Trường hấp dẫn

Ban chuyên môn Vật lý – The Gifted Battlefield

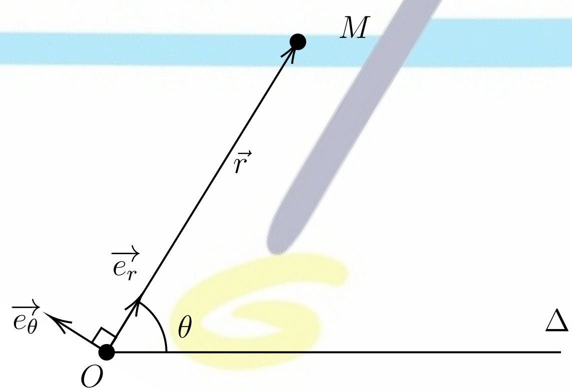
Xuất bản vào Ngày 31 tháng 10 năm 2021

Lời mở đầu

Xuất phát từ các định luật thực nghiệm của Kepler trong khoảng từ 1604–1698, Newton đã xây dựng nên bộ môn cơ học cổ điển của mình vào năm 1687. Trường hấp dẫn trong bộ môn cơ học cổ điển được miêu tả bởi định luật vạn vật hấp dẫn của Newton. Dẫu cho thuyết tương đối rộng của Einstein đã được công bố và chứng minh là có tính đúng đắn hơn định luật vạn vật hấp dẫn của Newton, sự khác biệt chỉ xảy ra khi ta xét tới một vật thể có khối lượng quá lớn (các lỗ đen, sao neutron, ...). Đối với chương trình trung học phổ thông hiện nay, ta vẫn xét trường hấp dẫn giữa các chất điểm tương tác với nhau (các hành tinh hoặc ngôi sao với khoảng cách rất lớn so với kích thước của chúng cũng là chất điểm).

I. Phương pháp hệ tọa độ cực

1. Hệ toạ độ cực



Một điểm M bất kì trong hệ toạ độ cực được xác định bởi vector vị trí $\overrightarrow{r}$ và θ. Trong đó, r là khoảng cách của điểm M tới gốc toạ độ O, còn θ là góc giữa vector $\overrightarrow{OM}$ và 1 trục cố định Δ.

2. Các đại lượng trong hệ toạ độ cực

a) Vị trí

Vị trí một điểm trong toạ độ cực được xác định bằng vector $\vec{r} = r\vec{e}_r$. Trong đó, $\vec{e}_r$ là vector đơn vị chỉ phương và $\overrightarrow{e}_\theta$ là vector đơn vị pháp tuyến, có chiều được xác định bằng cách quay vector $\vec{e}_r$ theo ngược chiều kim đồng hồ một góc 90 độ, hay $\frac{\pi}{2}$ radian.

b) Vận tốc

Ta có:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{d(r \cdot \vec{e}_r)}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \\ &= v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Trong đó:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_r = \dfrac{dr}{dt} \\ v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

c) Gia tốc

Ta có:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r\right) + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right) \\
&= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}(-\vec{e}_r) \\
&= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{e}_\theta \\
&= a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

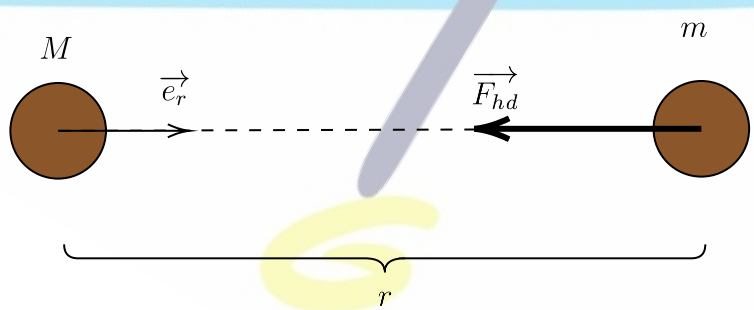
Trong đó:

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ a_\theta = 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

II. Lực hấp dẫn

1. Định luật vạn vật hấp dẫn

Theo định luật vạn vật hấp dẫn, lực hấp dẫn giữa hai vật (được coi là chất điểm) là một lực hút có phương nằm trên đường thẳng nối liền hai vật, có độ lớn tỉ lệ thuận với tích khối lượng hai vật và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng.



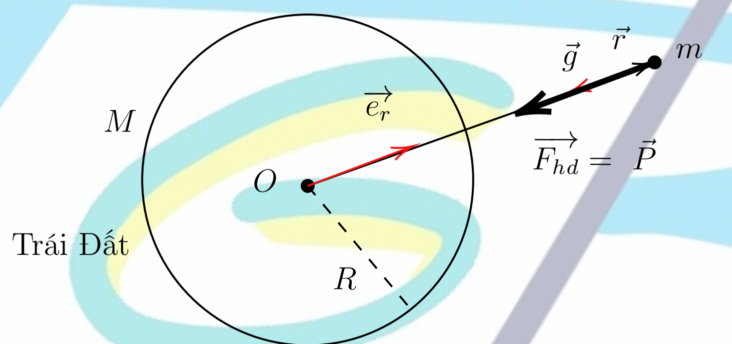
$$\overrightarrow{F_{hd}} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

$$\text{Với}\begin{cases}\text{G là hằng số hấp dẫn vũ trụ có giá trị trong hệ SI là } G \approx 6,67.10^{-}11\left(\dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\right)\\ \overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r}\text{là vector chỉ phương hướng từ vật hút tới vật bị hút.}\end{cases}$$

Như vậy, vật M tác dụng lên vật m một lực $\overrightarrow{F_{hd}}$ thì vật m cũng tác dụng lên vật M một lực $-\overrightarrow{F_{hd}}$. Tuy nhiên, ta coi như vật M có khối lượng $M >> m$, khiến cho sự di chuyển của M là vô cùng bé và không đáng kể (nếu có xét tới sự di chuyển của M thì bài toán sẽ cho biết).

2. Gia tốc rơi tự do

Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên các vật trên bề mặt Trái Đất gọi là trọng lực. Đây là một trường hợp khá đặc biệt, khi tương tác giữa Trái Đất và một vật bất kì trên bề mặt không thể coi là hai chất điểm tương tác với nhau. Tuy nhiên, ta coi Trái Đất bao gồm các lớp cầu đồng tâm đắp lên nhau, và coi như tại tâm Trái Đất là một chất điểm có khối lượng của Trái Đất tương tác với các vật trên bề mặt Trái Đất.



$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{F_{hd}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\overrightarrow{g} = -\dfrac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}\\ r = R + h \text{ (với } h \text{ là độ cao của vật tính từ bề mặt Trái Đất)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

3. Trường hấp dẫn, trường trọng lực

Xung quanh một vật có khối lượng luôn tồn tại một trường hấp dẫn. Trường hấp dẫn này tác dụng lên những vật khác có khối lượng đặt trong nó.

Trường hấp dẫn bao quanh Trái Đất, gần bề mặt Trái Đất gọi là trường trọng lực.

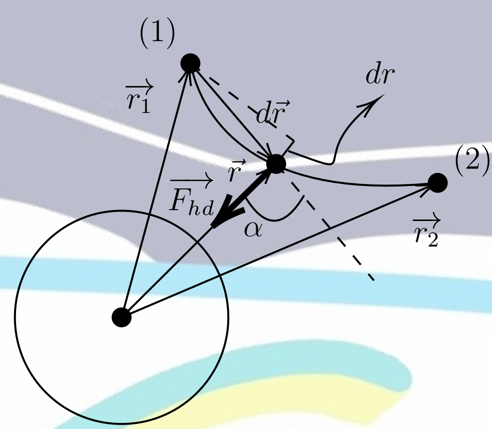
III. Thế năng hấp dẫn

1. Công của lực hấp dẫn

Công của một lực viết dưới dạng vi phân được tính bởi biểu thức sau:

$$dA = \overrightarrow{F} d\vec{r}$$

Theo định nghĩa đó, ta có thể viết công thức tính công của lực hấp dẫn.



$$dA_{hd} = \overrightarrow{F_{hd}} d\vec{r}$$

$$\Rightarrow dA_{hd} = -\frac{GMm}{r^2}(\vec{e_r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow dA_{hd} = -\frac{GMm}{r^2}|\vec{e_r}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos(\pi - \alpha)$$

$$\Rightarrow dA_{hd} = \frac{GMm}{r^2}|\vec{e_r}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha$$

mà $\begin{cases} |\vec{e_r}| = 1 \\ |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha = -dr (\text{Do từ hình ta có } r_1 > r \text{ nên } dr \text{ âm}) \end{cases}$

$$\Rightarrow dA_{hd} = -\frac{GMm}{r^2}dr$$

Tích phân hai vế, ta được :

$$\int_0^{A_{hd}} dA_{hd} = -GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow A_{hd} = GMm(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}) \tag{1}$$

Nhận xét : Từ (1), ta thấy công của lực hấp dẫn không phụ thuộc vào đường đi mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối. Vì vậy, lực hấp dẫn là một lực thế.

2. Thế năng hấp dẫn

*Nhắc lại : Thế năng của một vật có thể được tính bằng công dịch chuyển vật đó từ mốc thế năng ($U = 0$) đến vị trí đang xét (vị trí có thế năng U). Trong trường hấp dẫn, ta coi như thế năng ở vô cùng $U(\infty) = 0$.

Do lực hấp dẫn là một lực thế, ta áp dụng định lý biến thiên thế năng :

$$-dU = dA_{hd}$$

$$\Rightarrow dU = \frac{GMm}{r^2}dr$$

$$\Rightarrow \int_{U_\infty}^{U} dU = GMm \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow U = -\frac{GMm}{r}$$

IV. Bảo toàn cơ năng

Do vật chuyển động trong trường hấp dẫn (trường lực thế) nên cơ năng của vật bảo toàn :

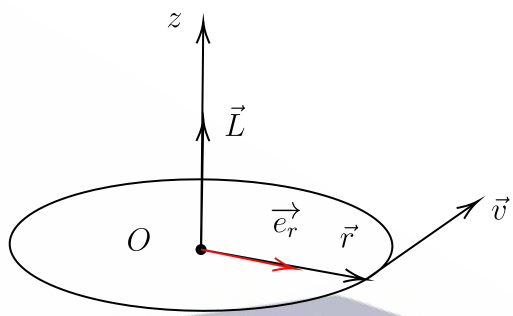
$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} + (\frac{-GMm}{r}) = const$$

V. Bảo toàn momen động lượng

1. Vector momen động lượng

Một vật chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ có động lượng $\vec{p} = m\vec{v}$, bán kính xác định từ trục O là $\vec{r}$ thì có momen động lượng đối với trục O là $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



2. Định lý momen động lượng

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} + \vec{M}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Vậy đạo hàm momen động lượng theo thời gian cho ta momen lực

3. Bảo toàn momen động lượng trong trường hấp dẫn

Momen lực hấp dẫn được tính như sau :

$$\vec{M_{hd}} = \vec{r} \times \vec{F_{hd}}$$

$$\Rightarrow \vec{M_{hd}} = \vec{r} \times \frac{-GMm}{r^2}\vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \vec{M_{hd}} = \frac{GMm}{r^2}(\vec{r} \times (-\vec{e_r}))$$

Mà $\vec{r} \times (-\vec{e_r}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{M_{hd}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{const}$$

VI. Vector bất biến Laplace-Runge-Lenz

Xét 1 vật m chỉ chịu tác dụng bởi lực hấp dẫn của một vật M đứng yên ($M >> m$). Ta có:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$$
$$\Leftrightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r \times \vec{L}$$
$$\Leftrightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r \times mr^2\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z$$
$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} = -GMm\frac{d\theta}{dt}(-\vec{e}_\theta)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L}\right) - GMm\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{L}) - GMm\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[(\vec{v} \times \vec{L}) - GMm\vec{e}_r\right] = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{GMm}(\vec{v} \times \vec{L}) - \vec{e}_r = \overrightarrow{const}$$

Đặt $\overrightarrow{A} = \frac{1}{K}(\vec{v} \times \vec{L}) - \vec{e}_r$. Vector $\vec{A}$ được gọi là vector bất biến Laplace - Runge - Lenz.

Từ phương trình dạng vector của vector bất biến $\overrightarrow{A}$, ta biến đổi lại :

$$\overrightarrow{A} = \frac{1}{GMm}(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{L}) - \overrightarrow{e_r} = \frac{1}{GMm}(\overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_\theta}) \times \overrightarrow{L} - \overrightarrow{e_r}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A} = \frac{-1}{GMm}v_r L\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{L}{GMm}v_\theta - 1\right)\overrightarrow{e_r}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow (\vec{A})^2 &= \left(\frac{v_r L}{GMm}\right)^2 + \left(\frac{L}{GMm}v_\theta - 1\right)^2 \\
&= \left(\frac{v_r L}{GMm}\right)^2 + \left(\frac{v_\theta L}{GMm}\right)^2 - 2\frac{v_\theta L}{GMm} + 1 \\
&= \left(\frac{vL}{GMm}\right)^2 - 2\frac{v_\theta L}{GMm} + 1 \\
&= \frac{2L^2}{G^2M^2m^3}\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm^2 v_\theta}{L}\right) + 1 \\
&= \frac{2L^2}{G^2M^2m^3}\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm^2 v_\theta}{mv_\theta r}\right) + 1 \\
&= \frac{2L^2}{G^2M^2m^3}\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}\right) + 1 \\
&= \frac{2L^2}{G^2M^2m^3}E + 1 \\
\Rightarrow A &= \sqrt{1 + \frac{2L^2}{G^2M^2m^3}E}
\end{aligned}
$$

Đây chính là độ lớn của vector bất biến Laplace-Runge-Lenz

VII. Phương trình quỹ đạo

Ta có:

$$\Rightarrow \overrightarrow{A} = \frac{-1}{GMm}v_r L\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{L}{GMm}v_\theta - 1\right)\overrightarrow{e_r}$$

Nhân vô hướng hai vế của biểu thức trên cho $\overrightarrow{r}$, ta được :

$$Ar\cos\theta = \left(\frac{Lv_\theta}{GMm} - 1\right)r = \left(\frac{L^2}{GMm^2 r} - 1\right)r$$

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1 + A\cos\theta}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + A\cos\theta}$$

với $\begin{cases} p \text{ là thông số quỹ đạo} \\ A = e \text{ là tâm sai quỹ đạo} \end{cases}$

Quỹ đạo của vật là quỹ đạo hyperbol khi:

$$A > 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{2L^2}{G^2M^2m^3}E} \Rightarrow E > 0$$

Quỹ đạo của vật là quỹ đạo parabol khi:

$$A = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{2L^2}{G^2M^2m^3}E} \Rightarrow E = 0$$

Quỹ đạo của vật là quỹ đạo elip khi:

$$0 < A < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{1 + \frac{2L^2}{G^2M^2m^3}E} < 1 \Rightarrow E < 0$$

Quỹ đạo của vật là quỹ đạo tròn khi:

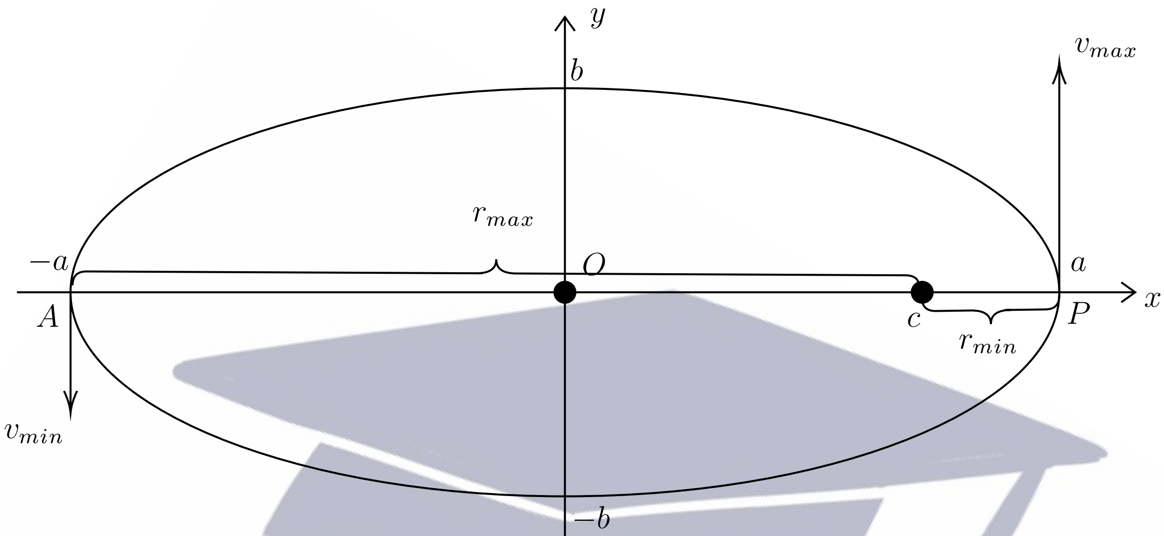
$$A = 0 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{2L^2}{G^2M^2m^3}E} \Rightarrow E = \frac{-G^2M^2m^3}{2L^2}$$

VIII. Ba định luật Kepler

Ba định luật Kepler được tìm thấy bởi nhà thiên văn học Johannes Kepler thông qua quan sát các chuyển động của các hành tinh trong hệ Mặt Trời. Ba định luật này sau đó được chứng minh bởi Isaac Newton dựa trên định luật vạn vật hấp dẫn cũng như các định luật về chuyển động của ông. Một cách tương đối, ta coi chuyển động của các hành tinh trong hệ Mặt Trời là chuyển động của chất điểm và sẽ chứng minh được ba định luật Kepler. Dẫu cho các định luật Kepler chỉ mang tính tương đối khi bỏ qua sự nhiễu loạn giữa các hành tinh, nó vẫn đóng vai trò nhất định trong thiên văn học và vật lý học, cũng như ứng dụng cho các vệ tinh nhân tạo.

1. Định luật Kepler I

Định luật I Kepler được phát biểu như sau: "Quỹ đạo của các hành tinh là elip với Mặt Trời nằm tại một tiêu điểm."



Áp dụng định luật bảo toàn động lượng, ta có :

$$L_P = L_A$$

$$\Rightarrow mv_{max}r_{min} = mv_{min}r_{max}$$
$$\Rightarrow v_{min} = \frac{v_{max}r_{min}}{r_{max}}$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng :

$$E_P = E_A$$

$$\Rightarrow \frac{mv_{max}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{min}} = \frac{mv_{min}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{max}}$$

$$\Rightarrow \frac{mv_{max}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{min}} = \frac{m(\frac{v_{max}r_{min}}{r_{max}})^2}{2} - \frac{GMm}{r_{max}}$$
$$\Rightarrow \frac{mv_{max}^2}{2}(1 - (\frac{r_{min}}{r_{max}})^2) = GMm(\frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{r_{max}})$$
$$\Rightarrow v_{max}^2 = 2GM(\frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max}r_{min}})(\frac{r_{max}^2}{r_{max}^2 - r_{min}^2})$$
$$\Rightarrow v_{max}^2 = \frac{2GMr_{max}}{r_{min}(r_{max} + r_{min})}$$

mà $\begin{cases} r_{min} = a - c \\ r_{max} = a + c \end{cases}$

$$\Rightarrow v_{max}^2 = \frac{2GM(a+c)}{2a(a-c)} = \frac{GM(a+c)}{a(a-c)}$$

Thế ngược vào $E_P = \dfrac{mv_{max}^2}{2} - \dfrac{GMm}{r_{min}}$, ta có :

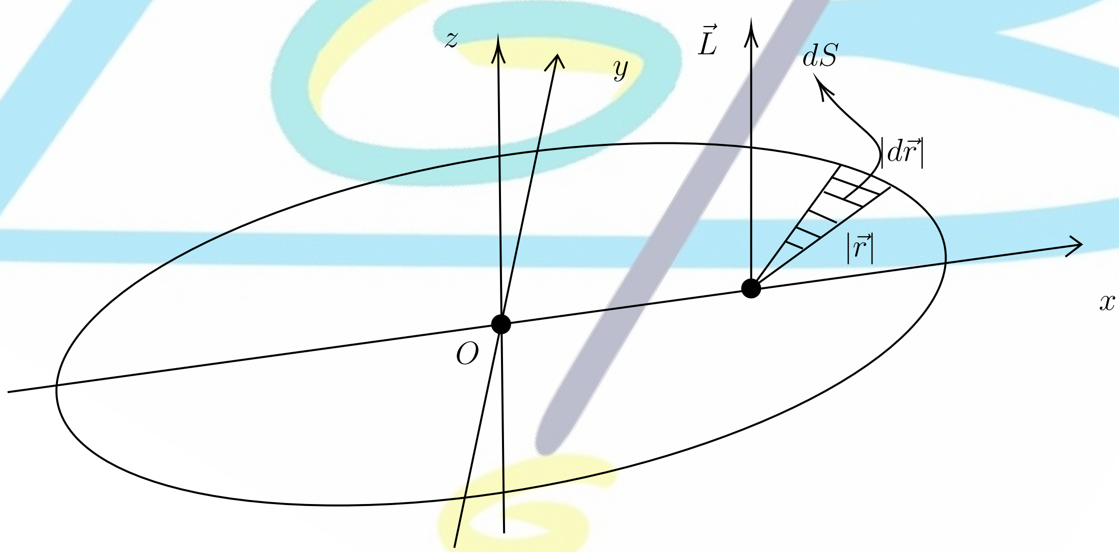
$$E = \frac{m}{2}\frac{GM(a+c)}{a(a-c)} - \frac{GMm}{a-c}$$

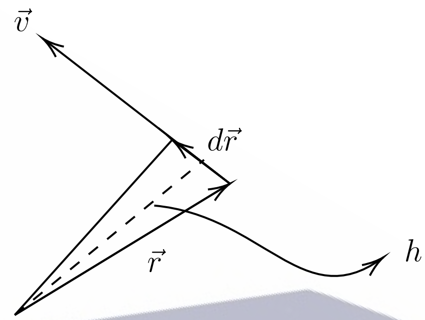
$$\Rightarrow E = \frac{GMm}{a-c}(\frac{a+c}{2a} - 1)$$

$$\Rightarrow E = \frac{-GMm}{2a} < 0 \text{ (đpcm)}$$

2. Định luật Kepler II

Định luật II Kepler phát biểu như sau: "Đường nối hành tinh và Mặt Trời quét qua những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau."





Ta có momen động lượng của vật là :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mvh\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow L = mvh$$

Xét một khoảng thời gian dt, diện tích quét được là dS, ta có :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\frac{|d\vec{r}|h}{dt} = \frac{1}{2}vh$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\frac{mvh}{m} = \frac{1}{2}\frac{L}{m}$$

mà $L = const$ trong trường hấp dẫn

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = const \text{ (đpcm)}$$

3. Định luật Kepler III

Định luật III Kepler được phát biểu như sau: "Bình phương chu kỳ quỹ đạo của hành tinh tỷ lệ với lập phương bán trục lớn của quỹ đạo elip của hành tinh đó."

Từ định luật hai Kepler, ta có :

$$v_S = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\frac{L}{m}$$

mà $L = L_p = mv_{max}r_{min} = m\sqrt{\frac{GM(a+c)}{a(a-c)}}(a-c)$

$$\Rightarrow v_S = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM(a+c)}{a(a-c)}}(a-c)$$

Chu kì quỹ đạo có thể được tính như sau :

$$T = \frac{S_E}{v_S} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM(a+c)}{a(a-c)}}(a-c)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi a^{3/2} b}{\sqrt{GM(a^2-c^2)}}$$

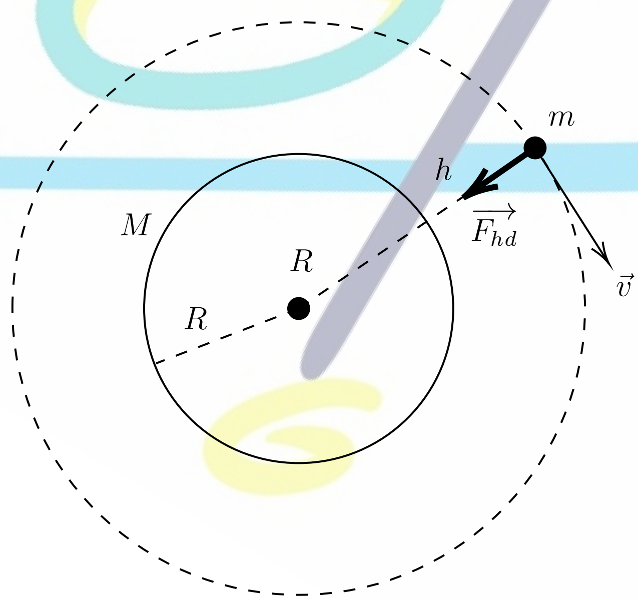
mà b $= \sqrt{a^2-c^2} \Rightarrow T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \text{ (đpcm)}$$

IX. Chuyển động trong trường hấp dẫn theo quỹ đạo tròn

Chuyển động của vật trong trường hấp dẫn theo quỹ đạo tròn thường bắt gặp ở các vệ tinh nhân tạo khi được phóng lên từ mặt đất và quay xung quanh Trái Đất.



1. Vận tốc

Khi chuyển động tròn, vật có một gia tốc hướng tâm.

$$|\overrightarrow{F_{hd}}| = F_{ht}$$

$$\Rightarrow \frac{GMm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$$

Đặt $r = R + h$, ta có :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

2. Chu kỳ quỹ đạo

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

3. Cơ năng

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} + (\frac{-GMm}{r})$$

$$\Rightarrow E = \frac{GMm}{2r} + (\frac{-GMm}{r})$$

$$\Rightarrow E = \frac{-GMm}{2r} = const$$

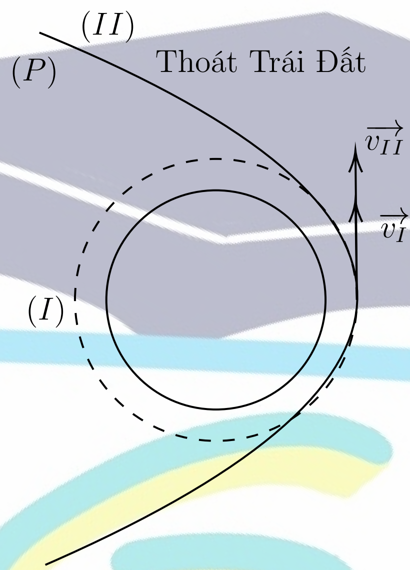
X. Vận tốc vũ trụ

Trong cuốn **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** (Các Nguyên lý Toán học của Triết lý về Tự nhiên) xuất bản năm 1687, Isaac Newton đã đề cập đến một ý tưởng giả định rằng một khẩu súng đại bác được đặt ở đỉnh của một ngọn núi rất cao vượt ra ngoài tầng khí quyển Trái Đất, và nếu lực từ khẩu súng đủ mạnh thì liệu nó có thể khiến viên đạn quay quanh Trái Đất, hoặc có thể thoát ra khỏi quỹ đạo quay quanh Trái Đất mà du hành trong vũ trụ hay không? Chúng ta hãy tìm hiểu tính thực tiễn của ý tưởng trên nhé.

1. Vận tốc vũ trụ là gì?

Trong tiếng Anh, thuật ngữ được sử dụng là "escape velocity", hay còn gọi là vận tốc thoát ly. Đây là vận tốc cần cung cấp cho một vật chuyển động tròn gần bề mặt hoặc thoát khỏi trường hấp dẫn của một vật thể thiên văn.

Đối với một vật thể trong Hệ Mặt Trời, ta có thể chỉ ra bốn cấp độ, lần lượt là vận tốc vũ trụ cấp I, II, III và IV.



2. Vận tốc vũ trụ cấp I

Vận tốc vũ trụ cấp I là vận tốc tối thiểu cần cung cấp cho một vật thể để nó tự chuyển động tròn xung quanh thiên thể chủ ở sát bề mặt thiên thể chủ. Khi này, lực hấp dẫn sẽ đóng vai trò là lực hướng tâm. Vật thể không bị rơi xuống bề mặt Trái Đất là nhờ lực quán tính li tâm trong chuyển động tròn.

$$|\overrightarrow{F_{hd}}| = F_{ht}$$

$$\Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv_I^2}{r}$$

$$\Rightarrow v_I = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

với $\begin{cases} \text{M là khối lượng thiên thể chủ} \\ \text{r là khoảng cách từ vật thể tới tâm thiên thể chủ} \end{cases}$

Trong trường hợp đối với Trái Đất, vận tốc tối thiểu để một vật chuyển động tròn xung quanh Trái Đất gần bề mặt Trái Đất là :

$$v_I = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} \approx 7,9km/s$$

Nếu vật thể có vận tốc vượt qua được vận tốc vũ trụ cấp I nhưng nhỏ hơn vận tốc vũ trụ cấp II, chúng sẽ bay vào không gian và trở thành những vệ tinh nhân tạo của Trái Đất.

Bonus : Trọng lượng của một phi hành gia trên trạm vũ trụ quốc tế được tính như sau :

$$\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{F_{hd}} + \overrightarrow{F_{qtlt}}$$

$$\overrightarrow{P'} = m\overrightarrow{a_{ht}} + m(-\overrightarrow{a_{ht}}) = \vec{0}$$

Vậy dù cho vẫn có lực hấp dẫn tương tác, các phi hành gia vẫn không trọng lực và có thể lơ lửng trong các khoang tàu.

3. Vận tốc vũ trụ cấp II

Vận tốc vũ trụ cấp II là vận tốc tối thiểu cho vật thoát khỏi trường hấp dẫn của thiên thể chủ. Khi thoát khỏi trường hấp dẫn (đi ra xa vô cùng), vận tốc giảm dần về 0, đồng thời thế năng cũng tiến đến 0. Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, ta có :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$\Rightarrow v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}v_I$$

Đối với một vật thể được phóng từ bề mặt Trái Đất để thoát khỏi trường hấp dẫn của Trái Đất thì vận tốc vũ trụ cấp II là :

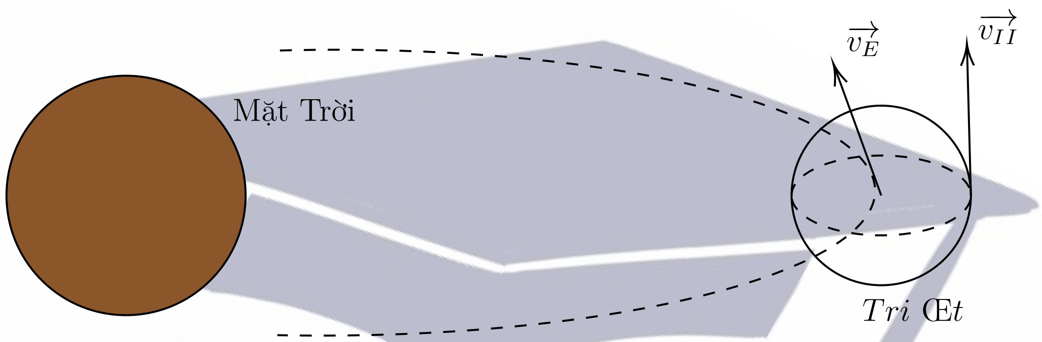
$$v_{II} = \sqrt{2}v_I \approx 11,2km/s$$

Quỹ đạo lúc này của vật thể là một parabol

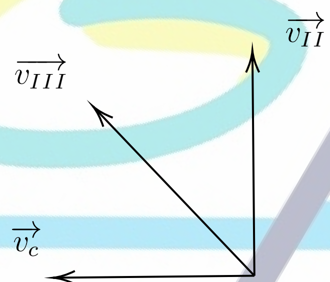
Nếu vận tốc của vật thể lớn hơn vận tốc vũ trụ cấp II nhưng nhỏ hơn vận tốc vũ trụ cấp III thì vật thể đó sẽ chuyển động xung quanh mặt trời.

4. Vận tốc vũ trụ cấp III

Áp dụng tương tự cách tính vận tốc vũ trụ cấp II với khối lượng thiên thiên chủ là khối lượng của Mặt Trời, bán kính r là khoảng cách từ Mặt Trời tới Trái Đất, ta tính được vận tốc để thoát khỏi Hệ Mặt Trời khi ở cách Mặt Trời $1AU$ và không chịu tác dụng của Trái Đất là $v = 42,1km/s$



Tuy nhiên, do Trái Đất tự chuyển động xung quanh Mặt Trời với vận tốc khoảng $v_E = 29,8km/s$ nên trên thực tế, ta chỉ cần phóng vật thể với vận tốc $v_c = 12,3km/s$ theo chiều chuyển động của Trái Đất. Kết hợp với điều kiện thoát ra khỏi trường hấp dẫn của Trái Đất, ta có thể tính được vận tốc vũ trụ cấp III (cần thiết để cung cấp cho một vật để thoát ra khỏi trường hấp dẫn của Mặt Trời).



Góc nhìn từ phải qua trái

Khi này, vận tốc vũ trụ cấp III là :

$$v_{III} = \sqrt{12,3^2 + 11,2^3} \approx 16,6(km/s)$$

5. Vận tốc vũ trụ cấp IV

Vận tốc vũ trụ cấp IV là vận tốc tối thiểu để cung cấp cho một vật từ bề mặt Trái Đất thoát khỏi trường hấp dẫn của Dải Ngân Hà.

$$v_{IV} \approx 595km/s$$

XI. Bài tập rèn luyện

Bài toán 1. Một hành tinh có khối lượng m chuyển động theo quỹ đạo elip xung quanh Mặt Trời khối lượng M sao cho khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất đến tâm Mặt Trời là r_{max} và r_{min}. Dùng các định luật bảo toàn để tính :

a) Năng lượng toàn phần E của hành tinh

b) Mômen động lượng L của hành tinh

c) Thông số quỹ đạo p và tâm sai e của hành tinh

Bài toán 2. Một vệ tinh nhân tạo chuyển động xung quanh Trái Đất theo quỹ đạo elip có tâm sai e, bán trục lớn a và chu kì T. Tính vận tốc dài của vệ tinh ở cận điểm và viễn điểm. So sánh độ lớn của hai vận tốc ấy.

Bài toán 3. Một vật thể đang chuyển động sát bề mặt của Trái Đất với vận tốc v. Sau đó, ta cung cấp cho vật một vận tốc Δv cùng hướng với v để vật chuyển động quanh Trái Đất ở độ cao h. Hãy tính Δv. Biết thời gian cung cấp là không đáng kể.

Bài toán 4. Sao đôi là hiện tượng hai ngôi sao cùng quay quanh một tâm chung, tâm chung chính là khối tâm của hệ hai ngôi sao đó. Khi quan sát trên bầu trời sao, ta thấy hai sao này lần lượt xuất hiện và che khuất lẫn nhau một cách tuần hoàn.

Ta xét hệ sao đôi gồm hai ngôi sao có khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 và chúng ở rất xa các ngôi sao khác, nên ta coi hai sao này là một hệ kín (tức là chỉ tương tác lẫn nhau bằng lực hấp dẫn giữa chúng) và bỏ qua tương tác hấp dẫn với các ngôi sao khác.

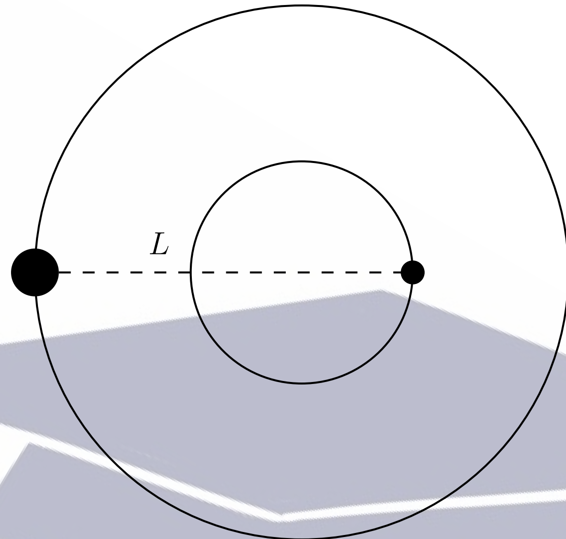
Biết kể từ khi hình thành, hai ngôi sao luôn chuyển động xung quanh tâm chung C với tốc độ góc không đổi và khoảng cách giữa hai ngôi sao là L.

a) Tìm khoảng cách từ mỗi sao đến tâm chung C

b) Tìm chu kì quay mỗi sao quanh tâm chung C

c) Quan sát từ Trái Đất, tâm chung C của hệ sao đôi đang chuyển động với vận tốc $\vec{v_0}$. Nếu ta coi hệ sao đôi này là hệ chất điểm, hãy tính tổng động năng của hệ.

d) Dựa theo ý (c), hãy tính cơ năng của hệ.



Bài toán 5. Đường hầm eo biển Manche là một đường hầm dưới eo biển Manche nối hai nước Anh và Pháp. Đây có thể coi là một kỳ quan thế giới hiện đại. Vậy bạn có tò mò liệu ở độ sâu tối đa hơn $170m$ thì lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một vật sẽ như thế nào không?

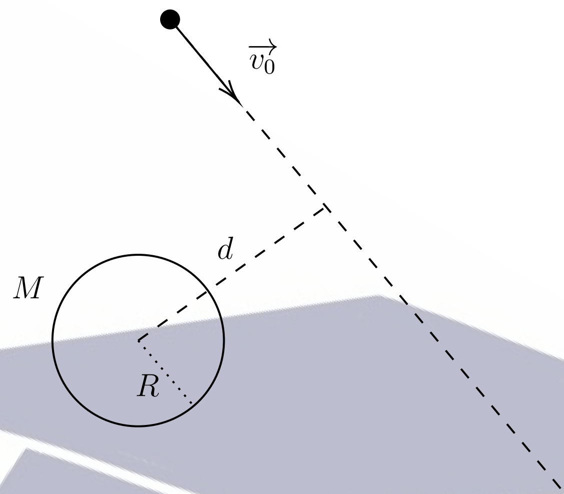
Ta khảo sát một bài toán như sau : Một vật được coi là chất điểm có khối lượng m nằm bên trong Trái Đất, cách tâm Trái Đất khoảng cách $r < R$. Bỏ qua mọi tác động khác ngoại trừ lực hấp dẫn. Giả sử khối lượng của Trái Đất phân bố đồng đều.

a) Hãy tính lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên vật đó.

b) Hãy tính thế năng của hệ vật và Trái Đất khi đó.

c) Giả sử cung cấp cho vật một vận tốc $\overrightarrow{v_0}$ vuông góc với phương bán kính. Hãy tính độ lớn của $\overrightarrow{v_0}$ để vật chuyển động tròn với tâm quỹ đạo là tâm Trái Đất.

Bài toán 6. Một con tàu vũ trụ lúc đầu có vận tốc $\overrightarrow{v_0}$ so với một hành tinh và đang ở rất xa hành tinh, không mở động cơ và bay đến gần hành tinh này với khoảng nhắm d như hình vẽ theo quỹ đạo hyperbol. Biết hành tinh có khối lượng M,bán kính R và không có khí quyển, khối lượng m của tàu rất nhỏ so với khối lượng của hành tinh và trong quá trình chuyển động tàu không bị chạm vào bề mặt hành tinh. Coi hệ gồm con tàu và hành tinh là hệ cô lập.



Hãy xác định :

a) Góc lệch θ giữa phương chuyển động của tàu khi tàu đã bay qua, ra xa hành tinh và phương ban đầu.

b) Điều kiện để tàu không bị chạm vào bề mặt hành tinh. Trong trường hợp thỏa mãn điều kiện đó, với con tàu có tốc độ ban đầu $\overrightarrow{v_0}$ cho trước, hãy xác định góc lệch θ cực đại và độ biến thiên động lượng cực đại của tàu sau khi đã bay qua và ra xa hành tinh.

XII. Đáp án tham khảo

Bài toán 1.

a) Do hành tinh chuyển động theo quỹ đạo elip nên ta có :

$$r_{max} + r_{min} = 2a$$

Năng lượng toàn phần của hành tinh là :

$$E = \frac{-GMm}{2a} = \frac{-GMm}{r_{max} + r_{min}}$$

b) Do hành tinh chuyển động trong trường hấp dẫn nên mômen động lượng L bảo toàn. Vì vậy, ta chỉ cần xét mômen động lượng L ở điểm cực cận hoặc cực viễn.

Xét hành tinh đang ở điểm cực cận, ta có :

$$\frac{mv_{max}^2}{2} + \frac{-GMm}{r_{min}} = \frac{-GMm}{2a}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{2GM(\frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{2a})}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{2GM(\frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{r_{min} + r_{max}})} =$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{2GM(\frac{r_{max}}{r_{min}(r_{min} + r_{max})})}$$

Mômen động lượng L của hành tinh là :

$$L = mv_{max}r_{min} = m\sqrt{\frac{2GMr_{max}r_{min}}{r_{max} + r_{min}}}$$

c) Thông số quỹ đạo p của hành tinh là :

$$p = \frac{L^2}{GMm^2} = \frac{2r_{max}r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

Tâm sai e của hành tinh là :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{G^2M^2m^3}E}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 - 4r_{max}r_{min}}$$

Bài toán 2.
Để giải quyết bài toán này, thực chất ta chỉ cần thêm một số kiến thức bên toán học.
Tâm sai của một hình elip được tính là:

$$e = \frac{c}{a}$$

Diện tích của hình elip là:

$$S = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1 - e^2}$$

Trong quá trình chứng minh định luật II Kepler, ta biết rằng:

$$v_S = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\frac{L}{m} = const$$

$$\Rightarrow \frac{S}{T} = \frac{1}{2}\frac{mvr}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T} = \frac{vr}{2}$$

Vận tốc tại điểm cực cận $r = a - c = a(1-e)$ là:

$$v_{max} = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

Vận tốc tại điểm cực viễn $r = a + c = a(1+e)$ là:

$$v_{min} = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

So sánh độ lớn hai vận tốc:

$$\frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{1+e}{1-e} > 1$$

Bài toán 3.

Gọi $v_1 = v + \Delta v$ là vận tốc của vật khi vừa được cung cấp vận tốc Δv.

Gọi v_2 là vận tốc của vật khi đang ở độ cao h.

Nhận xét: đây là một bài toán không quá khó, nhưng cần lưu ý có thể bị bẫy ở một điểm như sau. Khi cung cấp cho vật một lượng Δv thì hành động này không bảo toàn cơ năng của vật. Vì vậy, nhiều bạn có thể nhầm lẫn và tính $\Delta v = v_2 - v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} - \sqrt{\frac{GM}{R}} < 0$. Đây là một cách làm sai. Ta phải tính $\Delta v = v_1 - v$.

Với v, ta có thể tính dễ dàng như sau :

$$|F_{hd}| = F_{ht}$$

$$\Rightarrow \frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Khi vật đã được cung cấp thêm một lượng Δv thì cơ năng vật trở thành:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{R}$$

Mặt khác, khi vật đạt độ cao h, cơ năng của vật là :

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{R+h}$$

Quá trình vật chuyển đổi quỹ đạo từ sát mặt đất lên độ cao h sau khi được cung cấp Δv là quá trình bảo toàn cơ năng. Vì vậy, ta có :

$$E_1 = E_2 = \frac{-GMm}{2(R+h)}$$

Khi này ta tính được v_1:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{-GMm}{2(R+h)}$$

$$\Rightarrow \frac{mv_1^2}{2} = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{2(R+h)}$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 2GM(\frac{1}{R} - \frac{1}{2(R+h)})$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2GM(\frac{1}{R} - \frac{1}{2(R+h)})}$$

Khi này, ta tính được $\Delta v = v_1 - v$

$$\Delta v = \sqrt{2GM(\frac{1}{R} - \frac{1}{2(R+h)})} - \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Bài toán 4.
a) Gọi r_1 là khoảng cách từ ngôi sao m_1 đến khối tâm chung C.
Gọi r_2 là khoảng cách từ ngôi sao m_2 đến khối tâm chung C.
Áp dụng công thức tính khối tâm của một hệ với mốc là từ ngôi sao m_1, ta được :

$$r_C = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot L}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

Đây cũng chính là khoảng cách từ ngôi sao m_1 đến khối tâm chung C:

$$r_1 = r_C = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

Khoảng cách từ ngôi sao m_2 đến khối tâm chung C:

$$r_2 = L - r_1 = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}$$

b) Vì hai ngôi sao đều có chung vận tốc góc ω nên chu kì quay của chúng cũng bằng nhau. Vì vậy, ta chỉ cần xét cho một ngôi sao bất kì. Xét ngôi sao m_1, ta có :

$$|\vec{F_{hd}}| = F_{ht}$$

$$\Rightarrow \frac{Gm_1m_2}{L^2} = m_1 a_{ht}$$

$$\Rightarrow \frac{Gm_2}{L^2} = \omega^2 r_1$$

$$\Rightarrow \frac{Gm_2}{L^2} = \omega^2 \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{G}{L^2} = \omega^2 \frac{L}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{L^3}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{L^3}}$$

Chu kì quay quanh khối tâm chung C của mỗi ngôi sao :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\sqrt{L^3}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}$$

c) Vận tốc của ngôi sao m_1 trong hệ quy chiếu khối tâm chung C cũng chính là vận tốc quay:

$$v_{1C} = \omega r_1 = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{L^3}} \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} = \sqrt{\frac{G}{L(m_1 + m_2)}} m_2$$

Tương tự, vận tốc của m_2 trong hệ quy chiếu khối tâm chung C là:

$$v_{2C} = \sqrt{\frac{G}{L(m_1 + m_2)}} m_1$$

Ta chứng minh một điều nhỏ sau. Trong hệ quy chiếu gắn với khối tâm, ta sẽ có $\overrightarrow{r_{CC}} = \overrightarrow{0}$. Vì vậy, ta có:

$$m_1\overrightarrow{r_{1C}} + m_2\overrightarrow{r_{2C}} = \overrightarrow{0}$$

Đạo hàm hai vế, ta được:

$$m_1\overrightarrow{v_{1C}} + m_2\overrightarrow{v_{2C}} = \overrightarrow{0}$$

Động năng của hệ trong hệ quy chiếu gắn với Trái Đất sẽ là :

$$K = K_1 + K_2 = \frac{m_1}{2}(\overrightarrow{v_{1C}} + \overrightarrow{v_0})^2 + \frac{m_2}{2}(\overrightarrow{v_{2C}} + \overrightarrow{v_0})^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{m_1v_{1C}^2 + m_1v_0^2}{2} + \frac{m_2v_{2C}^2 + m_2v_0^2}{2} + \overrightarrow{v_0}(m_1\overrightarrow{v_{1C}} + m_2\overrightarrow{v_{2C}})$$

mà $m_1\overrightarrow{v_{1C}} + m_2\overrightarrow{v_{2C}} = \overrightarrow{0}$

$$\Rightarrow K = \frac{m_1v_{1C}^2 + m_1v_0^2}{2} + \frac{m_2v_{2C}^2 + m_2v_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{m_1}{2}\frac{G}{L(m_1+m_2)}m_2^2 + \frac{m_2}{2}\frac{G}{L(m_1+m_2)}m_1^2 + \frac{v_0^2}{2}(m_1+m_2)$$

$$\Rightarrow K = \frac{Gm_1m_2}{2L(m_1+m_2)}(m_1+m_2) + \frac{v_0^2}{2}(m_1+m_2)$$

$$\Rightarrow K = \frac{Gm_1m_2}{2L} + \frac{v_0^2}{2}(m_1+m_2)$$

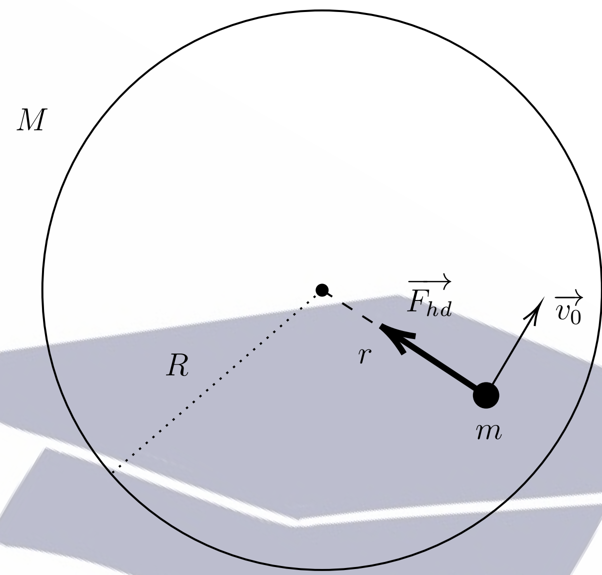
d) Cơ năng của toàn hệ :

$$E = K + U$$

$$\Rightarrow E = \frac{Gm_1m_2}{2L} + \frac{v_0^2}{2}(m_1+m_2) - \frac{Gm_1m_2}{L}$$

$$\Rightarrow E = \frac{v_0^2}{2}(m_1+m_2) - \frac{Gm_1m_2}{2L}$$

Bài toán 5.



a) Gọi $\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ là khối lượng riêng của Trái Đất ($\dfrac{kg}{m^3}$).

Ta đã biết lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật trên bề mặt Trái Đất là

$$\overrightarrow{F_{hd}} = \frac{-GMm}{R^2}\overrightarrow{e_r}$$

Áp dụng biểu thức ấy với $M = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ và R = r, ta được :

$$\overrightarrow{F_{hd}} = \frac{-G\rho\frac{4}{3}\pi r^3 m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{F_{hd}} = \frac{-G\dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\dfrac{4}{3}\pi r^3 m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{F_{hd}} = \frac{-GMm}{R^3}\overrightarrow{r}$$

Đây chính là biểu thức lực hấp dẫn tác dụng lên một vật khi vật cách tâm Trái Đất một đoạn $r < R$.

b) Chọn mốc thế năng là ở vô cùng.

Thế năng hấp dẫn khi vật cách tâm Trái Đất một đoạn $r < R$ là:

$$\int_0^U dU = \int_\infty^R \frac{GMm}{r^2}dr + \int_R^r \frac{GMmr}{R^3}dr$$

$$\Rightarrow U = \frac{-GMm}{R} + \frac{GMmr^2}{2R^3} - \frac{GMm}{2R}$$

$$\Rightarrow U = \frac{GMmr^2}{2R^3} - \frac{3GMm}{2R}$$

Ta thấy khi cho $r = R$ thì $U = \dfrac{-GMm}{R}$. Điều này là hợp lý.

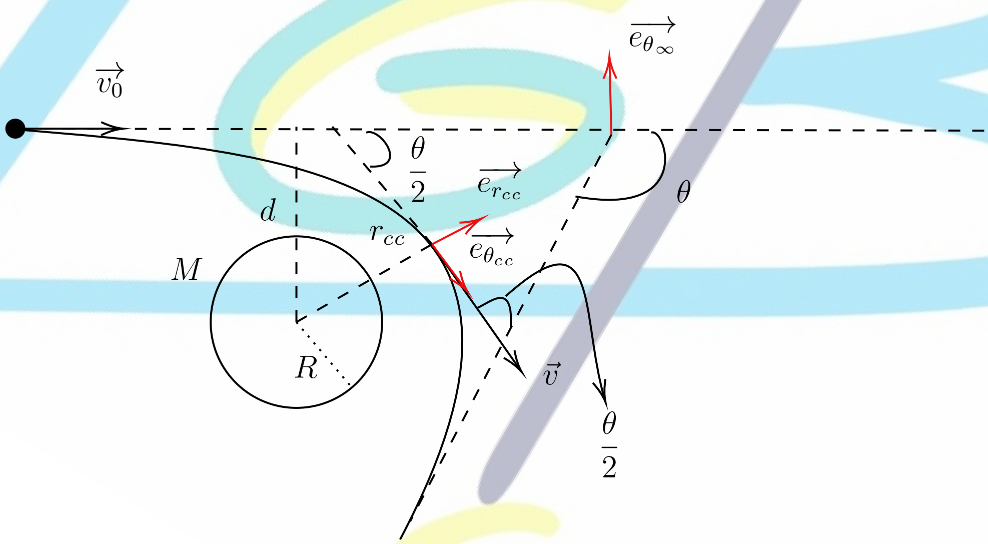
c) Ta có :

$$|\overrightarrow{F_{hd}}| = \overrightarrow{F_h t}$$

$$\Rightarrow \frac{GMmr}{R^3} = m\frac{v_0^2}{r}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GMr^2}{R^3}}$$

Bài toán 6.



a) Định luật II Newton dạng tổng quát cho ta hệ thức sau :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{-GMm}{r^2}\vec{e_r} \tag{1}$$

Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng đối với chuyển động trong trường hấp dẫn :

$$mv_0 d = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{d\theta}{dt}\frac{1}{v_0 d} \tag{2}$$

Thế (2) vào (1), ta được:

$$d\vec{p} = \frac{-GMm}{v_0 d} d\theta \vec{e_r} \tag{3}$$

*Lưu ý, ta lại có :

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e_\theta} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e_r}$$

$$\Rightarrow -d\theta\vec{e_r} = d\vec{e_\theta} \tag{4}$$

Thay (4) vào (3), ta có:

$$d\vec{p} = \frac{GMm}{v_0 d} d\vec{e_\theta}$$

Tích phân hai vế, ta được :

$$\int_{\vec{p_0}}^{\vec{p}} d\vec{p} = \frac{GMm}{v_0 d}\int_{\overrightarrow{e_{\theta\infty}}}^{\overrightarrow{e_{\theta cc}}} d\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_0} = \frac{GMm}{v_0 d}(\overrightarrow{e_{\theta\infty}} - \overrightarrow{e_{\theta cc}}) \tag{5}$$

Nhân vô hướng hai vế cho $\overrightarrow{e_{r_{cc}}}$, ta có:

$$mv_0 \sin\frac{\theta}{2} = \frac{GMm}{v_0 d}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{GM}{v_0^2 d} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \theta = 2\arctan\left(\frac{GM}{v_0^2 d}\right)$$

b) Nhân vô hướng (5) với $\overrightarrow{e_{\theta_{cc}}}$, ta được :

$$mv - mv_0\cos\frac{\theta}{2} = \frac{GMm}{v_0 d}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{7}$$

Viết lại định luật bảo toàn mô men động lượng cho ta biểu thức:

$$v_0 d = vr$$

$$\Rightarrow v = \frac{v_0 d}{r} \tag{8}$$

Từ (6), (7), (8), ta được biểu thức sau :

$$r = \sqrt{\frac{G^2M^2}{v_0^4} + d^2} - \frac{GM}{v_0^2}$$

Điều kiện để tàu không chạm bề mặt hành tinh là :

$$r = \sqrt{\frac{G^2M^2}{v_0^4} + d^2} - \frac{GM}{v_0^2} > R$$

Hay ta có thể viết như sau :

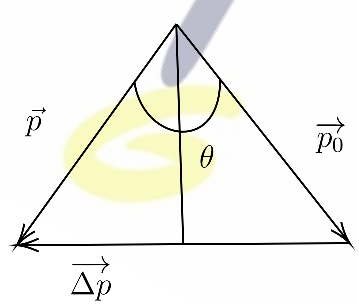
$$d > R\sqrt{1 + \frac{2GM}{Rv_0^2}} = d_{min}$$

Từ (6), ta thấy θ lớn nhất khi $d = d_{min}$:

$$\tan\theta_{max} = \frac{GM}{d_{min}v_0^2} = \frac{GM}{Rv_0^2\sqrt{1 + \frac{2GM}{Rv_0^2}}}$$

$$\Rightarrow \theta_{max} = 2\arctan\left(\frac{GM}{Rv_0^2\sqrt{1 + \frac{2GM}{Rv_0^2}}}\right)$$

Để tính Δp, ta làm như sau :



$$\Delta p = 2p_0 \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{2mv_0}{\sqrt{1+\cot^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{2mv_0}{\sqrt{1+\frac{R^2v_0^4+2GMv_0^2}{G^2M^2}}}$$