$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -l_1.l_2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)^{-1}\right)\\ V &= -l_1.l_2\,\frac{-1}{x(t)^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ V &= l_1.l_2\,\frac{v}{(vt)^2}\\ V &= \boxed{\frac{l_1.l_2}{vt^2}}\end{aligned}$$

2. Sử dụng cùng hệ quy chiếu ở câu trên, viết được phương trình:

$$\tan\alpha = \frac{y(t)}{l_2} = \frac{-l_1(t)}{-x(t)} \Rightarrow y(t) = \frac{l_2.l_1(t)}{x(t)}$$

Đạo hàm hai vế, thay $\begin{cases} l_1(t) = l_0 - \frac{a\sin\varphi.t^2}{2} \\ x(t) = x_0 + \frac{a\cos\varphi.t^2}{2} \end{cases}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= l_2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(l_1(t).x(t)^{-1}\right)\\ V &= l_2\left(l_1(t).\frac{-1}{x(t)^2}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}t}\cdot x(t)^{-1}\right)\\ V &= \boxed{l_2\left[\frac{-\left(l_0 - \frac{a\sin\varphi.t^2}{2}\right).a\cos\varphi.t}{\left(x_0 + \frac{a\cos\varphi.t^2}{2}\right)^2} - \frac{a\sin\varphi.t}{x_0 + \frac{a\cos\varphi.t^2}{2}}\right]}\end{aligned}$$

4. Chú kiến tăng động

Từ định nghĩa của các đại lượng như vận tốc và gia tốc ta có:

$$\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x = \int_{v_1}^{v_2} v\mathrm{d}t,\quad \int_{v_1}^{v_2}\mathrm{d}v = \int_{a_1}^{a_2} a\mathrm{d}t,\quad \int_{a_1}^{a_2}\mathrm{d}a = \int_{a_1'}^{a_2'} a'\mathrm{d}t,\cdots$$

Xét trong khoảng thời gian đầu tiên, do vận tốc của kiến là hằng số $v = g$. Quãng đường kiến đi được trong thời gian này:

$$\int_0^{S_{1\tau}}\mathrm{d}x = \int_0^{\tau} g\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow S_{1\tau} = g\tau$$

Trong khoảng thời gian tiếp theo, $v' = a = g$ của kiến sẽ là hằng. Để cho đỡ rối loạn trong việc tính toán, ta đặt lại gốc thời gian ngay khi kiến vừa được nốc đường (bạn có thể thử không đổi gốc thời gian, nhưng về cơ bản nó là như nhau). Vận tốc và quãng đường vật đi được

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t g\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow v = gt$$

$$\int_{S_{1\tau}}^{S_2} \mathrm{d}x = \int_0^\tau gt\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow S_{2\tau} - S_{1\tau} = \frac{1}{2}g\tau^2$$

$$\Rightarrow S_{2\tau} = \frac{1}{2}g\tau^2 + g\tau$$

Trong khoảng thời gian thứ 3 thì $v'' = a' = g$ bằng hằng, tiếp tục đổi gốc thời gian ta có:

$$\int_0^a \mathrm{d}a = \int_0^t g\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow a = gt$$

$$\int_0^a \mathrm{d}v = \int_0^t gt\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\int_{S_{2\tau}}^{S_{3\tau}} \mathrm{d}x = \int_0^\tau \frac{1}{2}gt^2\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow S_{3\tau} - S_2 = \frac{1}{2\cdot 3}g\tau^3$$

$$\Rightarrow S_{3\tau} = g\tau + \frac{1}{2}g\tau^2 + \frac{1}{2\cdot 3}g\tau^3$$

Trong khoảng thời gian thứ 4 thì $v''' = a'' = g$, áp dụng tương tự những công thức tích phân ta sẽ ra được

$$a' = gt \quad a = \frac{1}{2}gt^2 \quad v = \frac{1}{2\cdot 3}gt^3 \quad S_{4\tau} = g\tau + \frac{1}{2}g\tau^2 + \frac{1}{2\cdot 3}g\tau^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}g\tau^4$$

$$\Rightarrow S_{4\tau} = \frac{1}{1!}g\tau + \frac{1}{2!}g\tau^2 + \frac{1}{3!}g\tau^3 + \frac{1}{4!}g\tau^4 = \sum_{j=1}^{4} \frac{g\tau^j}{j!}$$

Tương tự đến những khoảng thời gian thứ n thì ta có $v^{(n-1)}(t) = g$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{g\tau^j}{j!}$$

Cho nó chạy mãi mãi thì ta sẽ có:

$$S_{\infty\tau} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g\tau^j}{j!} \qquad (1)$$

Theo công thức chuỗi Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

Thế e^x vào $f(x)$, và xấp xỉ tại 0, ta có (nhớ rằng đạo hàm của e^x cũng bằng e^x):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^0(x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Từ đây ta dễ dàng biến đổi lại phương trình (1) theo dạng:

$$S_{\infty\tau} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g\tau^j}{j!} = g\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} - g = g\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} - 1\right)$$

$$\Rightarrow S_{\infty\tau} = \boxed{g(e^\tau - 1)}$$

Tài liệu

[1] K.F. Riley-M.P.Hobson-S.J.Bence *Mathematical Methods for Physics and Engineering*

[2] Tô Giang *Cơ học 1*

[3] David J.Morin *Introduction to Classical Mechanics*