

Thời gian: 150 phút

Bài 1: (2 điểm) Cho a, b là 2 số thực thỏa:

$$ab + \sqrt{ab + 1} + \sqrt{a^2 + b} \cdot \sqrt{b^2 + a} = 0$$

a) Chứng minh rằng: $(a\sqrt{b^2 + a} + b\sqrt{a^2 + b})^2 = 1$

b) Chứng minh rằng: $a\sqrt{b^2 + a} + b\sqrt{a^2 + b} = 1$

Bài 2: (1,5 điểm) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình:

a) $2^y = 1 + x + x^2 + x^3$

b) $2^x + 2^y + 2^z = 2^n$ (n là số tự nhiên cho trước, $n \geq 2$)

Bài 3: (1,5 điểm) Cho 3 số thực dương a, b, c bất kì thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{1}{3-ac} + \frac{1}{3-ab} + \frac{1}{3-bc} \leq \frac{3}{2}.$$

Bài 4: (3,5 điểm) Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và có I là tâm đường tròn nội tiếp. Tia AI, BI, CI lần lượt cắt (O) tại điểm thứ 2 là X, Y, Z . Biết (w) là đường tròn ngoại tiếp ΔBIC cắt AC, AB tại E và F .

a) Chứng minh rằng X là tâm đường tròn (w) .

b) Cho YZ cắt BC tại K, KI cắt (w) tại S . Chứng minh rằng E, S, Z thẳng hàng và F, S, Y thẳng hàng.

c) Gọi (L) là đường tròn đi qua hai điểm A, S và tiếp xúc (w) tại S . (L) cắt AB, AC tại M, N . Gọi P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMN . Cho (BSM) cắt BC tại điểm thứ hai là Q . Chứng minh rằng 4 điểm C, N, S, Q đồng viên và 4 điểm M, N, P, Q đồng viên.

d) Chứng minh rằng BC tiếp xúc (MPN) .

Chú thích: Kí hiệu (XYZ) là kí hiệu đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ .

Bài 5: (1,5 điểm) Vòng bảng World Cup có 32 đội chia thành 8 bảng, mỗi bảng 4 đội thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kì cùng bảng gặp nhau đúng 1 lần), đội thắng 3 điểm, đội hoà 1 điểm, đội thua 0 điểm. Chứng minh rằng nếu không có đội nào thua ba trận thì có ít nhất 5 đội có cùng điểm.