

Thời gian: Vui lòng nộp bài trước 21h ngày 06/04/2022 tại <https://bit.ly/3DrwVWE>

Bài 1: (1,5 điểm) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $0 \leq x_1, x_2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{2a^2 - 3ab + b^2}{2a^2 - ab + ac}$.

Bài 2: (3,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . M là trung điểm BC .

- Dựng đường kính AA' của (O) . Chứng minh H, M, A' thẳng hàng.
- $A'H$ cắt lại (O) tại J . Chứng minh hai tam giác JFB và JEC đồng dạng, hai tam giác JFE và JBC đồng dạng.
- Cho FE cắt BC tại X . Y là trung điểm EF . Chứng minh $JYMX$ nội tiếp.
- Cho hai tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T . JT cắt (O) tại R khác J . Chứng minh hai tam giác RBC và HBC bằng nhau, từ đó suy ra AR vuông góc BC .

Bài 3: (2 điểm) Cho $p, q > 1$ là hai số nguyên dương thoả mãn $p = qn + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) và $q^3 - 1$ chia hết cho p .

- Chứng minh $q - n^2$ chia hết cho p .
- Chứng minh $(p - 1)^2 = q^3$ hoặc $p = q^2 + q + 1$.

Bài 4: (1,5 điểm) Giải phương trình, hệ phương trình sau:

- $\frac{3x}{x^2+x+1} + \frac{3x}{x^2-x+1} = 4$
- $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$

Bài 5: (1,5 điểm) Cho a, b là 2 số nguyên dương. Trong một trại gia cầm nọ có $a + b$ chuồng được đánh số từ 1 đến $a + b$, ban đầu mỗi chuồng trong a chuồng đầu chứa một con gà, còn lại mỗi chuồng chứa một con vịt. Mỗi nước đi hợp lệ là chuyển một con gà từ chuồng thứ i sang thứ $i + 1$, một con vịt từ chuồng j sang chuồng $j - 1$ với i, j cùng tính chẵn lẻ. Biết rằng mỗi chuồng có thể chứa cùng lúc nhiều con vật.

- Hỏi có thể đưa về mỗi chuồng trong b chuồng đầu chứa một con vịt, còn lại mỗi chuồng chứa một con gà không khi $a = 1$ và $b = 3$; $a = 2$ và $b = 5$?
- Tìm tất cả cặp số (a, b) sao cho có thể đưa về mỗi chuồng trong b chuồng đầu chứa một con vịt, còn lại mỗi chuồng chứa một con gà.