Tĩnh điện

Ban chuyên môn Vật lý – The Gifted Battlefield

Xuất bản vào Ngày 15 tháng 11 năm 2022

Lời mở đầu

Tương tác điện từ là một trong bốn loại tương tác cơ bản. Chúng xuất hiện rất nhiều trong cuộc sống hằng ngày của chúng ta. Các nguyên tử, phân tử được hình thành nhờ sự liên kết giữa các electron và proton thông qua tương tác điện từ. Các nguyên tử, phân tử liên kết với nhau cũng nhờ tương tác điện từ. Từ đó, vạn vật mới hình thành như ngày hôm nay. Ngoài ra, các lực tác động lên cuộc sống chúng ta như lực ma sát, lực kéo, lực đẩy, ... đều có bản chất là tương tác điện từ. Hiển nhiên một điều, thuật ngữ "điện từ" luôn đi chung với nhau. Tuy nhiên, nếu ta xét trạng thái nghỉ của một điện tích, ta có thể nghiên cứu riêng về tính chất điện. Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ nghiên cứu về tĩnh điện.

I. Điện tích và điện trường

1. Điện tích

Một vật nhiễn điệm hay tích điện được gọi là điện tích.

Điện tích bao gồm hai loại: điện tích **dương** và điện tích **âm**. Hai ví dụ phổ biến là proton mang điện tích dương và electron mang điện tích âm.

Một vật nhiễm điện có kích thước rất bé so với phạm vi tác dụng được gọi là điện tích điểm.

Điện tích thử là một điện tích điểm được tích điện dương và được dùng để kiểm tra sự tồn tại của điện trường.

Điện tích thường kí hiệu bằng chữ **q** (hoặc **Q**), có đơn vị đó là **C** (Coulomb).

2. Thuyết electron

2.1 Về các hạt sơ cấp electron, proton và neutron

Proton là một hạt sơ cấp, cơ bản có: $\begin{cases} \text{Khối lượng hạt: } m_p = 1,6726.10^{-27}\ kg \\ \text{Điện tích } q = e = 1,6.10^{-19}\ C \end{cases}$

Neutron là một hạt sơ cấp, cơ bản có: $\begin{cases} \text{Khối lượng hạt: } m_n \approx m_p = 1,6726.10^{-27}\ kg \\ \text{Điện tích } q = 0\ C \end{cases}$

Electron là một hạt sơ cấp, cơ bản có: $\begin{cases} \text{Khối lượng hạt: } m_e = 9,1.10^{-31}\ kg \\ \text{Điện tích } q = -e = -1,6.10^{-19}\ C \end{cases}$

Với $e = 1,6.10^{-19}\ C$ là điện tích nguyên tố.
Electron có thể tồn tại dưới hai dạng là electron liên kết hoặc electron tự do.

2..1 Nguyên tử

Theo thuyết electron, nguyên tử bao gồm một hạt nhân trung tâm mang điện tích dương (gồm các proton và neutron) và các electron chuyển động xung quanh hạt nhân đó tạo thành vỏ ngoài.

$\begin{cases} \text{Hạt nhân có điện tích: } q_n = +Ze \\ \text{Lớp vỏ ngoài có điện tích: } q_v = -Ze \end{cases}$

Khi nguyên tử trung hòa về điện, $q_n + q_v = 0$.
Khi nguyên tử tích điện dương và trở thành ion dương hay cation, $q_n + q_v > 0$.
Khi nguyên tử tích điện âm và trở thành ion âm hay anion, $q_n + q_v < 0$.

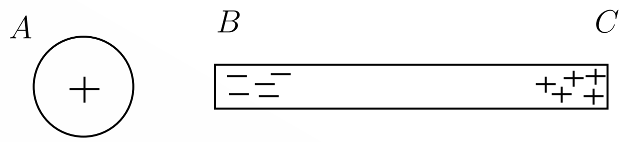
3. Vật dẫn điện và vật cách điện

Vật dẫn điện là vật có nhiều hạt mang điện tích tự do, dòng điện dễ dàng chạy qua vật.

Vật cách điện là vật không có (rất ít) hạt mang điện tích tự do, dòng điện không qua được vật.

4. Sự nhiễm điện của các vật

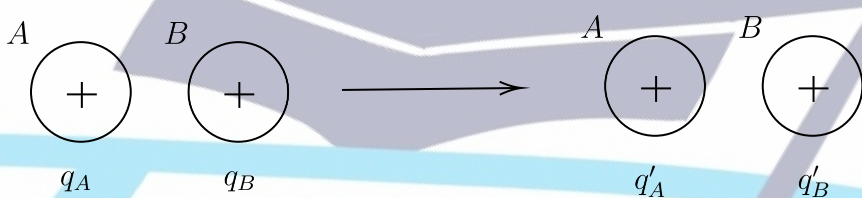
Có 3 cách để làm nhiễm điện 1 vật
⇒ Nhiễm điện do tiếp xúc.
⇒ Nhiễm điện do cọ xát.
⇒ Nhiễm điện do hưởng ứng.



5. Định luật bảo toàn điện tích

Định luật bảo toàn điện tích nói rằng: Tổng đại số điện tích của một hệ cô lập về điện luôn bảo toàn.

Giả sử đặt hai quả cầu A và B tích điện lần lượt q_A và q_B trong một hộp đựng cô lập với môi trường xung quanh. Sau một khoảng thời gian, quả cầu A sẽ tích điện q'_A và quả cầu B sẽ tích điện q'_B. Khi này, tổng đại số điện tích của hai quả cầu sẽ không đổi.



$$q_A + q_B = q'_A + q'_B = const$$

Kết luận: $\sum_{i=1}^{n} q_i = const$ khi hệ cô lập về điện.

6. Định luật Coulomb

Định luật Coulomb (hay Định luật về lực của các hạt tích điện đứng yên) đã được Charles Augustin Coulomb xác định và năm 1784. Ông đã sử dụng một cái cân xoắn mang tên ông do ông tự phát minh để tiến hành thí nghiệm đo sự phụ thuộc của lực tương tác giữa hai điện tích vào độ lớn của điện tích và khoảng cách giữa chúng. Về cách xây dựng thí nghiệm, các bạn có thể xem tại đây: `https://www.youtube.com/watch?v=FYSTGX-F1GM`

Định luật Coulomb phát biểu rằng: lực tương tác giữa hai điện tích điểm có phương nằm trên một đường thẳng nối hai điện tích điểm, có chiều là chiều của lực hút nếu hai điện tích điểm khác dấu và đẩy nếu hai điện tích điểm cùng dấu, có độ lớn tỉ lệ thuận với tích các điện tích và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng.

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}} = \frac{kq_1q_2}{\epsilon r_{12}^2}\overrightarrow{e_{12}}$$

$$\text{Với} \begin{cases} \text{k là hệ số tỉ lệ: } k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2} \\ \overrightarrow{e_{12}} = \dfrac{\overrightarrow{r_{12}}}{r_{12}} \\ \epsilon_0 \text{ gọi là độ điện thẩm chân không} \\ \epsilon \text{ gọi là hằng số điện môi} \end{cases}$$

*Lưu ý: trong chân không, $\epsilon = 1$. Còn trong các môi trường khác, $\epsilon \geq 1$

7. Điện trường

Điện trường là một môi trường vật chất đặc biệt, luôn tồn tại xung quanh điện tích, có tác dụng điện lên các vật nhiễm điện đặt trong nó.

7..1 Cường độ điện trường $\overrightarrow{E}$

Cường độ điện trường $\overrightarrow{E}$ tại 1 điểm là đại đượng đặc trưng cho điện trường về phương diện tác dụng lực, được xác định bằng lực điện tác dụng lên 1 đơn vị điện tích tại đó.

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{q}$$

Mặc dù đơn vị của $\overrightarrow{F}$ là N và của q là C, đơn vị của $\overrightarrow{E}$ là $\dfrac{V}{m}\left(\dfrac{\text{Volt}}{\text{meter}}\right)$. Điều này sẽ được lý giải ở phần sau khi chúng ta tìm ra mối quan hệ giữa điện trường và điện thế.

Từ công thức $\overrightarrow{E} = \dfrac{\overrightarrow{F}}{q}$, ta có: $\begin{cases} q > 0 \Rightarrow \overrightarrow{F} \text{ cùng chiều với } \overrightarrow{E} \\ q < 0 \Rightarrow \overrightarrow{F} \text{ ngược chiều với } \overrightarrow{E} \end{cases}$

7..2 Cường độ điện trường $\overrightarrow{E}$ do 1 điện tích điểm Q gây ra tại 1 điểm xác định có tọa độ là $\overrightarrow{r}$

$$\overrightarrow{F} = \frac{kQq}{\epsilon r^2}\overrightarrow{e_r}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{q} = \frac{\frac{kQq}{\epsilon r^2}\overrightarrow{e_r}}{q}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{E} = \frac{kQ}{\epsilon r^2}\overrightarrow{e_r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

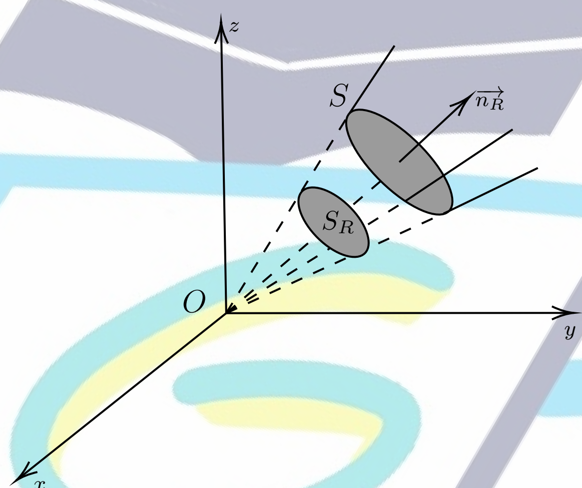
7..3 Nguyên lý chồng chất điện trường

Giả sử các điện tích $q_1, q_2, q_3, ..., q_n$ gây ra tai 1 điểm M lần lượt các $\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3}, ..., \overrightarrow{E_n}$. Cường độ điện trường tổng hợp tại M là $\overrightarrow{E}$ được xác định như sau:

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_3} + \overrightarrow{E_4} + ... + \overrightarrow{E_n} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{E_i}$$

II. Điện thông và định lý OG

1. Góc khối



Hình 1

Xét một mặt S mà ta quan sát từ một điểm O. Để khái quát hóa tiếp cận ở trên cho ba chiều, ta vẽ trên một mặt cầu bán kính R, phần S_R của mặt cầu này, nhìn trong cùng phần không gian với mặt S (Hình 1)

Góc khối Ω được xác định độc lập với giá trị của R bởi:

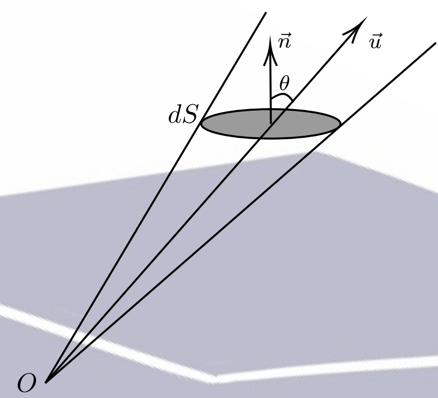
$$\Omega = \frac{S_R}{R^2}$$

Người ta thường dùng đơn vị steradian (kí hiệu là: sr) để đo góc khối.

Khi định hướng mặt cầu bằng một pháp tuyến đi ra $\overrightarrow{n_R}$ như được chỉ rõ trên hình 1, góc khối dưới đó ta nhìn thấy một mặt S đã được định hướng, có một ý nghĩa đại số. Như vậy Ω là dương, sự định hướng của S đã được chỉ rõ bởi sự lựa chọn của vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_R}$ tại một trong các điểm của S

Khi xét trong hệ tọa độ cầu góc khối sẽ có biểu thức là:

$$d\Omega = sin\theta d\theta d\varphi$$



Hình 2

Vậy khi xét một diện tích dS bất kì trong không gian có vecto pháp tuyến hợp với hợp với vecto xuyên tâm một góc θ cách điểm O một đoạn R (Hình 2) , góc khối nhìn thấy dS từ điểm O là:

$$d\Omega = \frac{dS_R}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow d\Omega = \frac{dS \cdot cos\theta}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow d\Omega = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} dS}{R^2}$$

2. Điện thông

Xét 1 điện tích điểm q đặt cố định tại O. Điện trường của điện tích đó gây ra tại một điểm cách O một khoảng r là:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Vậy điện thông của nó qua phần tử diện tích dS là:

$$d\Phi = \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{n} dS}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Khi tính toán thông lượng của một trường vecto qua một mặt kính S, giới hạn bởi thể tích V, ta quy ước tại mỗi điểm định hướng pháp tuyến $\vec{n}$ với mặt ra phía ngoài.

Đối với một mặt kín chứa diện tích q, điện thông qua mặt đó là:

$$\Phi = \oint_S \overrightarrow{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Đối với mặt kín không chứa điện tích thì điện thông qua một mặt kín S không chưa điện tích đó là

$$\Phi = 0$$

Khi không có điện tích thì điện thông được bảo toàn

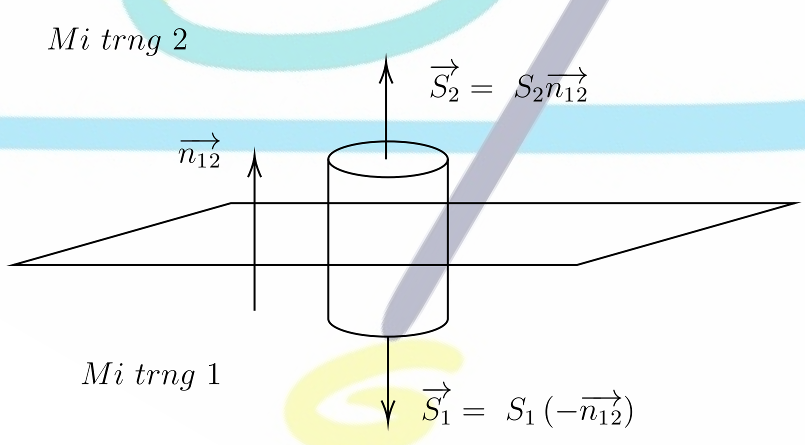
3. Định lí OG

Điện thông của một phân bố điện tích gửi qua một mặt kín S bằng điện tích của phân đó nằm bên trong S chia cho ϵ_0

$$\Phi = \oint_S \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS} = \frac{Q_in}{\epsilon_0}$$

4. Tính gián đoạn của trường

Xét một mặt mang điện ngăn cách giữa 2 môi trường (1) và (2), chọn mặt Gauss là hình trụ với diện tích đáy là S và chiều cao là 2h (với $h^2 << S$)



Áp dụng định lí OG:

Do tính đối xứng nên điện thông qua các mặt xung quanh của hình trụ bị triệt tiêu

$$\Phi = \overrightarrow{E_1} \cdot \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{E_2} \cdot \overrightarrow{S_2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S$$

$$\Leftrightarrow \Phi = \vec{E_1} \cdot (-\overrightarrow{n_{12}}) S + \overrightarrow{E_2} \cdot \overrightarrow{n_{12}} S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S$$

$$\Leftrightarrow \Phi = \vec{E_1} - \overrightarrow{E_2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \overrightarrow{n_{12}}$$

Vậy khi đi qua một mặt tích điện, trường tĩnh điện chịu một sự gián đoạn ở thành phần pháp tuyến tại mặt đi qua:

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \overrightarrow{n_{12}}$$

III. Điện thế và hiệu điện thế

1. Điện thế

Vì tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi, ta có thể đặt:

$$V(r) = -\int_O^r \vec{E} \vec{dl}$$

Với O là một điểm làm chuẩn đã được quy ước. Vì vậy, hàm V chỉ phụ thuộc vào cận trên r, có tên gọi là điện thế. Hiệu điện thế giữa 2 điểm a và b bất kì là:

$$V(b) - V(a) = -\int_O^b \vec{E} \vec{dl} - \int_a^O \vec{E} \vec{dl} = -\int_a^b \vec{E} \vec{dl}$$

Theo fundamental theorem of gradient:

$$\int_a^b \nabla V \vec{dl} = V(b) - V(a)$$

Vậy:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Hay nói cách khác:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e_r}$$

Nếu cường độ điện trường đặc trưng cho mặt tác dụng lực của điện trường thì điện thế đặc trưng cho điện trường về mặt năng lượng.

2. Phương trình Poisson và phương trình Laplace:

Theo chứng minh trên:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Theo phương trình Maxwell, ta cũng thừa nhận:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Vậy

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Đây được biết đến là phương trình Poisson, trong vùng không có điện tích, $\rho = 0$ phương trình trở thành:

$$\nabla^2 V = 0$$

Hay còn gọi là phương trình Laplace

3. Điện thế do một điện tích điểm gây ra tại một điểm

$$V(r) = -\int_O^r \vec{E}\vec{dl} = -\int_O^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{e_r}\cdot\vec{dl}}{r^2}$$

Theo quy ước, điểm O được chọn ở vô cực để điện thế tại nó bằng 0, vậy:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r}$$

Theo nguyên lí chồng chất điện trường:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

Điện thế tại một điểm bất kì:

$$\int_O^r \vec{E} = \int_O^{r_i} \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

Vậy, điện thế tại một điểm bằng tổng điện thế do các điện tích riêng lẻ gây nên tại điểm đó.

$$V(r) = \sum_{i=1}^{n} V_i(r)$$

4. Lưu số của điện trường

Giả sử có một đường cong nối 2 điểm A và B, lưu số của điện trường $\vec{E}$ sẽ được tính bằng:

$$C = \int_a^b \vec{E} d\vec{s}$$

Với $\vec{ds}$ là vector dọc theo đường cong AB.

5. Tính liên tục của điện trường

Không như thành phần pháp tuyến với mặt phẳng, thành phần tiếp tuyến luôn liên tục, điều này có nghĩa là thành phần tiếp tuyến của mặt phẳng dù nằm trên hay nằm dưới cũng sẽ bằng nhau. Giả sử có một mặt phẳng tích điện σ, chọn mặt Gauss là một hình chữ nhật mỏng thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng σ, vì hình chữ nhật là một mặt phẳng:

$$\vec{E}^{//}_{above} - \vec{E}^{//}_{below} = 0$$

Vậy:

$$\vec{E}^{//}_{above} = \vec{E}^{//}_{below}$$

Nếu ta kết hợp phương trình vừa tìm được với phương trình ở phần tính gián đoạn của điện trường, ta sẽ có:

$$\vec{E}_{above} - \vec{E}_{below} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}$$

Mà $\vec{E} = -\nabla V$, nên ta có:

$$\nabla V_{above} - \nabla V_{below} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}$$

Hay nói cách khác:

$$\frac{\partial V_{above}}{\partial n} - \frac{\partial V_{below}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Với n là sự thay đổi theo hướng pháp tuyến của mặt phẳng

IV. Thế năng tĩnh điện

1. Thế năng của một hạt trong một trường tĩnh điện

Như ta đã biết, thế năng của một vật tại một điểm nằm trong một trường bất kì được tính bằng cách tính công để dời vật từ điểm đó về gốc thế năng, vậy thế năng tĩnh điện được tính bằng:

$$W(r) = q\int_r^\infty \vec{E}\vec{dl} = qV(r)$$

2. Năng lượng của một hệ điện tích

Giả sử trong không gian có một điện tích điểm cố định q_1, công cần thiết để dời một điện tích điểm q_2 cách q_1 một khoảng r_12 là:

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_2\frac{q_1}{r_{12}}$$

Tương tự, khi ta đưa một điện tích điểm q_3 vào hệ, công cần thiết để thiết lập là:

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_3(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}})$$

Vậy, tổng công cần để thiết lập hệ điện tích này là:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}})$$

Bằng cách tương tự, ta có thể tìm công thiết lập một hệ gồm n điện tích:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\frac{q_iq_j}{r_ij}$$

Điều kiện $i > j$ được đặt ra là để công thiết lập của cùng một điện tích không bị tính 2 lần, ta có thể một cách cố ý tính công thiết lập 2 lần rồi chia cho 2, vậy công thức sẽ trở thành:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{q_iq_j}{r_ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\sum_{j\neq i}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{r_ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iV_i$$

Nếu hệ điện tích phân bố một cách liên tục, năng lượng điện trường có thể viết lại là:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau$$

V. Bài tập

Bài toán 1.

Xác định điện trường gây ra tại một vòng dây mảnh, bán kính R, tích điện đều với điện tích q, tại một điểm M nằm trên trục và cách O một đoạn h.

a/ Xét trường hợp: M nằm tại O và M nằm ở rất xa vòng dây.

b/ Giả sử, người ta cắt dây đi một đoạn $l << R$ sao cho sự phân bố điện tích không thay đổi. Xác định cường độ điện trường tại tâm O khi đó.

Bài toán 2.

Xét hình vuông ABCD cạnh $a\sqrt{2}$ có tâm O. Tại mỗi đỉnh của hình vuông đặt một điện tích điểm q. Chọn hệ tọa độ Oxy đặt ở tâm O.

a/ Xác định điện thế tại một điểm MM có tọa độ (x;y), (x,y«a) từ đó suy ra điện trường tổng hợp điểm đó.

b/ Chứng minh rằng, O là điểm cân bằng bền của một điện tích thử nằm trong mặt phẳng hình vuông.

Bài toán 3.

Chứng minh rằng, năng lượng điện trường trong không gian có thể tính bằng công thức:

$$W = \int \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau$$

Từ đó hãy tính năng lượng điện trường của một quả cầu có mật độ điện tích ρ và bán kính R bằng 2 cách.

Bài toán 4.

Xác định điện thế tại tâm của một quả cầu tích điện đều ρ bán kính R.

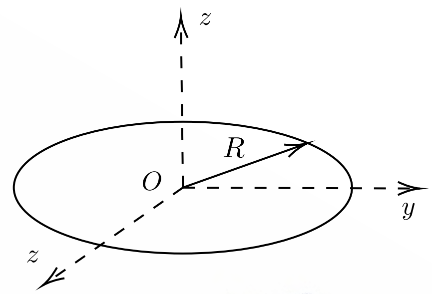
Bài toán 5.

Xét một bản mỏng có dạng hình vuông cạnh a và có mật độ điện tích mặt là σ. Xác định cường độ điện trường tại điểm M nằm trên trục đi qua tâm và vuông góc với bản. Biết M cách tâm bản một khoảng là $\frac{a}{2}$

Bài toán 6.

Một vòng nhẫn mảnh có dạng vòng tròn bán kính R được tích điện +Q (Q > 0) đều theo chu vi của vòng, đặt vòng sao cho mặt phẳng vòng nằm trên mặt phẳng Oxy. Cho biết xấp xỉ Taylor bậc 2 có dạng:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2$$



Ta sẽ đi nghiên cứu chuyển động của hạt electron có điện tích -e (e $>$ 0) theo 2 thành phần là phương z và phương bán kính r.

1. Theo phương z:
   (a) Hãy tính điện thế V_z trên trục z theo độ cao z đối với tâm O
   (b) Tại vị trí z«R, hãy chứng minh rằng hạt elcetron sẽ dao động quanh gốc O theo trục z và hãy tìm chu kì dao động T_z của chuyển động
2. theo phương r:
   (a) Chứng minh rằng điện thế tại diểm nằm trên mặt phẳng cách tâm O một khoảng r«R có dạng:
   $$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(1 + \alpha\frac{r^2}{R^2}\right)$$
   Hãy tìm hệ số α
   (b) Hãy chứng minh nếu hạt thử là proton thì hạt sẽ dao động quanh gốc O trên mặt phẳng xy và hãy tìm chu kì dao động T_rcủa chuyển động

Bài toán 7.

Áp dụng định lí OG để tính phân bố điện trường của:

1. Mặt phẳng rộng vô hạn tích điện đều có mật độ điện tích mặt là σ
2. Sợi dây dài đồng chất tích điện đều có mật độ điện tích dài là λ
3. Quả cầu cầu đặc đồng chất bán kính R tích điện đều có mật độ điện tích khối là ρ

Bài toán 8.

Quả cầu kim loại tích điện có bán kính R đuoẹc chia thành 2 phần bởi một mặt phẳng với khoảng cách h tính từ tâm của quả cầu (h $<$ R) và tổng điện lượng của quả cầu là Q. Tìm lực đẩy giữa 2 phần này.

VI. Hướng dẫn giải

Bài toán 1.

Do tính đối xứng của vòng dây, vector cường độ điện trường có phương nằm trong mặt phẳng song song với vòng dây bị triệt tiêu. Xét một phần tử dây có chiều dài dl, thành phần thẳng đứng của cường độ điện trường do phần tử dây đó gây ra tại M là:

$$d\vec{E}_z = k\frac{dqR^2 + h^2}{c}os\alpha\vec{e_z} = k\frac{\lambda dlh}{(R^2+h^2)^{3/2}}\vec{e_z}$$

Vậy, vector cường độ điện trường tổng hợp tại M là:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}_z = \int_0^{2\pi R} k\frac{\lambda dlh}{(R^2+h^2)^{3/2}}\vec{e_z} = k\frac{qh}{(R^2+h^2)^{3/2}}\vec{e_z}$$

Tại tâm vòng dây:

$$\vec{E} = \vec{0}$$

Dễ thấy do tính đối xứng của vòng. Tại một điểm ở rất xa:

$$\vec{E} = \frac{kq}{h^2}\vec{e_z}$$

Điều này dễ thấy vì khi xét với một khoảng cách rất lớn, có thể coi vòng là một điện tích điểm b/ Khi chưa bị cắt, cường độ điện trường do phần bị cắt và phần còn lại tổng hợp với nhau sẽ gây ra cường độ điện trường tổng hợp tại O:

$$\vec{E_1} + \vec{E_2} = \vec{0}$$

Vậy, khi bỏ phần có chiều dài l ra, chỉ còn điện trường $\vec{E_2}$ của phần còn lại gây nên:

$$\vec{E_2} = -\vec{E_1}$$

Vì $l << R$ nên có thể coi phần bị cắt ra như một điện tích điểm

$$\vec{E_2} = -k\frac{ql}{2\pi R^3}\vec{e_{r1O}}$$

Vậy, điện trường tại tâm O có hướng về phía phần bị cắt.

Bài toán 2. Điện do hệ điện tích gây ra tại M là:

$$V(M) = kq(\frac{1}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+(a-x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+(a+x)^2}})$$

Xét: $K = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}$ Biến đổi biểu thức K thành:

$$K = \frac{1}{a}(1+\frac{x^2+y^2-2ya}{a^2})^{-1/2}$$

Sử dụng khai triển Taylor lấy tới bậc 2:

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x$$

Biểu thức trở thành:

$$\frac{1}{a}[1-\frac{1}{2a^2}(x^2-2ya)+\frac{y^2}{a^2}]$$

Tương tự với các số hạng còn lại, ta thu được:

$$\frac{kq}{a}(4+\frac{x^2+y^2}{a})$$

Lại có:

$$\vec{E} = -$$

Vậy, cường độ điện trường tại M là:

$$\vec{E} = -kq(2\frac{x}{a^3}\vec{e_x}+2\frac{y}{a^3}\vec{e_y})$$

b/ Áp dụng định luật II Newton:

$$\vec{F_C} = m\vec{a}$$

Chiếu lên phương của điện trường:

$$-2kqQ\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a^3} = m\ddot{r}$$

Mà $x^2+y^2 = r^2$

Vậy:

$$-2kqQ\frac{r}{a^3} = m\ddot{r}$$

Đây chính là phương trình vi phân của vật đang dao động điều hoà quanh O, vậy O là vì trí cân bằng bền.

Bài toán 3.

Với một hệ điện tích phân bố liên tục ta có: $W = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau$ Định luật Gauss dưới dạng vi phân cho ta:

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E}$$

Vậy, năng lượng của hệ có thể được viết lại thành:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int (\nabla \cdot \vec{E}) V d\tau$$

Sử dụng tích phân từng phần:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}[-\int \vec{E}\nabla V + \oint V\vec{E}d\vec{a}]$$

Mà: $\vec{E} = \nabla V$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}[-\int \vec{E}^2 d\tau + \oint V\vec{E}d\vec{a}]$$

Biểu thức này có thể biến đổi thành tích phân của số hạng thứ nhất nhưng mở rộng cho toàn không gian.

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{allspace} E^2 d\tau$$

Có thể tính bằng 2 cách:
Tích phân năng lượng điện trường toàn không gian
Tính công thiết lập hệ điện tích

Bài toán 4.
Chọn mặt Gauss là một mặt cầu bán kính (r>R), định luật Gauss:

$$E4\pi r^2 = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

Vậy

$$E = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

Điện thế tại mặt quả cầu là:

$$V(R) = \int_R^{+\inf} = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\epsilon_0}R^2$$

Tương tự, với điện trường nằm trong quả cầu:

$$E = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\epsilon_0}r$$

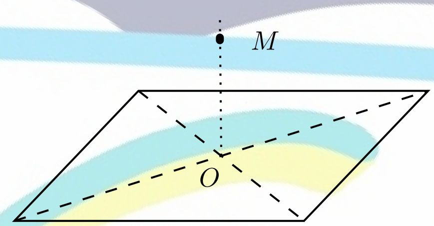
Hiệu điện thế tại tâm và vỏ quả cầu:

$$V(R) - V(0) = \frac{1}{6}\frac{\rho}{\epsilon_0}R^2$$

Vậy, điện thế tại tâm là:

$$V(0) = \frac{1}{6}\frac{\rho}{\epsilon_0}R^2$$

Bài toán 5.



Điện trường do 1 điện tích điểm dq gây ra là:

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{dE} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}d\Omega\overrightarrow{e_r}$$

Với bài này, ta thấy hình chóp đỉnh M có đáy là tấm bản là $\frac{1}{6}$ của 1 hình lập phương cạnh a.Vậy góc khối nhìn tấm bản sẽ là $\Omega = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ Điện trường tại M là:

$$\overrightarrow{E_M} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi}{3}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

Bài toán 6.

1. a.Điện thế do 1 phần tử điện tích dq tại một điểm trên trục z là:

$$dV_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\Leftrightarrow V_z = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\Leftrightarrow V_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

b.Năng lương của electron khi có li độ z (với z«R) là:

$$E = \frac{1}{2}m_e(\dot{z})^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qe}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

Xét:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2}}} \approx \frac{1}{R}\left(1-\frac{z^2}{2R^2}\right)$$

Vậy:

$$E \approx \frac{1}{2}m_e(\dot{z})^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qe}{R}\left(1-\frac{z^2}{2R^2}\right)$$

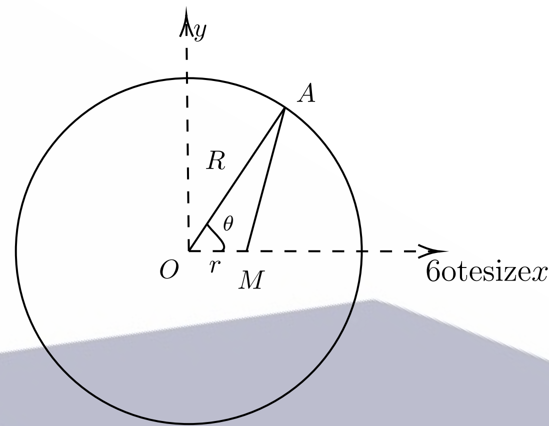
Đạo hàm hai vế theo thời gian biểu thức trên ta được:

$$0 = \ddot{z} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qe}{m_eR^3}z$$

Vậy chu kì dao động của electron là:

$$T_z = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}{Qe}}$$

2. a.



Áp dụng định lí hàm cos:

$$AM^2 = r^2 + R^2 - 2Rrcos\theta$$

Điện thế do một điện tích $dq = \dfrac{Q}{2\pi}\theta$ trên vòng gây ra tại M là:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\pi R}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\dfrac{r^2}{R^2}-2\dfrac{r}{R}cos\theta}}$$

Áp dụng khai triển Taylor:

$$dV \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\pi R}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{R^2}-\frac{2r}{R}cos\theta\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{r^2}{R^2}-\frac{2r}{R}cos\theta\right)^2\right]d\theta$$

$$\Leftrightarrow dV \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\pi R}\left[1+\frac{r}{R}cos\theta+\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{3}{2}(cos\theta)^2-\frac{1}{2}\right)\right]d\theta$$

Vậy điện thế do cả vòng gây ra tại M là:

$$V = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\pi R}\left[1+\frac{r}{R}cos\theta+\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{3}{2}(cos\theta)^2-\frac{1}{2}\right)\right]d\theta$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\left(1+\frac{1}{4}\frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

b. Năng lượng của hệ là:

$$E = \frac{1}{2}m_p(\dot{r})^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qe}{R}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{r^2}{R^2}\right)$$

Đạo hàm 2 vế theo thời gian ta được:

$$0 = \ddot{r} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Qe}{m_pR^3}r$$

Vậy chu kì dao động của proton là:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0 m_p R^3}{Qe}}$$

Bài toán 7.

1. Do mặt phẳng rộng vô hạn, nên điện trường có hướng pháp tuyến với mặt phẳng. Chọn mặt Gauss là một hình trụ tiết diện S, chiều cao h, bị cắt ngang bởi mặt phẳng. Định luật Gauss:

$$E(2S) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Vậy: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

2. Chọn mặt Gauss hình trụ bán kính R chiều dài l đồng trục với dây dẫn, do dây rất dài, vector cường độ điện trường có hướng bán kính của hình trụ. Định luật Gauss:

$$E(2\pi Rh = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Vậy: $E = \frac{\lambda}{2\pi R\epsilon_0}$

3. Do tính đối xứng của hình cầu, cường độ điện trường E tại mọi điểm có phương bán kính. Chọn mặt Gauss là hình cầu bán kính r. Trường hợp r<R: Định luật Gauss:

$$E_{in}4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

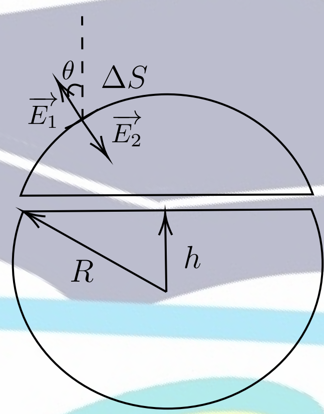
Vậy: $E_{in} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ Trường hợp r>R:

Định luật Gauss:

$$E_{out} 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0}$$

Vậy: $E_{out} = \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$

Bài toán 8.



Do là quả cầu kim loại nên điện tích chỉ phân bố trên bề mặt quả cầu và điện trường bên trên quả cầu bằng 0.

Xét một phần diện tích ΔS trên chỏm cầu. Điện trường do phần diện tích đó gây ra tại điểm sát mặt cầu có độ lớn là:

Áp dụng định lí OG, ta sẽ được:

$$|\overrightarrow{E_1}| = |\overrightarrow{E_2}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Với σ là mật độ điện tích mặt trên bề mặt quả cầu.

Vậy điện trường do phần còn lại của quả cầu là:

$$\overrightarrow{E_2}' + \overrightarrow{E_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{E_2}' = -\overrightarrow{E_2}$$

Lực tác dụng lên phần ΔS là:

$$\Delta F = \Delta q|\overrightarrow{E_2}'| = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\Delta S$$

Do tính đối xứng nên tổng lực tác dụng lên chỏm cầu trên phương ngang bằng 0. Vậy lực tác dụng lên chỏm cầu là:

$$F = F_y = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\sum \Delta S cos\theta$$

$$\Rightarrow F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\pi(R^2 - h^2) = \frac{Q^2(R^2 - h^2)}{32\epsilon_0 \pi R^4}$$

Tài liệu

[1] David J. Griffiths *Introduction to Electrodynamics*

[2] Nguyễn Chí Trung *Tuyển tập các chuyên đề Vật lý, Gặp gỡ Toán học - Vật lý 2021*