Phân bố Maxwell Boltzmann

Ban chuyên môn Vật lý – The Gifted Battlefield

Xuất bản vào Ngày 6 tháng 8 năm 2022

I. Một số kiến thức liên quan

Xét một hệ vĩ mô, giả thiết có đại lượng x nào đó đặc trưng cho hệ có các giá trị rời rạc:

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$$

Ta thực hiện N rất lớn phép đo đại lượng x trên hệ. Giả sử chúng ta thực hiện được N_1 phép đo cho giá trị x_1, N_2 phép đo cho giá trị x_2,..., N_i phép đo cho giá trị x_i. Đại lượng $\dfrac{N_i}{N}$ được gọi là tần số tỷ đối xuất hiện giá trị x_i, còn giới hạn của tỷ số này khi N tiến tới rất lớn là:

$$P_i = \lim_{N\to+\infty} \frac{N_i}{N}$$

Ta cho giới hạn này bằng P_i. P_i được gọi là xác suất tìm thấy giá trị x_i. Vì $\Sigma N_i = N$ nên $\Sigma P_i = \Sigma \dfrac{N_i}{N} = 1$, và đây là tổng các xác suất của tất cả các kết quả của phép đo, cho giá trị bằng 1.

Ngoài ra ta có định lý cộng xác suất. Xác suất xuất hiện các giá trị của 1 đại lượng thì bằng tổng các xác suất xuất hiện của từng giá trị riêng rẽ. Giả sử có xác suất xuất hiện giá trị x_m là P_m, xác suất xuất hiện giá trị x_n là P_n. Vậy xác suất để xuất hiện cả 2 giá trị là:

$$P_{mn} = \frac{N_m + N_n}{N} = \frac{N_m}{N} + \frac{N_n}{N} = P_m + P_n$$

Ta còn đi đến định lý nhân xác suất, theo định lý này thì xác suất xuất hiện đồng thời các sự kiện độc lập thống kê bằng tích các xác suất của các sự kiện đó. Giả thiết ta có 2 đại lượng A và B độc lập với nhau đều đặc trưng cho hệ vĩ mô đó. Ta đo lần lượt các đại lượng A và B, thì ta đo được giá trị A_x của đại lượng A với xác suất là $P(A_x)$, B_y của đại lượng B với xác suất $P(B_y)$. Vậy xác suất của phép đo duy nhất mà cho được đồng thời cả 2 giá trị là:

$$P(A_x, B_y) = P(A_x) \cdot P(B_y)$$

Khi biết đến khái niệm xác suất xuất hiện của các giá trị, ta có thể tìm được giá trị trung bình của đại lượng đó. Ta có giá trị trung bình:

$$\overline{x} = \frac{N_1x_1 + N_2x_2 + ... + N_nx_n}{N} = \frac{\Sigma N_ix_i}{N} = \Sigma x_iP_i$$

Bây giờ ta mở rộng cho đại lượng x nhận các giá trị không phải rời rạc và hữu hạn, mà thay vào đó là liên tục và mở rộng đến vô cùng.Khi đó xuất hiện khái niệm hàm phân bố mật độ xác suất. Hàm này cho phép chúng ta biết được phân bố của xác suất tìm được các giá trị trong các vùng khả dĩ khác nhau . Nếu giá trị nằm trong khoảng x đến $x + a$, thì xác suất là $\Delta P = f(x)a$. Nếu $a \to 0$ thì $dP_x = f(x)dx$, tức xác suất xuất hiện giá trị trong khoảng từ x đến $x + dx$.

Nếu lấy tích phân $dP = f(x)dx$ trên miền khả dĩ, thì ta gọi đây là Điều kiện chuẩn hóa. Ta có:

$$\int dP_x = \int f(x)dx = 1$$

Ngoài ra, biết được hàm phân bố cho phép tính được giá trị trung bình của đại lượng x:

$$\overline{x} = \frac{\int xdN}{N} = \int xdP = \int xf(x)dx$$

Vậy tổng quát, ta có thể tính được giá trị trung bình của 1 hàm g(x)

$$\overline{g(x)} = \frac{\int g(x)dN}{N} = \int xdP = \int g(x)f(x)dx$$

II. Cơ sở thiết lập và chứng minh hàm phân bố Maxwell

1. Phân bố Maxwell

Nếu các phân tử khí chuyển động chỉ theo một phương thì $dN = \alpha.N.e^{\frac{-\mu.v^2}{2RT}} dv$

Xác suất để phân tử có tốc độ $v \to v + dv$ là

$$dP = \frac{dN}{N} = \alpha.e^{\dfrac{-\mu.v^2}{2RT}} dv$$

Trên thực tế thì các phân tử chuyển động hỗn độn, nên ta có

$$\begin{cases} dP_x = dp_{v_x \to v_x + dv_x} = \alpha.e^{\dfrac{-\mu.v^2}{2RT}} dv \\ dP_y = dp_{v_y \to v_y + dv_y} = \alpha.e^{\dfrac{-\mu.v^2}{2RT}} dv \\ dP_z = dp_{v_z \to v_z + dv_z} = \alpha.e^{\dfrac{-\mu.v^2}{2RT}} dv \end{cases}$$

$$\Rightarrow dP_{\vec{v} \to \vec{v} + d\vec{v}} = dP_x.dP_y.dP_z = \alpha^3.e^{\dfrac{-\mu.(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2RT}}.dv_x.dv_y.dv_z$$

$$\Leftrightarrow dP_{\vec{v} \to \vec{v} + d\vec{v}} = \alpha^3.e^{\dfrac{-\mu.v^2}{2RT}}.dV_{\vec{v}}$$

với $dV_{\vec{v}}$ là thể tích vi phân trong không gian vận tốc.
Do tính bình đẳng của các phương chuyển động nên

$$dP_{\vec{v} \to \vec{v} + d\vec{v}} = \frac{d\Omega}{4\pi}.dP_{v \to v + dv}$$

$$\Rightarrow \alpha^3.e^{\dfrac{-\mu.v^2}{2RT}}.dV_{\vec{v}} = \frac{d\Omega}{4\pi}.dP_{v \to v + dv}$$

Xét trong hệ tọa độ cầu: $\begin{cases} d\Omega = \dfrac{dS_v}{v^2} = \dfrac{v^2.\sin\theta.d\theta.d\varphi}{v^2} = \sin\theta.d\theta.d\varphi \\ dV_{\vec{v}} = v^2 \sin\theta.d\theta.d\varphi.dv \end{cases}$

Từ đó suy ra

$$\alpha^3.e^{\dfrac{-\mu.v^2}{2RT}}.v^2 \sin\theta.d\theta.d\varphi.dv = \frac{\sin\theta.d\theta.d\varphi}{4\pi}.dp_{v \to v + dv}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dP_{v \to v + dv} = 4\pi\alpha^3.e^{\dfrac{-\mu.v^2}{2RT}}.v^2.dv = f(v).dv \\ dP_{\vec{v} \to \vec{v} + d\vec{v}} = \dfrac{dP_v}{4\pi} \sin\theta.d\theta.d\varphi = \dfrac{f(v)dv}{4\pi} \sin\theta.d\theta.d\varphi \end{cases}$$

với $f(v) = 4\pi\alpha^3.e^{\frac{-\mu.v^2}{2RT}}.v^2$

2. Các tích phân Poisson

1) $\int_0^\infty x^{2n}e^{-\beta.x^2}dx = (-1)^n \frac{d^n}{d\beta^n}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\right)$

2) $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-\beta.x^2}dx = (-1)^n \frac{d^n}{d\beta^n}\left(\frac{1}{2\beta}\right)$

3. Tìm hệ số α

Vì số hạt bảo toàn nên ta có

$$1 = \int_0^\infty dP_v = 4\pi\alpha^3 \int_0^\infty v^2 e^{\frac{-\mu.v^2}{2RT}} dv$$

Theo công thức (1) trong phần "Các tích phân Poisson", với $\beta = \frac{\mu}{2RT}$, $n = 1$ ta thấy

$$\int_0^\infty v^2.1e^{-\beta.v^2} dv = (-1)^1 \frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\right) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{\beta^{3/2}}$$

Suy ra

$$1 = 4\pi\alpha^3 \int_0^\infty v^2 e^{\frac{-\mu.v^2}{2RT}} dv = \alpha^3 \left(\frac{\pi.2RT}{\mu}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}}$$

4. Công thức phân bố Maxwell

Vậy xác suất để 1 phân tử có tốc độ $v \to v + dv$ là:

$$dP_{v\to v+dv} = 4\pi.\left(d\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{3/2}.e^{\frac{-\mu.v^2}{2RT}}.v^2.dv = f(v).dv$$

Xác suất để 1 phân tử có vận tốc $\vec{v} \to \vec{v} + d\vec{v}$ là:

$$dP_{\vec{v}\to\vec{v}+d\vec{v}} = \frac{dP_v}{4\pi}\sin\theta.d\theta.d\varphi = \frac{f(v)dv}{4\pi}\sin\theta.d\theta.d\varphi$$

III. Tính toán các vận tốc

1. Vận tốc có xác suất lớn nhất

Ta có $f(v) = f(v)_{max}$ khi $\dfrac{df(v)}{dv} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{d\left(4\pi v^2 (\frac{\mu}{2\pi RT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu}{2RT}v^2}\right)}{dv} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2ve^{-\frac{\mu}{2RT}v^2} + v^2 e^{-\frac{\mu}{2RT}v^2}(-\frac{\mu}{2RT})2v\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8\pi \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} ve^{-\frac{\mu}{2RT}v^2} \left(\frac{\mu v^2}{2RT} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu v^2}{2RT} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow v = v_{xs} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

2. Vận tốc trung bình

Vận tốc trung bình được định nghĩa như sau

$$\overline{v} = \frac{v_1 + v_2 + ... + v_n}{N}$$

Theo cách tính giá trị trung bình của 1 hàm $g(x)$ ở trên, ta viết lại vận tốc trung bình như sau

$$\overline{v} = \int_0^\infty vf(v)dv$$

$$\Rightarrow \overline{v} = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{\mu v^2}{2RT}} dv$$

Ta lại có công thức tích phân bất định

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} = \frac{1}{2a^2}$$

Áp dụng công thức tích phân bất định trên, ta được

$$\overline{v} = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} 2\left(\frac{RT}{\mu}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

3. Vận tốc căn quân phương

Trung bình cộng của các vận tốc bình phương được tính như sau

$$\overline{v^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}{N}$$

Theo cách tính giá trị trung bình của 1 hàm $g(x)$, ta viết lại trung bình cộng của vận tốc bình phương như sau

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv$$

$$\Rightarrow \overline{v^2} = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{\mu v^2}{2RT}} dv$$

Ta cũng có công thức tích phân bất định như sau

$$\int_0^\infty = x^4 e^{-ax} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

Áp dụng công thức trên, ta được

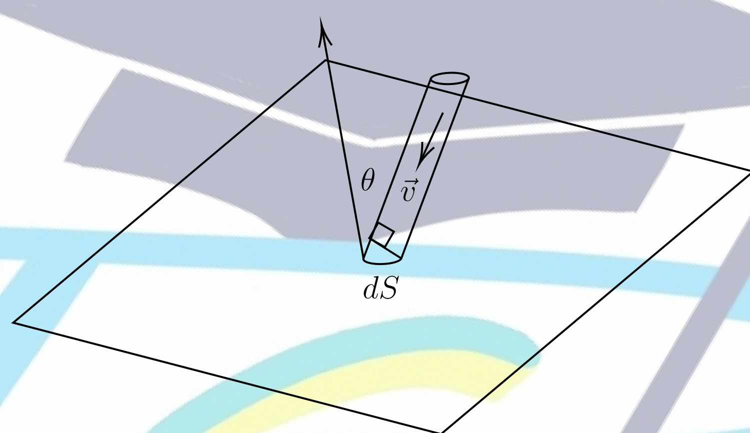
$$\overline{v^2} = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\mu}{2RT}\right)^5}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{v^2} = \frac{3RT}{\mu}$$

Vận tốc này được gọi là vận tốc quân phương và nếu ta lấy căn của nó, ta sẽ được vận tốc căn quân phương là

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

IV. Số va chạm trung bình



Xét một mặt dS mà các hạt va chạm. Xét hình trụ có đáy $dS.\cos\theta$ và chiều cao vdt.

Số hạt va chạm với dS nằm trong hình trụ đang xét là dN. Đồng thời, các hạt này cần phải tuân theo phân bố Maxwell với v nằm trong $v \to v + dv$, θ nằm trong $\theta \to \theta + d\theta$, φ nằm trong $\varphi \to \varphi + d\varphi$. Vì vậy, số hạt va chạm được tính như sau

$$dN = ndS\cos\theta vdtdP$$

$$\Rightarrow dN = ndS\cos\theta vdt\frac{f(v)dv}{4\pi}\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow N = ndSdt\int_0^\infty vf(v)dv\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$\Rightarrow N = \frac{n}{4}dSdt\overline{v}$$

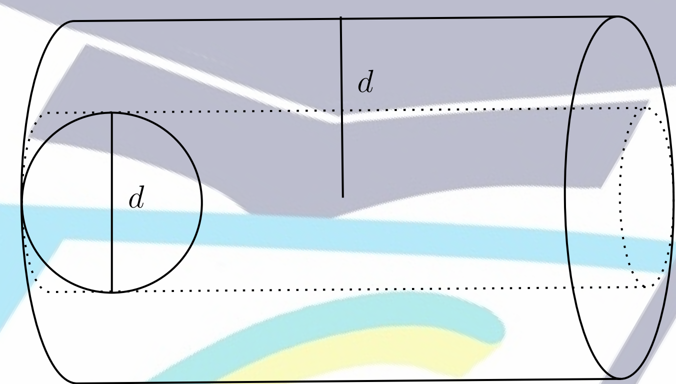
Gọi z là số va chạm trung bình trên 1 đơn vị diện tích trong 1 đơn vị thời gian, ta có

$$z = \frac{n}{4}\overline{v} = \frac{n}{4}\sqrt{\frac{8RT}{\mu\pi}}$$

V. Quãng đường tự do trung bình

Xét một phân tử riêng lẻ. Khi phân tử đó chuyển động thì nó đã quét được một thể tích V trong không gian. Thể tích V ấy là một hình trụ có đáy có đường kính bằng đường kính d của phân tử đó. Điều tương tự cũng sẽ xảy ra với các phân tử khác.

Xét một hình trụ thể tích bất kì của một hạt, ta sẽ có các hạt va chạm nhau nếu các hạt còn lại nằm ở vị trí mà tâm của hạt đó cách trục hình trụ đang xét một khoảng bé hơn hoặc bằng đường kính d. Vậy ta nói, rằng tất cả các hạt đến va chạm nằm trong không gian giới hạn bởi 1 mặt trụ đồng trục với trụ trong có bán kính tối đa bằng đường kính phân tử.



Khi này, ta chỉ xét một phân tử, và coi như các phân tử khác đứng yên. Vận tốc tương đối của phân tử đang xét so với với các phân tử khác lúc này được tính bằng công thức cộng vận tốc, và lấy trung bình ta sẽ được

$$v_{tb} = \overline{v}\sqrt{2}n_0\pi d^2$$

Số phân tử mà phân tử đang xét va chạm trong quãng thời gian t là

$$I = n_0\pi d^2 v_{tb} t$$

Trong khoảng thời gian t đó, phân tử cũng đi được một quãng đường tự do là

$$s = \overline{v}t$$

Vậy quãng đường tự do trung bình là

$$\lambda = \frac{s}{I} = \frac{1}{\sqrt{2}n_0\pi d^2}$$

Từ tính toán trên, ta thấy quãng đường tự do trung bình là quãng đường mà hạt tự do di chuyển giữa hai lần va chạm liên tiếp.

VI. Áp suất lên thành bình

1. Góc nhìn vĩ mô và vi mô

Khi chất khí, hay rộng hơn là chất lưu, đang chuyển động thành dòng, ta vẫn có thể định nghĩa áp suất tại mọi điểm nhưng lực tác dụng lên một phần tử diện tích có thể có một thành phần tiếp tuyến liên quan đến độ nhớt của chất khí (chất lưu) và sẽ gây ra những phức tạp không cần thiết trong quá trình khảo sát. Chính vì vậy, trong phần này, chúng ta sẽ chỉ xét đến áp suất của một chất khí (chất lưu) đang đứng yên hoặc đang chuyển động rất chậm.

Như chúng ta đã biết, áp lực tác dụng bởi một chất khí đứng yên được đặc trưng bởi một đại lượng vô hướng là áp suất, được định nghĩa tại mọi điểm theo mức độ trung mô bởi biểu thức

$$d\overrightarrow{f} = pd\overrightarrow{S} = pdS.\overrightarrow{n}$$

Trong đó: $\begin{cases} p \text{ là áp suất tại điểm đang xét.} \\ dS \text{ là diện tích của một phần tử bề mặt.} \\ \overrightarrow{n} \text{ là vector đơn vị pháp tuyến.} \end{cases}$

Tuy nhiên, khi quan sát dưới góc độ vi mô, ta có thể giải thích lại áp lực tác dụng của một chất khí lên một thành bình là do tổng các lực tác dụng bởi các phân tử, gồm hai lực sau:

- Các lực đẩy: có tầm rất ngắn, chỉ tác dụng khi các phân tử khí va chạm lên thành bình. Thành phần đóng góp vào áp suất chung này được gọi là *áp suất động học*. Do tác dụng của chúng lên thành là *lực đẩy*, áp suất động học này là dương.

- Các lực hút: có tầm trung bình, giữa các phân tử của chất khí và các phân tử của thành bình. Thành phần này được gọi là *áp suất phân tử*. Do đặc điểm *hút* của thành phần này, áp suất phân tử là âm.

Áp suất tổng cộng bằng tổng của hai số hạng đó

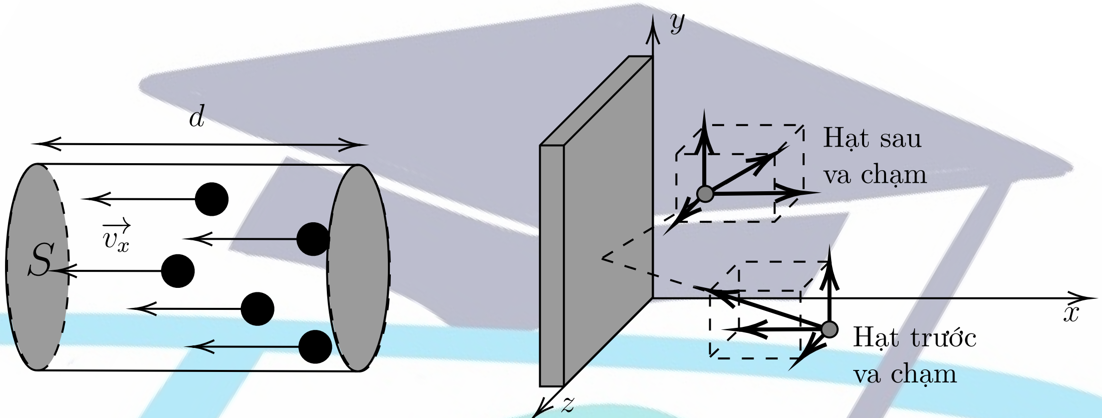
$$p = p_{\text{động học}} + p_{\text{phân tử}}$$

Tuy nhiên, do ta chỉ xét đến khí lý tưởng trong phần này, nói cách khác là bỏ qua lực hút giữa các phân tử và coi chúng chỉ tương tác với nhau qua các va chạm đàn hồi nên áp suất toàn phần chỉ còn áp suất động học.

2. Áp suất chất khí

Trong phần này, ta sẽ coi các phân tử khí là những chất điểm. Nói cách khác, với khí đơn nguyên tử, ta sẽ nghiên cứu tác động của các chuyển động của nguyên tử lên áp suất trên thành bình. Với khí đa nguyên tử, ta chỉ nghiên cứu tác động của chuyển động tịnh tiến của khối tâm phân tử. Giả thiết này là phù hợp do sự khác biệt giữa hai loại khí này về mặt động lực học là không đáng kể.

Ta xét một khối khí lý tưởng ở nhiệt độ tuyệt đối T, nằm trong một bình chứa hình trụ có diện tích đáy S và chiều cao d, mang N hạt. Mỗi phân tử khí đều được coi là chất điểm có khối lượng là m, chuyển động hỗn loạn và va chạm hoàn toàn đàn hồi với nhau và với thành bình.



Khi các phân tử khí va chạm với nhau, vì va chạm là đàn hồi xuyên tâm nên chúng sẽ đổi vận tốc cho nhau và sẽ tiếp tục chuyển động. Từ đó ta thấy rằng sẽ không có sự khác biệt nào nếu ta tạm thời bỏ qua các va chạm đó, hay coi như các phân tử khí đi xuyên qua nhau, và chỉ xét đến va chạm đàn hồi giữa chúng với thành bình.

Khi phân tử khí va chạm với thành bình, chỉ có thành phần vận tốc theo phương x của hạt là bị thay đổi, nói cách khác là chỉ có thành phần động lượng theo phương x của hạt bị thay đổi một lượng là

$$\Delta P_x = 2mv_x$$

Ta nhận thấy rằng thành bình nhận được một động lượng là $-2mv_x$ từ phân tử khí trong quá trình va chạm. Bên cạnh đó, các hạt phân tử sẽ va chạm với thành bình liên tục với thời gian Δt giữa các lần va chạm của cùng một hạt là thời gian hạt đó chuyển động với vận tốc v_x tới thành bình kia và trở lại:

$$\Delta t = \frac{2d}{v_x}$$

Lưu ý rằng kết quả này vẫn giữ nguyên kể cả khi hạt phân tử va chạm với bất kì thành bình nào khác trên đường chuyển động vì các thành ấy đều song song với phương x nên không làm thay đổi thành phần v_x. Từ đó ta có tốc độ trung bình mà động lượng của một hạt được truyền cho thành bình là

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = 2mv_x \frac{v_x}{2d} = \frac{m{v_x}^2}{d}$$

Theo định luật II Newton tổng quát, đây cũng chính là lực do một hạt tác dụng lên thành bình

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m{v_x}^2}{d}$$

Để tìm lực tổng hợp, ta phải cộng thêm lực do các hạt khác tác dụng lên thành bình, và vì chúng có những vận tốc khác nhau nên biểu thức lực tổng hợp sẽ có dạng

$$F = \frac{m}{d}({v_{x1}}^2 + {v_{x2}}^2 + ... + {v_{xN}}^2) \tag{1}$$

Mặt khác, ta có tốc độ quân phương trên phương x là

$$\overline{{v_x}^2} = \frac{{v_{x1}}^2 + {v_{x2}}^2 + ... + {v_{xN}}^2}{N} \tag{2}$$

Đối với mọi phân tử thì $v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2$. Vì do có rất nhiều phân tử và chúng đều chuyển động theo những hướng ngẫu nhiên nên tốc độ quân phương trên ba phương x, y, z là bằng nhau

$$\overline{v^2} = \overline{{v_x}^2} + \overline{{v_y}^2} + \overline{{v_z}^2} = 3\overline{{v_x}^2} \tag{3}$$

Kết hợp (2), (3) vào (1) ta được

$$F = \frac{Nm\overline{v^2}}{3d}$$

Suy ra được áp suất lên thành bình là

$$p = \frac{F}{S} = \frac{Nm\overline{v^2}}{3dS} = \frac{Nm\overline{v^2}}{3V} = \frac{1}{3}nm\overline{v^2}$$

với n là mật độ hạt.

Thông thường, ở mức độ vĩ mô, chúng ta thường tính số mol (ν) thay cho số phân tử và nhiệt độ tuyệt đối của chất khí thay cho tốc độ quân phương. Nên nếu ta thay giá trị đã được tính ở phần III của vận tốc quân phương vào biểu thức trên thì ta được

$$p = \frac{Nm}{3V}\frac{3RT}{\mu}$$

$$\Leftrightarrow pV = \frac{M}{\mu}RT$$

$$\Leftrightarrow pV = \nu RT$$

Và đây cũng chính là phương trình Clapeyron-Mendeleev.

Một cách chứng minh khác sử dụng công thức số va chạm trung bình. Ta xét lại các điều kiện của phần tính số va chạm trung bình: hình trụ có đáy $dS.\cos\theta$ và chiều cao vdt. Số hạt va chạm với dS nằm trong hình trụ đang xét là dN và tuân theo phân bố Maxwell với v nằm trong $v \to v + dv$, θ nằm trong $\theta \to \theta + d\theta$, φ nằm trong $\varphi \to \varphi + d\varphi$. Ta có số hạt va chạm vào thành bình là

$$dN = ndS\cos\theta vdt\frac{f(v)dv}{4\pi}\sin\theta d\theta d\varphi$$

Bên cạnh đó, ta có lực do một phân tử tác dụng lên thành bình khi va chạm tuân theo định luật II Newton tổng quát

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{2mv\cos\theta}{dt}$$

Với dN phân tử thì

$$\begin{aligned} dF &= \frac{2mv\cos\theta}{dt}dN \\ &= 2mv\cos\theta ndS\cos\theta v\frac{f(v)dv}{4\pi}\sin\theta d\theta d\varphi \\ &= 2m(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}.ndS.v^4e^{-\dfrac{mv^2}{2kT}}dv.\sin\theta\cos^2\theta d\theta.d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F &= 2m(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}.ndS.\int_0^\infty v^4e^{-\dfrac{mv^2}{2kT}}dv.\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi \\ &= 2m(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}.ndS.\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{(\frac{m}{2kT})^5}}.\frac{1}{3}.2\pi \\ &= nkTdS \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = nkT = \frac{1}{3}nm\overline{v^2}$$

Như vậy, một đại lượng duy nhất (áp suất) nối liền với một đại lượng thống kê (vận tốc quân phương) cho phép ta xác định các ảnh hưởng cơ học tác dụng bởi chất khí lên thành bình mà không cần thiết phải biết trạng thái cơ học của mọi phân tử của chất khí. Hệ thức tìm được dựa trên giả thuyết về sự đẳng hướng của các vận tốc. Giả thuyết này chỉ đúng tại mọi thời điểm (và không chỉ tính trung bình) nếu các thăng giáng là không đáng kể, nói cách khác là hệ khí nghiên cứu chứa một số đủ lớn phân tử.

VII. Động năng tịnh tiến của phân tử

1. Tiếp cận bằng hàm phân bố Maxwell

Một trong những cách phổ biến nhất để tính động năng tịnh tiến trung bình của một phân tử là sử dụng hàm phân bố Maxwell đã được giới thiệu ở trên:

$$f(v) = \frac{dN}{N.dv} = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}v^2\exp{(-\frac{mv^2}{2kT})}$$

Xét một khối khí lý tưởng có N phân tử, với phân tử 1 có động năng K_1, phân tử 2 có động năng K_2, ..., phân tử N có động năng K_N. Trong đó, có dN_1 phân tử có động năng K_1, dN_2 phân tử có động năng K_2, ..., dN_k phân tử có động năng K_k $(k < N)$. Ta có động năng tịnh tiến trung bình là

$$\begin{aligned}\overline{K} &= \frac{K_1 + K_2 + ... + K_N}{N}\\ &= \frac{K_1.dN_1 + K_2.dN_2 + ... + K_K.dN_k}{N}\\ &= \frac{\sum K.dN}{N}\end{aligned}$$

Ta đã biết động năng của một phân tử có khối lượng m vận tốc v là $K = \frac{1}{2}mv^2$, từ đó suy ra được

$$\begin{cases} v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \\ dv = \frac{dK}{\sqrt{2mK}} \end{cases}$$

Thay hai biểu thức trên vào hàm MB, ta tính được số phân tử có động năng K là

$$dN = 4N\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}\frac{2K}{m}\exp{(-\frac{K}{kT})}\frac{dK}{\sqrt{2mK}}$$

Từ đó, ta sẽ có động năng tịnh tiến trung bình của phân tử là

$$\begin{aligned}
\overline{K} &= \frac{\sum K.dN}{N} \\
&= \sum 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}\frac{2K^2}{m}\exp{(-\frac{K}{kT})}\frac{dK}{\sqrt{2mK}} \\
&= \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}}\int_0^\infty K^{3/2}\exp{(-\frac{K}{kT})}dK \\
&= \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}}.\frac{3}{4}\sqrt{\pi}(kT)^{5/2} \\
&= \frac{3}{2}kT
\end{aligned}$$

Cách làm này có thể khá khó hiểu đối với một số bạn nếu bạn không biết cách tính tích phân bất định $\int_0^\infty x^{3/2}e^{-ax}dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4a^{5/2}}$. Để đơn giản hơn, ta có thể viết lại biểu thức động năng tịnh tiến trung bình là

$$\begin{aligned}
\overline{K} &= \frac{K_1 + K_2 + ... + K_N}{N} \\
&= \frac{m}{2}.\frac{{v_1}^2 + {v_2}^2 + ... + {v_N}^2}{N} \\
&= \frac{m}{2}\overline{v^2} \\
&= \frac{\mu}{2N_A}.\frac{3RT}{\mu} \\
&= \frac{3}{2}kT
\end{aligned}$$

2. Tiếp cận bằng tính chất đẳng hướng

Trong phần này, ta sẽ xét một phân tử khí của một khí lý tưởng, nhưng tốc độ của nó lúc này sẽ thay đổi khi nó va chạm với một phân tử khí khác. Giả sử rằng tốc độ trung bình của phân tử đang xét bằng với tốc độ trung bình của mọi phân tử khí tại mọi thời điểm (giả định này là phù hợp khi năng lượng của khối khí không thay đổi và ta quan sát phân tử này đủ lâu).

Ta đã biết động năng chuyển động nhiệt của một hạt có tốc độ v tại một thời điểm bất kì là $K = \frac{1}{2}mv^2$, nên động năng trung bình của chuyển động tịnh tiến vì nhiệt của phân tử trong khoảng thời gian quan sát là

$$\overline{K} = K_{\text{trung bình}} = (\frac{1}{2}mv^2)_{\text{trung bình}} = \frac{1}{2}m(v^2)_{\text{trung bình}} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$$

Từ phần trên ta đã có $p = \dfrac{1}{3}nm\overline{v^2}$. Kết hợp biểu thức này với biểu thức động năng tịnh tiến trung bình ở trên, ta sẽ được phương trình động lực học phân tử khí lý tưởng

$$p = \frac{2}{3}n\overline{K}$$

So sánh biểu thức trên với biểu thức cơ bản $p = Tnk$, ta nhận thấy có một mối liên hệ giữa động năng tịnh tiến trung bình của phân tử khí với nhiệt độ tuyệt đối của khối khí đó

$$\overline{K} = \frac{3}{2}kT$$

Thừa số 3 trong biểu thức trên xuất hiện là vì sự tương đương của ba phương không gian hay sự tương đương của trung bình các thành phần vận tốc bình phương:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x{}^2} + \overline{v_y{}^2} + \overline{v_z{}^2} = 3\overline{v_x{}^2}$$

Do đó ta có thể viết

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x{}^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_y{}^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_z{}^2} = \frac{1}{2}kT$$

Tổng của ba đóng góp bằng nhau này cho ta phương trình liên hệ giữa động năng tịnh tiến trung bình với nhiệt độ tuyệt đối trên.

Thừa số 3 được nối kết với ba bậc tự do tịnh tiến của phân tử đơn nguyên tử. Đối với các mục đích của chúng ta, mỗi bậc tự do tương ứng với khả năng phân tử tham gia vào chuyển động một chiều để có đóng góp vào cơ năng của phân tử này. Còn đối với phân tử đa nguyên tử thì bên cạnh chuyển động tịnh tiến của khối tâm còn có những dạng chuyển động khác như chuyển động quay của phân tử, chuyển động dao động của các nguyên tử trong phân tử cũng đóng góp phần năng lượng của mình vào cơ năng của phân tử. Dựa vào trên quan niệm về chuyển động hỗn loạn không có phương ưu tiên, không có một loại chuyển động ưu tiên nào, James Clerk Maxwell đã mở rộng kết quả của chuyển động tịnh tiến và thiết lập định luật phân bố đều năng lượng cho các bậc tự do:

Cơ năng trung bình của phân tử được phân bố đều cho các bậc tự do, năng lượng ứng với một bậc tự do bằng $\frac{1}{2}kT$.

Nếu phân tử có i bậc tự do thì cơ năng trung bình của phân tử là

$$\overline{E} = i(\frac{1}{2}kT)$$

Bên cạnh đó, từ công thức động năng trên, ta có thể rút ra một kết luận: tại một nhiệt độ T, mọi phân tử khí trong khí lý tưởng, bất kể khối lượng của chúng là gì, đều sẽ có cùng một động năng trung bình của chuyển động nhiệt là $\frac{3}{2}kT$. Khi ta đo nhiệt độ của một khối khí, ta cũng đang đo động năng trung bình của các phân tử của nó.

Đồng thời, động năng trung bình của phân tử cũng cho ta biết giới hạn dưới của độ chính xác của phép đo. Theo công thức trên thì một hạt bất kì tham gia chuyển động nhiệt không thể đứng yên ở một vị trí cân bằng. Ví dụ như khi ta treo một vật nặng ở đầu dưới một sợi dây thì, theo quy luật của Tĩnh học, vật sẽ cân bằng ở vị trí mà dây treo trùng với đường thẳng đứng đi qua trọng tâm của vật. Vật tham gia chuyển động nhiệt vì các phân tử tạo nên vật chuyển động hỗn loạn và các phân tử của không khí, của dây treo va chạm vào vật trong chuyển động nhiệt. Vật nặng cũng có động năng trung bình là $\frac{3}{2}kT$. Động năng này là động năng chuyển động tịnh tiến của vật trong không gian ba chiều (ứng với ba bậc tự do). Vì động năng này nên vật luôn luôn dao động về mọi phía trên mặt phẳng nằm ngang và không đứng yên ở vị trí cân bằng. Động năng dao động theo một hướng xác định (ứng với một bậc tự do) là $\frac{1}{2}kT$ theo định luật phân bố đều năng lượng cho các bậc tự do. Biên độ căn quân phương của dao động của vật nặng có thể tính được là rất nhỏ và có thể bỏ qua. Tuy vậy, nếu thực hiện phép đo tọa độ của vật rắn nói trên một cách thật chính xác thì rõ ràng sai số của phép đo phải lớn hơn biên độ căn quân phương của dao động. Dù máy móc có tinh xảo đến đâu thì độ chính xác cũng không thể nhỏ hơn biên độ đó. Suy rộng ra, mọi phép đo của Vật Lý đều có một giới hạn dưới của độ chính xác. Giới hạn này tồn tại vì có chuyển động nhiệt của các phân tử tạo thành mọi vật. Ta có thể cảm nhận trực tiếp điều này khi nghe âm thanh được xử lí (phóng đại, truyền, ghi) bằng các dụng cụ điện tử. Khi không có âm thanh ngoài đưa vào, máy vẫn có tiếng rì rào nho nhỏ (gọi là phông hay tiếng ồn), máy càng tốt thì tiếng rì rào này càng nhỏ nhưng không thể loại trừ hết được. Nếu đưa một âm thanh ngoài vào máy mà khi ra âm thanh nhỏ hơn tiếng rì rào thì không thể nhận biết (nghe) được âm thanh này.

VIII. Cơ sở thiết lập phân bố Maxwell - Boltzmann

Nhà vật lý học James Clerk Maxwell đã thiết lập nên hàm phân bố Maxwell để miêu tả sự phân bố vận tốc của các hạt trong khối khí lý tưởng vào những năm 1960. Sau đó, nhà vật lý học Ludwig Boltzmann đã mở rộng và khái quát hàm phân bố Maxwell để miêu tả sự phân bố và xác suất tìm thấy các hạt có vận tốc v trong không gian 3 chiều và trong trường trọng lực. Phân bố Maxwell-Boltzmann cung cấp một giải thích đơn giản về nhiều đặc tính cơ bản của khí, bao gồm áp suất và sự khuếch tán. Vậy ta hãy tìm hiểu xem phân bố Maxwell-Boltzmann là gì nào.

1. Phân bố Boltzmann

Ta xét một khối khí lý tưởng mà trong đó các phân tử có cùng thế năng được đặt trong trọng trường của Trái Đất. Vì có trọng lực tác dụng lên các phân tử dẫn đến áp suất của chất khí không đồng đều: càng xuống thấp thì áp suất càng cao, do lớp không khí ở dưới phải chịu trọng lượng của lớp trên. Vậy có thể xem áp suất khí là một hàm theo độ cao. Tìm ra quy luật biến thiên của hàm này chính là công thức phong vũ biểu:

Xét cột khí có khối lượng M, diện tích đáy S, nằm giữa hai điểm có độ cao h và $h+dh$ so với gốc thế năng, với áp suất ở hai độ cao đó lần lượt là p và $p+dp$.

Ta có độ chênh lệch áp suất này sinh ra một áp lực cân bằng với trọng lực

$$Sdp = -Mg$$

$$\Leftrightarrow M = -\frac{Sdp}{g}$$

Theo phương trình Claypeyron - Mendeleev

$$pV = \frac{M}{\mu}RT$$

$$\Rightarrow pV = -\frac{Sdp}{\mu g}RT$$

$$\Leftrightarrow pSdh = -\frac{Sdp}{\mu g}RT$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT}dh$$

$$\Rightarrow \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT}\int_{h_0}^{h}dh$$

Với p_0 là áp suất tại $h_0 = 0$

$$\Rightarrow \ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\mu gh}{RT}$$

$$\Rightarrow p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Trong đó:

- p : Áp suất khí tại độ cao h
- p_0 : Áp suất khí tại mặt đất
- μ : Khối lượng mol của khí
- m : Khối lượng một phân tử khí
- T : Nhiệt độ tuyệt đối của khí

Đây được gọi là công thức phong vũ biểu. Nó cho thấy áp suất khối khí lý tưởng giảm khi lên cao theo quy luật hàm mũ.

Nếu nhiệt độ tại mọi điểm trong khối khí là như nhau thì mật độ phân tử n của khối khí tỉ lệ với áp suất p

$$\begin{cases} p = nkT \\ p_0 = n_0 kT \end{cases}$$

$$\Rightarrow n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Công thức này thể hiện sự thay đổi mật độ phân tử theo độ cao. Mặt khác, thế năng của phân tử trong trọng trường tỉ lệ thuận với độ cao: $U = mgh$, do đó ta có

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}$$

Ta có số hạt tìm thấy trong thể tích dV có cùng thế năng U là dN

$$dN = ndV$$

$$\Leftrightarrow dN = n_0 e^{-\frac{U}{kT}} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Đây chính là công thức **phân bố Boltzmann**. Không chỉ vậy, Boltzmann còn chứng minh được công thức trên cũng có thể được dùng để tính sự phân bố hạt trong một trường lực thế bất kì. Ta chỉ cần thay n và n_0 thành mật độ hạt ở các vị trí lần lượt ứng với thế năng bất kỳ và thế năng bằng 0.

2. Phân bố Maxwell - Boltzmann

Xét số hạt tìm thấy trong thể tích $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ có thế năng U là dN. Trong đó, có $dN(v_x, v_y, v_z, x, y, z)$ hạt có vận tốc trên ba phương (v_x, v_y, v_z) tương ứng trên các dải vận tốc dv_x, dv_y, dv_z. Từ đó ta có

$$dN(v_x, v_y, v_z, x, y, z) = dN \cdot dP(v_x, v_y, v_z)$$

Áp dùng công thức phân bố Boltzmann và công thức phân bố Maxwell, ta có

$$dN(v_x, v_y, v_z, x, y, z) = n_0 e^{-\frac{U}{kT}} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{\frac{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}} \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$$

$$\Leftrightarrow dN(v_x, v_y, v_z, x, y, z) = n_0(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{\frac{-(K+U)}{kT}} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$$

Từ đó, ta rút ra được hàm phân bố Maxwell-Boltzmann

$$F_{MB} = n_0 \cdot (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} \cdot e^{\frac{-E}{kT}}$$

Lưu ý:Hàm phân bố Maxwell-Boltzmann chỉ được áp dụng cho khí lí tưởng. Trong khí thực có nhiều hiệu ứng khác nhau tác động lên các hạt (ví dụ như dòng xoáy, tương tác giữa các hạt,...) có thể làm cho tốc độ của chúng phân bố khác với kết quả của phân bố Maxwell-Boltzmann. Tuy nhiên, khí bị làm loãng ở nhiệt độ bình thường hoạt động gần giống như khí lí tưởng nên phân bố Maxwell-Boltzmann là một giá trị gần đúng cho những khí như vậy.

IX. Bài tập

Bài toán 1.

Giả thiết rằng năng lượng của một hạt trong một khối khí hình trụ nhiệt độ T có thể được biểu diễn bằng biểu thức $E(z) = az^2$ với z là tọa độ của hạt trên trục Oz (Oz trùng với trục khối khí) và z có thể nhận mọi giá trị từ $-\infty$ tới $+\infty$. Chứng tỏ rằng năng lượng trung bình của mỗi hạt đối với một hệ gồm các hạt như trên tuân theo thống kê Maxwell - Boltzmann sẽ là $\overline{E} = \frac{1}{2}kT$. Nhận xét mối quan hệ giữa định luật phân bố đều năng lượng với các tính toán trên.

Bài toán 2.

Tính phần trăm phân tử khí có động năng chuyển động tịnh tiến khác với động năng trung bình chuyển động tịnh tiến của các phân tử không quá 1%.

Bài toán 3.

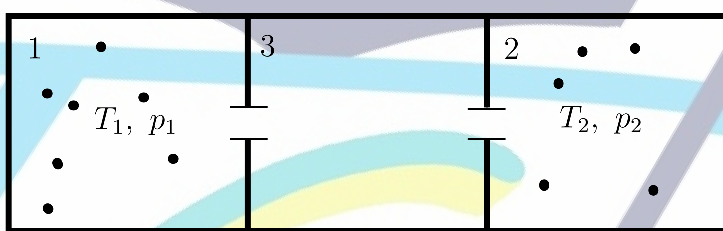
Tìm số phân tử khí Heli trong $1cm^3$, có vận tốc nằm trong khoảng từ $2,39km/s$ đến $2,41km/s$. Nhiệt độ của Heli là 690°C, khối lượng riêng là $2,16 \cdot 10^{-4}kg/m^3$.

Bài toán 4.

Tính số phần trăm phân tử khí nằm trong trọng trường của Trái Đất có thế năng ε_p lớn hơn động năng trung bình chuyển động tịnh tiến của chúng. Giả sử rằng nhiệt độ của khí và gia tốc trọng trường không phụ thuộc vào độ cao.

Bài toán 5.

Một hốc cách nhiệt được nối với hai bình chứa khí lý tưởng đơn nguyên tử bằng các lỗ thủng nhỏ giống nhau. Bình 1 được giữ ở áp suất p_1, nhiệt độ T_1 và bình 2 được giữ ở áp suất p_2, nhiệt độ T_2 không đổi. Tìm biểu thức nhiệt độ và áp suất của khí trong hốc.



X. Lời giải tham khảo

Bài toán 1.

Gọi S là diện tích đáy của khối khí. Theo phân bố Maxwell - Boltzmann, ta có hàm phân bố của $E(z)$ là

$$dN = F(MB).dV.dV_v = n_0(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}\exp{(\frac{-E}{kT})}.Sdz.dV_v$$

Đồng thời, ta cũng có năng lượng trung bình của mỗi hạt là

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \frac{\int EdN}{\int dN}\\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E.n_0(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}\exp{(\frac{-E}{kT})}.Sdz.\int dV_v}{\int_{-\infty}^{+\infty} n_0(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}\exp{(\frac{-E}{kT})}.Sdz.\int dV_v}\\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} az^2\exp{(-\frac{az^2}{kT})}dz}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp{(-\frac{az^2}{kT})}dz}\end{aligned}$$

Mặt khác, ta cũng có các công thức tích phân bất định

$$\begin{cases}\int_0^{+\infty} x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\\ \int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\end{cases}$$

Và vì $x^2e^{-ax^2}$ và $e^{-a^2x^2}$ đều là hàm chẵn nên

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-ax^2}dx = 2\int_0^{+\infty} x^2e^{-ax^2}dx\\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}dx\end{cases}$$

Từ đó ta suy ra được

$$\overline{E} = \frac{\int_0^{+\infty} az^2 \exp{(-\frac{az^2}{kT})} dz}{\int_0^{+\infty} \exp{(-\frac{az^2}{kT})} dz}$$
$$= \frac{\frac{a}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}(kT)^3}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{kT}{a}}}$$
$$= \frac{1}{2}kT$$

Nhận xét: Trong bài toán này, các hạt chỉ có một bậc tự do dọc theo trục Oz nên theo định luật phân bố đều năng lượng cho các bậc tự do, năng lượng trung bình của mỗi hạt là $\frac{1}{2}kT$.

Bài toán 2.

Từ công thức phân bố MB và công thức động năng của chất điểm, ta đã chứng minh được công thức số hạt có động năng K đến dK trong số N hạt là

$$\Delta N = \frac{2N\pi}{(\pi kT)^{3/2}}\sqrt{K}\exp{(-\frac{K}{kT})}\Delta K$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\Delta N}{N} = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}}\sqrt{K}\exp{(-\frac{K}{kT})}\Delta K \tag{1}$$

Vì ta cần tìm số hạt có động năng tịnh tiến sai khác không quá 1% so với động năng trung bình nên ta có

$$\Delta K = 1,01\overline{K} - 0,99\overline{K} = 0,02\overline{K} \tag{2}$$

Thay (2) và $K = 0,99\overline{K}$ vào (1), ta được

$$\alpha = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}}\sqrt{0,99\overline{K}}\exp{(-\frac{0,99\overline{K}}{kT})}0,02\overline{K}$$
$$= \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}}\sqrt{0,99.\frac{3}{2}kT}\exp{(-\frac{0,99.\frac{3}{2}kT}{kT})}.0,02.\frac{3}{2}kT$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{0,99.\frac{3}{2}}\exp{(-0,99.\frac{3}{2})}.0,02.\frac{3}{2}$$
$$\approx 0,934\%$$

Bài toán 3.

Ta lấy: $dv = 2,41km/s - 2,39km/s = 0,02km/s = 20m/s$

Và: $v = \dfrac{2,41km/s + 2,39km/s}{2} = 2,40km/s$

Gọi N là tổng số phân tử Heli, dN là số phân tử Heli trong dải vận tốc $v + dv$

Xác suất tìm thấy hạt mang vận tốc v là:

$$\frac{dN}{Ndv} = f(v)$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(\frac{m}{2kT})^{\frac{3}{2}} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2kT}} dv$$

$$\Rightarrow dN = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}(\frac{m}{2kT})^{\frac{3}{2}} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2kT}} dv \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có phương trình khí lý tưởng:

$$P = nkT$$

$$\Rightarrow P = \frac{N}{V}kT$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{PV}{kT} \qquad (2)$$

Ta lại có phương trình Mendeleev - Claypeyron:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{m}{V\mu}RT \qquad (3)$$

Thế (2)(3) vào (1), ta có:

$$\Rightarrow dN = \frac{4mR}{k\mu\sqrt{\pi}}(\frac{m}{2kT})^{\frac{3}{2}} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2kT}} dv \approx 2,5 \cdot 10^4 \text{ (phân tử Heli)}$$

Bài toán 4.

Độ cao mà ở đó thế năng của các phân tử lớn hơn động năng trung bình của chuyển động tịnh tiến của chúng:

$$mgh \geq \frac{3}{2}kT$$

$$\Rightarrow h \geq \frac{3}{2}\frac{kT}{mg} \tag{1}$$

Áp dụng công thức phân bố Boltzmann. Từ đó, ta có số phân tử khí N_h có thế năng lớn hơn động năng trung bình của chuyển động tịnh tiến:

$$N_h = \int_h^\infty ndV = \int_h^\infty n_0 e^{\frac{-mgh}{kT}} Sdh = n_0 S \int_h^\infty e^{\frac{-mgh}{kT}} dh$$

Áp dụng phép tích phân: $\int e^{-ax} = \frac{1}{a} e^{-ax}$

$$\Rightarrow N_h = n_0 S \frac{kT}{mg} e^{\frac{-mgh}{kT}} \tag{2}$$

Tương tự, ta có tổng cộng số phân tử là:

$$N = \int_0^\infty ndV = \int_0^\infty n_0 e^{\frac{-mgh}{kT}} Sdh = n_0 S \int_0^\infty e^{\frac{-mgh}{kT}} dh$$

$$\Rightarrow N = n_0 S \frac{kT}{mg} \tag{3}$$

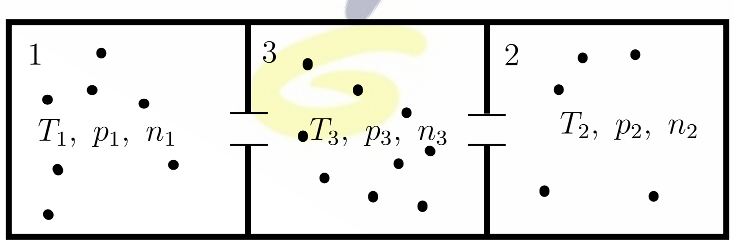
Từ (2), (3) ta có tỉ số phân tử khí nằm trong trọng trường Trái Đất có thế năng lớn hơn động năng trung bình chuyển động tịnh tiến của chúng:

$$\eta = \frac{N_h}{N} = \frac{n_0 S \frac{kT}{mg} e^{\frac{-mgh}{kT}}}{n_0 S \frac{kT}{mg}} = e^{\frac{-mgh}{kT}} \tag{4}$$

Thế (1) vào (4), ta có tỉ số phân tử khí nằm trong trọng trường Trái Đất có thế năng lớn hơn động năng trung bình chuyển động tịnh tiến của chúng:

$$\Rightarrow \eta = exp(\frac{-mg\frac{3}{2}\frac{kT}{mg}}{kT}) = exp(-\frac{3}{2}) \approx 22,3\%$$

Bài toán 5.



Gọi n_1, n_2 và n_3 lần lượt là mật độ phân tử trong bình 1, bình 2 và hốc. Ta có

$$\begin{cases} p_1 = n_1kT_1 \\ p_2 = n_2kT_2 \\ p_3 = n_3kT_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{n_1T_1}{n_2T_2} \\ \dfrac{p_1}{p_3} = \dfrac{n_1T_1}{n_3T_3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n_2 = \dfrac{p_2T_1}{p_1T_2}.n_1 \\ p_3 = \dfrac{n_3T_3}{n_1T_1}p_1 \end{cases} \tag{1}$$

Sau một khoảng thời gian đủ lâu, trạng thái cân bằng động giữa hai khối khí sẽ được thiết lập. Khi đó, số phân tử khí đi từ bình 1 và 2 vào hốc và ngược lại là bằng nhau:

$$z_3 = z_1 + z_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}n_3\overline{v_3} = \frac{1}{4}n_1\overline{v_1} + \frac{1}{4}n_2\overline{v_2}$$

$$\Leftrightarrow n_3\sqrt{\frac{8RT_3}{\mu\pi}} = n_1\sqrt{\frac{8RT_1}{\mu\pi}} + n_2\sqrt{\frac{8RT_2}{\mu\pi}}$$

$$\Leftrightarrow n_3\sqrt{T_3} = n_1\sqrt{T_1} + n_2\sqrt{T_2} \tag{2}$$

Thế biểu thức trên của (1) vào (2), ta được:

$$n_3\sqrt{T_3} = n_1(\sqrt{T_1} + \frac{p_2T_1}{p_1T_2}\sqrt{T_2}) \tag{3}$$

Mặt khác, do cân bằng nên nhiệt độ khối khí trong hốc được giữ không đổi, hay nội năng khối khí không đổi. Từ đó, ta nhận thấy tổng động năng tịnh tiến trung bình của các phân tử vào hốc bằng với tổng động năng của các phân tử ra khỏi hốc:

$$\overline{K_3}n_3 = \overline{K_1}n_1 + \overline{K_2}n_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}kT_3n_3\sqrt{T_3} = \frac{3}{2}kT_1n_1\sqrt{T_1} + \frac{3}{2}kT_2n_2\sqrt{T_2}$$

$$\Leftrightarrow n_3T_3\sqrt{T_3} = n_1T_1(\sqrt{T_1} + \frac{p_2}{p_1}\sqrt{T_2}) \tag{4}$$

Lấy (4) chia cho (3), ta được:

$$T_3 = \frac{T_1\sqrt{T_1} + \dfrac{p_2T_1}{p_1}\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \dfrac{p_2T_1}{p_1T_2}\sqrt{T_2}} \tag{5}$$

Kết hợp biểu thức dưới của (1) với (4) và (5), ta được:

$$p_3 = (p_1\sqrt{T_1} + p_2\sqrt{T_2})\sqrt{\frac{\sqrt{T_1} + \dfrac{p_2T_1}{p_1T_2}\sqrt{T_2}}{T_1\sqrt{T_1} + \dfrac{p_2T_1}{p_1}\sqrt{T_2}}}$$

Tài liệu tham khảo

[1] David Halliday – Robert Resnick – Jearl Walker *Fundamentals of Physics*

[2] Hugh D. Young - Roger A. Freedman *University Physics with Modern Physics*

[3] P.F.I.E.V *Nhiệt động học*

[4] Yung-Kuo Lim *Problems and solutions on Thermodynamics and Statistical Mechanics*

[5] N.A Krall - A.W Trivelpiece *Principles of Plasma Physics*

[6] Trần Ngọc Hợi - Phạm Văn Thiều *Vật lý đại cương - Các nguyên lí và ứng dụng - Tập 1*

[7] Phạm Quý Tư *Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí Trung học phổ thông: Nhiệt học và Vật lí phân tử*

[8] Bùi Quang Hân *Giải toán vật lí 10 - Tập 2*