DỰ ÁN THE GIFTED BATTLEFIELD
BAN CHUYÊN MÔN TOÁN HỌC

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ TS CHUYÊN ĐỢT 1
MÔN: TOÁN

Bài 1: (1,5 điểm) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $0 \leq x_1, x_2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{2a^2-3ab+b^2}{2a^2-ab+ac}$.

Lời giải: Theo định lý Viete:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Ta có: $Q = \frac{2a^2-3ab+b^2}{2a^2-ab+ac} = \frac{2-\frac{3b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}{2-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}} = \frac{2+3(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{2+x_1+x_2+x_1x_2}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$ nên $x_1^2 \leq x_1x_2$ và $x_2^2 \leq 4 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq x_1x_2 + 4 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \leq 3x_1x_2 + 4$

Thế vào Q, ta có: $Q \leq \frac{2+3(x_1+x_2)+3x_1x_2+4}{2+x_1+x_2+x_1x_2} = 3$

Dấu bằng xảy ra khi $x_1 = x_2 = 2$ hoặc $x_1 = 0; x_2 = 2$

$x_1 = x_2 = 2 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 4; \frac{c}{a} = 4 \Rightarrow b = -4a; c = 4a \quad (a \neq 0)$

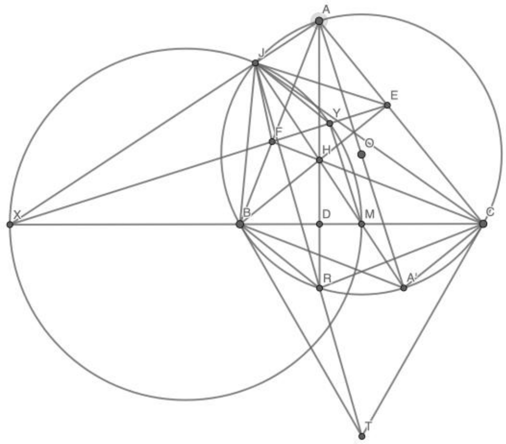
$x_1 = 0; x_2 = 2 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 2; \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow b = -2a; c = 0 \quad (a \neq 0)$

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 3.

Bài 2: (3,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. M là trung điểm BC.

a) Dựng đường kính AA' của (O). Chứng minh H, M, A' thẳng hàng.
b) $A'H$ cắt lại (O) tại J. Chứng minh hai tam giác JFB và JEC đồng dạng, hai tam giác JFE và JBC đồng dạng.
c) Cho FE cắt BC tại X. Y là trung điểm EF. Chứng minh $JYMX$ nội tiếp.
d) Cho hai tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. JT cắt (O) tại R khác J. Chứng minh hai tam giác RBC và HBC bằng nhau, từ đó suy ra AR vuông góc BC.

Lời giải:



a) Do AA' là đường kính của $(O) \Rightarrow A'B \perp AB$ và $A'C \perp AC$.
Mà $CH \perp AB$, $BH \perp AC \Rightarrow HBA'C$ là hình bình hành $\Rightarrow BC$, $A'H$ có cùng trung điểm $M \Rightarrow H$, M, A' thẳng hàng.

b) Ta có AA' là đường kính của $(O) \Rightarrow \angle AJH = 90°$.
Mà $\angle AEH = \angle AFH = 90°$ (do BE, CF là các đường cao tam giác ABC) $\Rightarrow A, E, F, H, J$ cùng thuộc một đường tròn.

Xét hai tam giác JFB và JEC:
$\angle JBA = \angle JCA$ (cùng chắn cung AJ của (O))
$\angle JFA = \angle JEA$ (A, E, F, H, J cùng thuộc một đường tròn)
$\Rightarrow$ Hai tam giác JFB và JEC đồng dạng.
Xét hai tam giác JEF và JCB:
$\angle JEF = \angle JAF = \angle JAB = \angle JCB$ (A, E, F, H, J cùng thuộc một đường tròn)
$\angle JFE = 180° - \angle JAE = 180° - \angle JAC = \angle JBC$ (A, E, F, H, J cùng thuộc một đường tròn)
$\Rightarrow$ Hai tam giác JEF và JCB đồng dạng.

c) Do hai tam giác JEF và JCB đồng dạng $\Rightarrow \frac{JF}{JB} = \frac{FE}{BC} = \frac{FY}{BM}$ và $\angle JFE = \angle JBC \Rightarrow$ Hai tam giác JFY và JBM đồng dạng $\Rightarrow \angle JYF = \angle JMB \Rightarrow JYMX$ nội tiếp đường tròn.

d) Ta có: $\angle HBF = 90° - \angle BAC = \angle HCE \Rightarrow$ Hai tam giác HBF và HCE đồng dạng.
Ta có $\angle TBR = \angle BJR \Rightarrow$ Hai tam giác TBR và TJB đồng dạng (chung $\angle BTR$).
Chứng minh tương tự thì hai tam giác TCR và TJC đồng dạng.
$\Rightarrow \frac{BR}{JB} = \frac{TB}{TJ} = \frac{TC}{TJ} = \frac{CR}{JC} \Rightarrow \frac{BR}{CR} = \frac{BJ}{JC}$.
Mà do hai tam giác JFB và JEC đồng dạng $\Rightarrow \frac{JB}{JC} = \frac{BF}{CE} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow \frac{BR}{CR} = \frac{BH}{HC}$.
Mà $\angle BHC = 180° - \angle BAC = \angle BRC \Rightarrow$ Hai tam giác BRC và BHC bằng nhau (do chung cạnh BC) $\Rightarrow BR = BH$ và $\angle HBC = \angle RBC \Rightarrow$ Tam giác BRH cân tại B và BC trung trực $HR \Rightarrow HR \perp BC$.

Mà $AH \perp BC \Rightarrow A, H, R$ thẳng hàng và $AR \perp BC$.

Bài 3: (2 điểm) Cho $p, q > 1$ là hai số nguyên dương thoả mãn $p = qn + 1$ $(n \in N)$ và $q^3 - 1$ chia hết cho p.

a) Chứng minh $q - n^2$ chia hết cho p.

b) Chứng minh $(p-1)^2 = q^3$ hoặc $p = q^2 + q + 1$.

Lời giải:

a) $q^3 - 1$ chia hết cho $p \Rightarrow q^3n^2 - n^2 = q(q^2n^2 - 1) + q - n^2$ chia hết cho p, mà $q^2n^2 - 1$ chia hết cho $qn + 1 = p \Rightarrow q - n^2$ chia hết cho p.

b) $q^3 - 1$ chia hết cho $p \Rightarrow q^3n - n = q^2(qn+1) - q^2 - n$ chia hết cho p, mà $qn + 1 = p$ chia hết cho $p \Rightarrow q^2 + n$ chia hết cho $p = qn + 1$.

Mà $qn + 1 \in Z^+ \Rightarrow q^2 + n \geq qn + 1 \Rightarrow (q-1)(q+1-n) \geq 0$.

Mà $q - 1 > 0 \Rightarrow q \geq n - 1$. (1)

Bây giờ do $q - n^2$ chia hết cho $p = qn + 1$ nên ta xét các trường hợp sau đây:

* $q = n^2 \Rightarrow p = n^3 + 1 \Rightarrow (p-1)^2 = n^6 = q^3$.

* $q < n^2 \Rightarrow n^2 - q$ chia hết cho $qn + 1$.

Mà $n^2 - q \in Z^+ \Rightarrow n^2 - q \geq qn + 1 \Rightarrow (n+1)(n-1-q) \geq 0$.

Mà $n + 1 > 0 \Rightarrow n \geq q + 1$.

Kết hợp với (1), ta được $q = n - 1$.

$p = qn + 1 = n^2 - n + 1 = (n-1)^2 + (n-1) + 1 = q^2 + q + 1$.

* $q > n^2 \Rightarrow q - n^2$ chia hết cho $qn + 1$.

Mà $q - n^2 \in Z^+ \Rightarrow q - n^2 \geq qn + 1 \Rightarrow 0 \geq q(1-n) \geq n^2 + 1$ (vì p là số nguyên dương) (vô lí).

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4: (1,5 điểm) Giải phương trình, hệ phương trình sau:

a) $\frac{3x}{x^2+x+1} + \frac{3x}{x^2-x+1} = 4$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$ $(*)$

Lời giải:

a) Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên ta có thể chia cả tử và mẫu cho x. Khi đó ta được:

$$\frac{3}{x + \frac{1}{x} + 1} + \frac{3}{x + \frac{1}{x} - 1} = 4$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$, $(|y| \geq 2)$

Phương trình trở thành:

$$\frac{3}{y+1}+\frac{3}{y-1}=4 \Leftrightarrow 2y^2-3y-2=0 \Leftrightarrow y=2 \text{ hoặc } y=\frac{-1}{2} \text{ (loại)}$$

Với $y=2$, ta có $y=x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

b) Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+y^2=1 \\ (x-2)^3+y^3=1 \end{cases} \quad (**)$$

Đặt $a=x-2, b=y$ thì $(**)$ trở thành:

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a^3+b^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=1 \\ (a+b)^3-3ab(a+b)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=\dfrac{(a+b)^2-1}{2} \\ (a+b)^3-3\dfrac{(a+b)^2-1}{2}.(a+b)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=\dfrac{(a+b)^2-1}{2} \\ -(a+b)^3+3(a+b)=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=\dfrac{(a+b)^2-1}{2} \\ (a+b-1)^2(a+b+2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ a+b=1 \end{cases} (1) \text{ hoặc } \begin{cases} ab=\dfrac{3}{2} \\ a+b=-2 \end{cases} (2)$$

<u>TH(1):</u> $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$. Khi đó: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$. Thử lại nhận.

<u>TH(2):</u> $(2) \Rightarrow (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=4-6=-2<0$ (vô lý).

Vậy cặp nghiệm của hệ phương trình là $(x,y) \in \{(2,1);(3,0)\}$.

Bài 5: (1,5 điểm) Cho a, b là 2 số nguyên dương. Trong một trại gia cầm nọ có $a+b$ chuồng được đánh số từ 1 đến $a+b$, ban đầu mỗi chuồng trong a chuồng đầu chứa một con gà, còn lại mỗi chuồng chứa một con vịt. Mỗi nước đi hợp lệ là chuyển một con gà từ chuồng thứ i sang thứ $i+1$, một con vịt từ chuồng j sang chuồng $j-1$ với i,j cùng tính chẵn lẻ. Biết rằng mỗi chuồng có thể chứa cùng lúc nhiều con vật.

a) Hỏi có thể đưa về mỗi chuồng trong b chuồng đầu chứa một con vịt, còn lại mỗi chuồng chứa một con gà không khi $a=1$ và $b=3$; $a=2$ và $b=5$?

b) Tìm tất cả cặp số (a,b) sao cho có thể đưa về mỗi chuồng trong b chuồng đầu chứa một con vịt, còn lại mỗi chuồng chứa một con gà.

Lời giải:

a) * Với $a = 1$ và $b = 3$:

Ta có: con gà cần được chuyển từ chuồng số 1 tới chuồng số 4 ⇒ Con gà cần phải đi qua chuồng số 2 và 3.

Khi con gà ở chuồng số 3:

Do 1, 3 là số lẻ, 2, 4 là số chẵn ⇒ Để di chuyển con gà thì cần di chuyển con vịt ở chuồng số 1.

Mà nếu con vịt ở chuồng số 1 thì không di chuyển được nữa ⇒ Không thể di chuyển con gà và con vịt thoả yêu cầu đề bài.

* Với $a = 2$ và $b = 5$, ta có thể di chuyển con gà và con vịt thoả yêu cầu đề bài như sau: (G: gà, V: vịt)

Chuồng	1	2	3	4	5	6	7
Lần 0	1G	1G	1V	1V	1V	1V	1V
Lần 1	1G		1G 2V		1V	1V	1V
Lần 2	1G	1V	1V	1G	1V	1V	1V
Lần 3	1G 1V		1V		1G 1V	1V	1V
Lần 4	1G 1V	1V			1V	1G 1V	1V
Lần 5	1G 1V	1V			2V		1G 1V
Lần 6	1V	1G 1V		1V	1V		1G 1V
Lần 7	1V	1V	1G 1V		1V		1G 1V
Lần 8	1V	1V	1V	1G	1V	1V	1G
Lần 9	1V	1V	1V		1G 2V		1G
Lần 10	1V	1V	1V	1V	1V	1G	1G

b) Ta chứng minh (a,b) thỏa khi và chỉ khi ab chẵn.

Giả sử tồn tại a, b cùng lẻ và có các nước đi dẫn tới thỏa yêu cầu đề bài.

Đặt $a = 2u + 1, b = 2v + 1$

Gọi x,y lần lượt là số gà trong chuồng đánh số chẵn, lẻ.

Gọi z,t lần lượt là số vịt trong chuồng đánh số chẵn, lẻ.

Khi dùng nước đi với một con gà và một con vịt đều ở các chuồng đánh số chẵn thì x giảm 1, y tăng 1, z giảm 1, t tăng 1.

Khi dùng nước đi với một con gà và một con vịt đều ở các chuồng đánh số lẻ thì x tăng 1, y giảm 1, z tăng 1, t giảm 1.

Vậy trong mọi trường hợp, $S = (x - y) - (z - t)$ không đổi trong suốt quá trình.

Khi bắt đầu, $x = u + 1, y = u, z = v, t = v + 1 \Rightarrow S = 2$.

Khi kết thúc, $x = u, y = u + 1, z = v + 1, t = v \Rightarrow S = -2$.

Vậy ta có mâu thuẫn, do đó điều giả sử sai.

Với ab chẵn

TH1: trong hai số a, b có một số chẵn, một số lẻ

Nếu $a < b$, xét con gà ở chuồng i và con vịt ở chuồng $a + b + 1 - i$ (i chạy từ 1 đến a), hai số i và $a + b + 1 - i$ cùng tính chẵn lẻ.

Mỗi lượt thực hiện nước đi, chỉ số của chuồng chứa con gà tăng 1, chuồng chứa con vịt giảm 1, do vẫn cùng tính chẵn lẻ nên có thể thực hiện tiếp. Thực hiện $a + b + 1 - 2i$ lần thì con gà sẽ ở chuồng $a + b + 1 - i$, con vịt sẽ ở chuồng i, hay con gà và con vịt đổi chỗ.

Lần lượt thực hiện đổi chỗ con gà i và con vịt $a + b + 1 - i$ (với i chạy từ 1 đến a) thì a con gà sẽ nằm trong a chuồng cuối, và do các thao tác là đổi chỗ nên mỗi chuồng vẫn chỉ chứa đúng 1 con vật, do đó mỗi chuồng trong b chuồng đầu chứa 1 con vịt, do đó (a,b) này thỏa.

Nếu $a > b$, thực hiện tương tự $a < b$ nhưng là với con vịt chuồng i và con gà ở chuồng $a + b + 1 - i$ (i chạy từ $a + 1$ đến b) thì (a,b) này thỏa.

TH2: a, b cùng chẵn

Nếu $a \leq b$, thực hiện đổi chỗ con gà i và con vịt $i + b - a$ (với i chạy từ 1 đến a), ta có điều phải chứng minh.

Nếu $a > b$, thực hiện đổi chỗ con vịt i và con vịt $i - b + a$ (với i chạy từ $a + 1$ đến b), ta có điều phải chứng minh.

Kết luận: Vậy tất cả các cặp (a,b) thỏa mãn ab chẵn (hay ít nhất một trong hai số a, b chẵn) là tất cả các cặp (a,b) thỏa mãn yêu cầu đề bài.