DỰ ÁN THE GIFTED BATTLEFIELD | **LỜI GIẢI THI THỬ TS CHUYÊN ĐỢT 2**
BAN CHUYÊN MÔN SINH HỌC | **MÔN: TOÁN HỌC**

Bài 1: (2 điểm) Cho a, b là 2 số thực thỏa:

$$ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\,.\sqrt{b^2+a} = 0$$

a) Chứng minh rằng: $\left(a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}\right)^2 = 1$

b) Chứng minh rằng: $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} = 1$

Lời giải:

a) ĐKXĐ: $ab \geq -1, a^2 \geq -b, b^2 \geq -a$.

Phương trình đầu bài tương đương:

$$ab + \sqrt{a^2+b}\,.\sqrt{b^2+a} = -\sqrt{ab+1}$$

$$\Rightarrow \left(ab + \sqrt{a^2+b}\,.\sqrt{b^2+a}\right)^2 = ab+1$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + 2ab.\sqrt{a^2+b}\,.\sqrt{b^2+a} + (a^2+b)(b^2+a) = ab+1$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + 2ab.\sqrt{a^2+b}\,.\sqrt{b^2+a} + a^2b^2 + a^3 + b^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2(b^2+a) + 2\left(a\sqrt{b^2+a}\right)\left(b\sqrt{a^2+b}\right) + b^2(a^2+b) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}\right)^2 = 1 \quad \text{(đpcm) (1)}$$

b) Ta có: $ab = -\sqrt{ab+1} - \sqrt{a^2+b}\,.\sqrt{b^2+a}$

Suy ra $ab \leq 0$

Vậy a, b có 1 số không âm và 1 số không dương, không mất tính tổng quát giả sử $a \geq 0 \geq b$

Đặt $c = -b \Rightarrow c \geq 0$

Do giả thiết ở câu a, nên để chứng minh $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} = 1$, ta chỉ cần chứng minh $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} \geq 0$, hay $a\sqrt{c^2+a} - c\sqrt{a^2-c} \geq 0$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{c^2+a} \geq c\sqrt{a^2-c}$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 + a^3 \geq a^2c^2 - c^3 \text{ (2 vế đều dương)}$$

$$\Leftrightarrow a^3 + c^3 \geq 0 \quad \text{(đúng)}$$

Vậy $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} = 1$ (đpcm).

Bài 2: (1,5 điểm) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

a) $2^y = 1 + x + x^2 + x^3$

b) $2^x + 2^y + 2^z = 2^n$ (n là số tự nhiên cho trước, $n \geq 2$)

Lời giải:

a. Viết lại phương trình: $2^y = (1 + x)(1 + x^2)$ (*)

Suy ra $1 + x, 1 + x^2$ là các nghiệm tự nhiên của $2^y \Rightarrow \begin{cases} 1 + x = 2^n \\ 1 + x^2 = 2^m \\ m + n = y \ \ (m, n \in N) \end{cases}$

Do đó: $2^m = 1 + x^2 = 1 + (2^n - 1)^2 = 2^{2n} - 2^{n+1} + 2$

- Nếu $n = 0$: $2^m = 1 - 2 + 2 = 1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow x = y = 0$
- Nếu $n \geq 1$: $2n \geq n + 1 \geq 2$ nên $2^m = 2^{2n} - 2^{n+1} + 2$ chia 4 dư 2

  Suy ra $m = 1 \Rightarrow \mathrm{n} = 1 \Rightarrow x = 1, y = 2$

Vậy các nghiệm tự nhiên $(x; y)$ của (*) là $(1; 2), (0; 0)$.

b. Do vai trò x, y, z như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử: $x \leq y \leq z$

Chia hai vế phương trình cho $2^x \neq 0$, ta được:

$$1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{n-x} \quad (**)$$

Suy ra $2^{n-x} > 1$ nên 2^{n-x} chia hết cho 2

- Nếu $z = x$ thì $x = y = z$, $(**)$ trở thành $1 + 1 + 1 = 2^{n-x}$ suy ra không tồn tại n, x nguyên thỏa mãn nên phương trình vô nghiệm.
- Nếu $z > x$ thì $y = x$ (nếu không thì VT$(**)$ lẻ), suy ra $2 + 2^{z-x} = 2^{n-x}$

$$\Rightarrow 1 + 2^{z-x-1} = 2^{n-x-1} \Rightarrow 2^{z-x-1} = 1, 2^{n-x-1} = 2 \Rightarrow z = x + 1, n = x + 2$$

Vậy các nghiệm tự nhiên của $(**)$ là $x = y = n - 2,\ z = n - 1$. $(n \in N)$

Bài 3: (1,5 điểm) Cho 3 số thực dương a, b, c bất kì thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh $\frac{1}{3-ac} + \frac{1}{3-ab} + \frac{1}{3-bc} \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải: Từ điều phải chứng minh, ta biến đổi thành:

$\frac{ab}{3(3-ab)} + \frac{bc}{3(3-bc)} + \frac{ac}{3(3-ac)} \leq \frac{1}{2}$ (trừ mỗi hạng tử cho $\frac{1}{3}$)

$\Leftrightarrow \frac{ab}{(3-ab)} + \frac{bc}{(3-bc)} + \frac{ac}{(3-ac)} \leq \frac{3}{2}$ (*)

Ta có: $\begin{cases} ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \\ ac \leq \frac{(a+c)^2}{4} \leq \frac{a^2+c^2}{2} \\ bc \leq \frac{(b+c)^2}{4} \leq \frac{b^2+c^2}{2} \end{cases}$

Khi đó: $VT_{(*)} \leq \frac{1}{4} . \left(\frac{(a+b)^2}{3-\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{(b+c)^2}{3-\frac{b^2+c^2}{2}} + \frac{(a+c)^2}{3-\frac{a^2+c^2}{2}} \right)$

$\Leftrightarrow VT_{(*)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{(a+b)^2}{(3-a^2)+(3-b^2)} + \frac{(b+c)^2}{(3-b^2)+(3-c^2)} + \frac{(a+c)^2}{(3-a^2)+(3-c^2)} \right)$

Đồng thời, theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:

$$\begin{cases} \dfrac{(a+b)^2}{(3-a^2)+(3-b^2)} \leq \dfrac{a^2}{3-b^2} + \dfrac{b^2}{3-a^2} \\ \dfrac{(a+c)^2}{(3-a^2)+(3-c^2)} \leq \dfrac{a^2}{3-c^2} + \dfrac{c^2}{3-a^2} \\ \dfrac{(b+c)^2}{(3-b^2)+(3-c^2)} \leq \dfrac{b^2}{3-c^2} + \dfrac{c^2}{3-b^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow VT_{(*)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2+c^2}{3-b^2} + \frac{b^2+c^2}{3-a^2} + \frac{a^2+b^2}{3-c^2} \right) = \frac{3}{2}$ (vì $a^2 + b^2 + c^2 = 3$) (đpcm)

Bài 4: (3,5 điểm) Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và có I là tâm đường tròn nội tiếp. Tia AI, BI, CI lần lượt cắt (O) tại điểm thứ 2 là X, Y, Z. Biết (w) là đường tròn ngoại tiếp ΔBIC cắt AC, AB tại E và F.

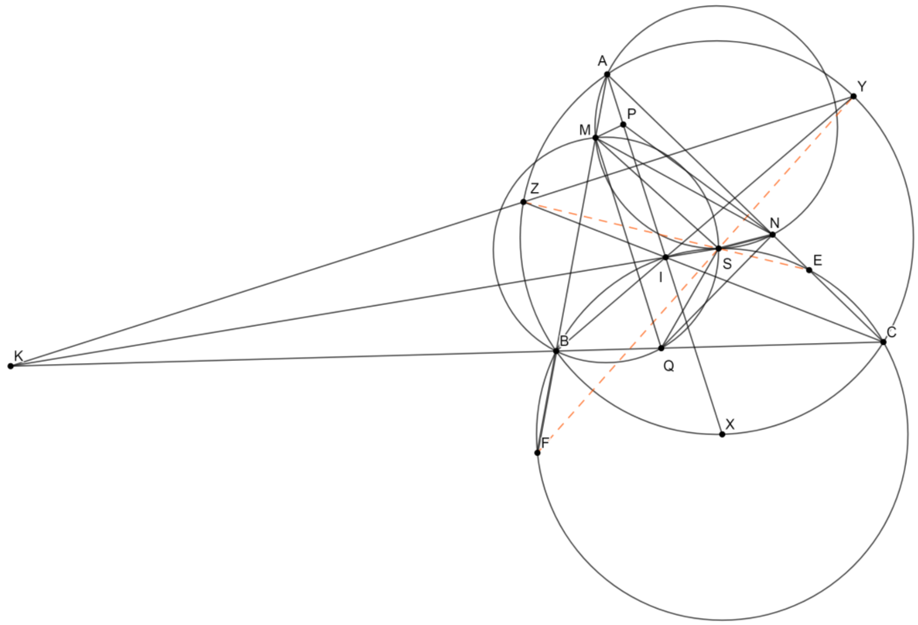
a) Chứng minh rằng X là tâm đường tròn (w).

b) Cho YZ cắt BC tại K, KI cắt (w) tại S. Chứng minh rằng E, S, Z thẳng hàng và F, S, Y thẳng hàng.

c) Gọi (L) là đường tròn đi qua hai điểm A, S và tiếp xúc (w) tại S. (L) cắt AB, AC tại M, N. Gọi P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMN. Cho (BSM) cắt BC tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh rằng 4 điểm C, N, S, Q đồng viên và 4 điểm M, N, P, Q đồng viên.

d) Chứng minh rằng BC tiếp xúc (MPN).

Chú thích: Kí hiệu (XYZ) là kí hiệu đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.



Lời giải:

a) X là tâm (IBC)

Do tứ giác $ABXC$ nội tiếp nên $\angle XAC = \angle XCB$ và $\angle XAB = \angle XBC$.

Do AX là phân giác $\angle BAC$ nên ta suy ra $\angle XCB = \angle XBC \ hay \ XB = XC$ (1)

Mặt khác:

$\angle XIB = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}$ (góc ngoài của ΔAIB)

$\angle XBI = \angle XBC + \angle IBC = \angle XAC + \angle IBC = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}$

$\Rightarrow \angle XBI = \angle XIB$ hay $XB = XI$ (2)

Từ (1),(2) ta có $XB = XC = XI$ hay X là tâm (IBC).

b) E, S, Z và F, Z, Y thẳng hàng

$\Delta KIB \sim \Delta KCS$ (g.g) $\Rightarrow KI.KS = KB.KC$

$\Delta KZB \sim \Delta KCY$ (g.g) $\Rightarrow KZ.KY = KB.KC$

$\Rightarrow KI.KS = KZ.KY$ hay $\frac{KI}{KZ} = \frac{KY}{KS}$

$\Rightarrow \Delta KIZ \sim \Delta KYS$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle KIZ = \angle KYS$

$\Rightarrow ZISY$ nội tiếp

Ta có:

$\angle YSE = 360 - \angle YSI - \angle ISE = 180 - \angle YSI + 180 - \angle ISE = \angle CZY + \angle ACZ$

CMTT câu a, ta cũng có được $ZA = ZB$ nên:

$\angle YSE = \angle BYZ + \angle YBC = \angle BCZ + \angle YBC = 180 - \angle BIC = 180 - \angle YIZ = 180 - \angle YSZ$

$\Rightarrow E, S, Z$ thẳng hàng.

CMTT ta cũng có F, Z, Y thẳng hàng.

c) Tứ giác $QSNC$ nội tiếp và $MQPN$ nội tiếp

Ta có:

$\angle QSN = 360 - \angle NSM - \angle QSM = 180 - \angle NSM + 180 - \angle QSM = \angle BAC + \angle ABC$

$\Rightarrow \angle QSN = 180 - \angle ACB$

QSNC nội tiếp

Mặt khác: $\angle BIC = 180 - \frac{\angle BXC}{2} = 180 - \frac{180 - \angle BAC}{2} = 90 + \frac{\angle BAC}{2}$

Ta có:

$\angle NQM = \angle NQS + \angle MQS$

$= \angle NCS + \angle MBS$

$= 180 - \angle SAC - \angle ASC + 180 - \angle SAB - \angle ASB$

$= 360 - (\angle ASC + \angle ASB) - (\angle SAC + \angle SAB)$

$= 360 - (360 - \angle BSC) - \angle BAC$

$= \angle BSC - \angle BAC$

$= \angle BIC - \angle BAC$

$= 90 + \frac{\angle BAC}{2} - \angle BAC$

$= 90 - \frac{\angle BAC}{2}$

Vì P là tâm nội tiếp ΔAMN nên CMTT ta thu được $\angle NPM = 90 + \frac{\angle BAC}{2}$

Từ đó $\angle NQM + \angle NPM = 180$ nên tứ giác $MQPN$ nội tiếp.

d) BC tiếp xúc với (MPN)

Kẻ Sx là tiếp tuyến chung của $(w), (L)$

$\Rightarrow \angle MQB = \angle MSB = \angle MSx + \angle xSB = \angle MNS + \angle SCB = \angle MNS + \angle SNQ = \angle MNQ$

$\Rightarrow BC$ tiếp xúc với (MQN) hay BC tiếp xúc với (MPN).

Bài 5: (1,5 điểm) Vòng bảng World Cup có 32 đội chia thành 8 bảng, mỗi bảng 4 đội thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kì cùng bảng gặp nhau đúng 1 lần), đội thắng 3 điểm, đội hoà 1 điểm, đội thua 0 điểm. Chứng minh rằng nếu không có đội nào thua ba trận thì có ít nhất 5 đội có cùng điểm.

Lời giải: Giả sử tồn tại một đội có 8 điểm.
Mà 8 chia 3 dư 2, $3, 0$ chia 3 dư 0, 1 chia 3 dư 1 $\Rightarrow$ Có hai trận hoà và một trận thắng hoặc thua $\Rightarrow$ Đội đó có 2 hoặc 5 điểm (trái giả thiết).
Vậy không có đội nào 8 điểm.
Mà số điểm tối đa một đội có thể có là: $3 + 3 + 3 = 9$ (điểm) (do mỗi bảng 4 đội nên một đội đá 3 trận) $\Rightarrow$ Tập hợp các số điểm một đội có thể có là $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$ (do không có đội nào thua ba trận).
Giả sử có nhiều nhất 4 đội có cùng số điểm.
Mà có 32 đội với 8 số điểm có thể có $\Rightarrow$ Mỗi số điểm trong tập hợp A đều có 4 đội có $\Rightarrow$ Tổng số điểm của 32 đội là:
$4.(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9) = 148$ (điểm). (i)
Tổng điểm của một trận hoà là: $1 + 1 = 2$ (điểm), tổng điểm của một trận thắng-thua là: $3 + 0 = 3$ (điểm).
Số trận của mỗi bảng là: $\frac{4.3}{2} = 6$ (trận). Số trận của cả vòng bảng là: $6.8 = 48$ (trận) $\Rightarrow$ Tổng số điểm tối đa của 32 đội là: $48.3 = 144$ (điểm) (trái (i)).
Vậy có ít nhất 5 đội có cùng điểm (đpcm).

---Hết---