Tĩnh Học Vật Rắn

Ban chuyên môn Vật lý – The Gifted Battlefield

Xuất bản vào Ngày 31 tháng 10 năm 2021

Lời mở đầu

Tĩnh học là một nhánh của vật lý nghiên cứu về trạng thái cân bằng của các vật rắn (vật rắn tuyệt đối) dưới tác dụng của các lực cơ học. Tĩnh học có ứng dụng hết sức rộng rãi trong đời sống: từ những chiếc đồ chơi như con chuồn chuồn cân bằng, hay những con lật đật, cho đến những công trình kiến trúc vĩ đại. Trong chuyên đề này, chúng ta đi nghiên cứu sâu hơn về tác dụng của lực lên vật rắn, từ đó nghiên cứu điều kiện cân bằng tổng quát của vật rắn.

I. Về đối tượng nghiên cứu

Trước khi đi tìm hiểu chi tiết về tĩnh học vật rắn, chúng ta cần phải hiểu được một số khái niệm cơ bản liên quan đến đối tượng nghiên cứu của phần này – vật rắn:

1. Vật rắn

Vật rắn, hay chất rắn, là một trong bốn trạng thái cơ bản của vật chất và được đặc trưng bởi độ cứng và khả năng chống lại các lực tác dụng, theo phương vuông góc hoặc phương tiếp tuyến, lên bề mặt nó. Tuy nhiên, khi lực tác dụng là quá lớn, vật rắn có thể bị biến dạng ở một mức độ nào đó và gây ra những phức tạp không cần thiết trong quá trình khảo sát của Tĩnh học. Chính vì thế, trong lĩnh vực nghiên cứu này, chúng ta sẽ bỏ qua những biến dạng không đáng kể và chỉ khảo sát những phiên bản đã được "lý tưởng hóa" của nó - những vật rắn tuyệt đối. Vật rắn này là một tập hợp gồm vô số các chất điểm mà khoảng cách giữa một cặp điểm bất kì của nó luôn không đổi. Tập hợp này sẽ luôn giữ nguyên hình dạng và kích thước của nó theo thời gian, dù chịu tác dụng của ngoại lực. Chúng ta cũng có thể coi các chất điểm đó là các nguyên tử cho dễ hình dung vì trong tĩnh học, ta không khảo sát nội năng của vật rắn nên có thể bỏ qua chuyển động nhiệt (sự dao động hỗn độn) của các nguyên tử cấu thành vật. Một số ví dụ của vật rắn mà các bạn có thể thấy trong cuộc sống hằng ngày là cây thước, cái đĩa, cái thớt, cánh cửa, cái nêm, bánh xe tàu lửa,...

2. Khối tâm

Như đã nói ở trên, vật rắn là một tập hợp của các chất điểm mà mỗi phần tử đều có khối lượng nên nếu phải xét riêng từng phần tử sẽ rất phức tạp. May mắn thay, ta có thể coi khối lượng của toàn bộ hệ chất điểm đó tập trung tại 1 điểm và chỉ khảo sát điểm đó - hay còn gọi là khối tâm của vật (thường được gọi là C). Vị trí này cũng có thể được gọi là tâm quán tính hoặc vị trí trung bình của các chất điểm trong hệ. Trong tĩnh học vật rắn, khối tâm có mối liên hệ với tác dụng của ngoại lực lên vật. Nhưng tầm quan trọng thực sự của nó sẽ được đề cập tới trong những chuyên đề sau về cơ học vật rắn.

Công thức xác định khối tâm:

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{r_i}}{M}$$

Nếu phân tích r trên hệ trục tọa độ Descartes thì ta có tọa độ khối tâm của hệ:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{M} \\ y_C = \dfrac{\sum m_i y_i}{M} \\ y_C = \dfrac{\sum m_i y_i}{M} \end{cases}$$

Nếu vật rắn có khối lượng phân bố liên tục thì công thức trên có thể được viết lại dưới dạng tích phân:

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{1}{M} \oint \overrightarrow{r}\, dm$$

Và trong hệ trục tọa độ Descartes:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{M} \oint x.dm \\ y = \dfrac{1}{M} \oint y.dm \\ z = \dfrac{1}{M} \oint z.dm \end{cases}$$

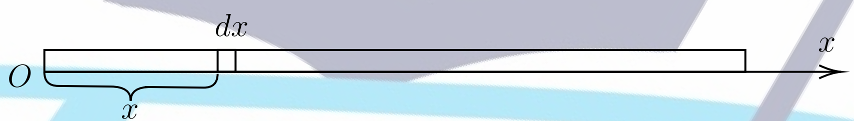
Trong đó:

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_C} : \text{vector vị trí của khối tâm } C \\ M : \text{tổng khối lượng vật rắn} \\ m_i, \overrightarrow{r_i} : \text{khối lượng, vector vị trí của phần tử thứ } i \end{cases}$$

Đối với các vật rắn có khối lượng phân bố đều và có tính đối xứng, khối tâm của vật sẽ nằm tại tâm đối xứng của vật.

Lưu ý: Khối tâm của một vật rắn có thể không nằm trên vật đó. Ví dụ như một sợi dây mảnh khối lượng phân bố đều bị uốn cong thành một vòng tròn. Khi ấy khối tâm sơi dây sẽ nằm tại tâm của vòng tròn.

Ví dụ 1: Tìm vị trí khối tâm của một thanh mảnh (bỏ qua tiết diện) chiều dài l khối lượng m phân bố đều theo chiều dài.



Đây là một vật rắn đồng chất có tính đối xứng nên ta có thể dễ dàng nhận ra khối tâm nằm trên trục đối xứng của thanh. Vậy nên vị trí khối tâm chính là trung điểm của thanh.

Tất nhiên, ta cũng có thể áp dụng công thức để tìm vị trí khối tâm như sau:
- Vì thanh là một vật rắn 1 chiều nên khối tâm nằm trên trục Ox trùng với phương của thanh như hình vẽ. Từ giả thiết khối lượng phân bố đều theo chiều dài ta có:

$$\frac{m}{l} = \frac{dm}{dx}$$

$$\Longrightarrow x_C = \frac{1}{m}\int_0^m x.dm = \frac{1}{m}\int_0^l \frac{m}{l}xdx = \frac{1}{l}\left(\frac{l^2}{2} - 0\right) = \frac{l}{2}$$

Ta thấy rằng tọa độ khối tâm trong cả hai cách làm đều nằm tại trung điểm thanh.

Ví dụ 2: Tìm vị trí khối tâm của một thanh mảnh OA chiều dài l khối lượng m có mật độ vật chất dài $\rho = \dfrac{dm}{dx} = ax + \dfrac{m}{l}$ (như hình vẽ của ví dụ 1)

Dễ thấy rằng khi x tăng thì mật độ vật chất trên thanh cũng tăng theo nên khối tâm vật sẽ bị lệch về phía đầu A chứ không còn nằm tại trung điểm của OA nữa.

Lúc này, ta có:

$$dm = \left(ax + \frac{m}{l}\right) dx$$

$$\Longrightarrow x_C = \frac{1}{m}\int xdm = \frac{1}{m}\int_0^l \left(ax^2 + \frac{m}{l}x\right) dx = \frac{al^3}{3m} + \frac{l}{2}$$

Và ta cũng thấy rằng nếu cho a=0 thì ta được kết quả của ví dụ 1.

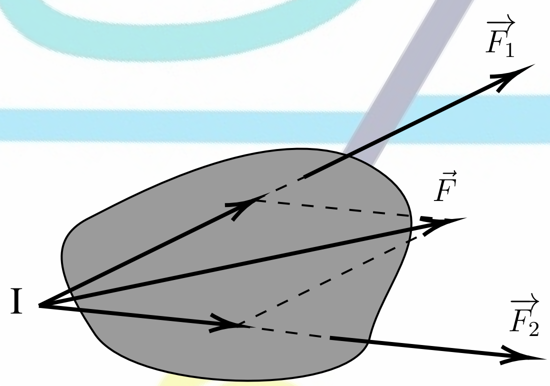
II. Tác dụng của lực lên vật rắn

1. Hợp lực

Trong bài 3 định luật Newton, chúng ta đã biết được cách tổng hợp các lực tác dụng lên một chất điểm bằng cách cộng các vector lực hoặc phân tích chúng lên 2 phương và cộng đại số. Các phương pháp này có thể áp dụng được đối với trường hợp chất điểm là vì thể tích của vật rất nhỏ nên có thể coi như mọi lực đều tác dụng vào cùng một điểm, thường là khối tâm của vật. Tuy nhiên, điều tương tự không thể xảy ra với vật rắn vì thể tích của vật là đáng kể nên điểm đặt của các lực có thể khác nhau. Để có thể tìm được hợp lực tác dụng lên vật rắn thì ta cần áp dụng một số quy tắc sau:

a. Đối với các lực đồng quy

Xét một vật rắn chịu tác dụng của hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ có giá đồng quy như hình vẽ và gọi $\overrightarrow{F}$ là hợp lực của $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$.

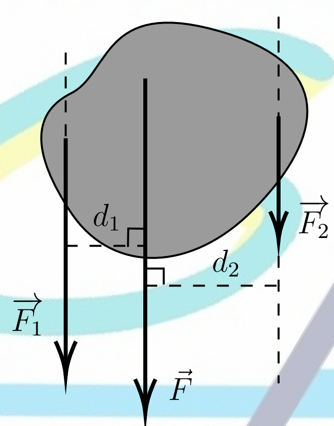


Lưu ý rằng tác dụng của một lực sẽ không thay đổi nếu ta trượt vector lực trên giá của nó. Vậy nên ta có thể trượt $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ trên giá của chúng đến điểm đồng quy (gọi là I) rồi sử dụng quy tắc hình bình hành để tìm hợp lực. Mở rộng ra, đối với trường hợp có nhiều hơn hai lực nhưng các lực vẫn đồng quy thì ta vẫn có thể trượt chúng trên giá đến điểm đồng quy và thực hiện cộng vector giống như với chất điểm.

b. Đối với các lực song song

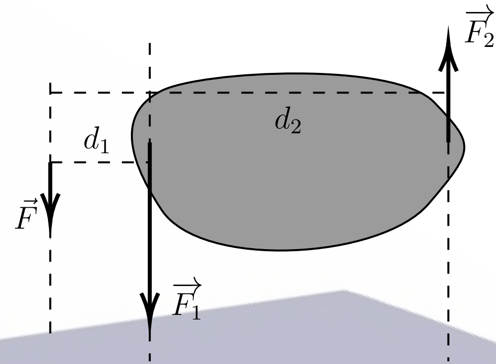
Xét một vật rắn chịu tác dụng của hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ song song cùng chiều. Khi này, hợp lực của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ là 1 lực $\overrightarrow{F}$ có giá song song với $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, chia khoảng cách giữa hai giá của hai lực thành phần thành những đoạn tỉ lệ nghịch với độ lớn của hai lực ấy. Đồng thời $\overrightarrow{F}$ cùng chiều với $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ và có độ lớn bằng tổng các độ lớn của hai lực đó.

$$\begin{cases} F = F_1 + F_2 \\ \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{d_2}{d_1} \end{cases}$$

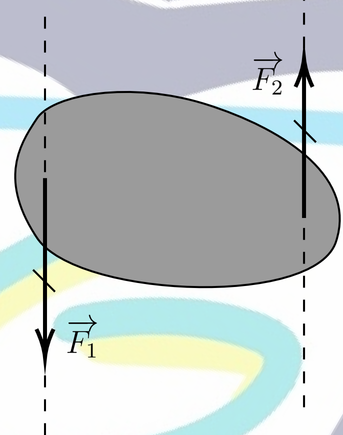


Xét một vật rắn chịu tác dụng của hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ song song ngược chiều và $F_1 > F_2$. Khi này, hợp lực của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ là một lực $\overrightarrow{F}$ có giá song song với $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, nằm ngoài khoảng hai giá của hai lực thành phần và chia ngoài khoảng cách giữa hai giá thành những đoạn tỉ lệ nghịch với độ lớn của hai lực ấy. Đồng thời $\overrightarrow{F}$ cùng chiều với lực lớn hơn ($\overrightarrow{F_1}$) và có độ lớn bằng hiệu các độ lớn của hai lực đó.

$$\begin{cases} F = F_1 - F_2 \\ \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{d_2}{d_1} \end{cases}$$



Một trường hợp đặc biệt là ngẫu lực. Đó là khi $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ có giá song song, ngược chiều, có độ lớn bằng nhau và cùng tác dụng vào một vật rắn thì ta không tìm được hợp lực.



2. Tác dụng của lực lên vật rắn

Đối với chất điểm, kết quả của tác dụng của lực thường không có gì đáng kể: vật sẽ thu một gia tốc mới và chuyển động của vật sẽ bị biến đổi. Tuy nhiên, khi xét tác dụng của lực trên một vật rắn, ta sẽ nhận thấy được ba hiện tượng: vật rắn sẽ chuyển động tịnh tiến, quay quanh một trục nào đó hoặc kết hợp cả hai chuyển động trên, tùy thuộc vào cách ta chọn hệ quy chiếu.

a. Vật rắn quay quanh trục cố định

Vật rắn có trục quay cố định chịu tác dụng của phản lực của trục quay nên khi có lực tác dụng lên vật, toàn bộ phần tử trong vật rắn sẽ quay quanh trục đó. Khi này, ta cần phải xét đến một đại lượng đặc trưng cho tác dụng làm quay đó của lực gọi là momen của lực.

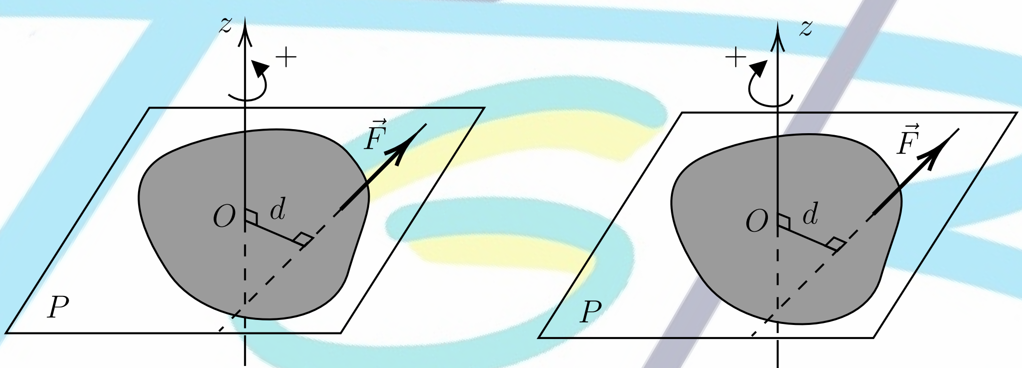
Xét một lực $\overrightarrow{F}$ tác dụng lên vật rắn và nằm trong mặt phẳng P vuông góc với trục quay Oz cố định của vật. Momen của lực $\overrightarrow{F}$ đối với trục Oz có độ lớn được xác định bằng:

$$M = F.d$$

Trong đó:

$$\begin{cases} F : \text{độ lớn của lực } \overrightarrow{F} \text{ tác dụng lên vật} \\ d : \text{khoảng cách từ trục quay tới giá của } \overrightarrow{F}\text{, còn gọi là cánh tay đòn của lực } \overrightarrow{F} \end{cases}$$

Dấu của M được xác định tùy theo cách ta chọn chiều quay nào của vật là chiều dương. Nếu tác dụng của lực là làm vật có xu hướng quay theo chiều dương ta chọn thì momen của lực dương, còn nếu lực làm cho vật có xu hướng quay ngược chiều dương thì momen của lực âm.



Chọn chiều ngược kim đồng hồ là chiều dương. Lực làm vật rắn có xu hướng quay theo chiều dương nên momen của lực dương.

Chọn chiều thuận kim đồng hồ là chiều dương. Lực làm vật rắn có xu hướng quay ngược chiều dương nên momen của lực âm.

Lực có tác dụng làm quay vật nếu độ lớn của momen của lực khác không ($M \neq 0$). Lực không có tác dụng làm quay vật nếu độ lớn của momen của lực bằng không ($M = 0$). Gồm có hai trường hợp:
- Lực có giá song song với trục quay.
- Lực có giá đi qua trục quay.

b. Vật rắn đối với trục cố định bất kỳ

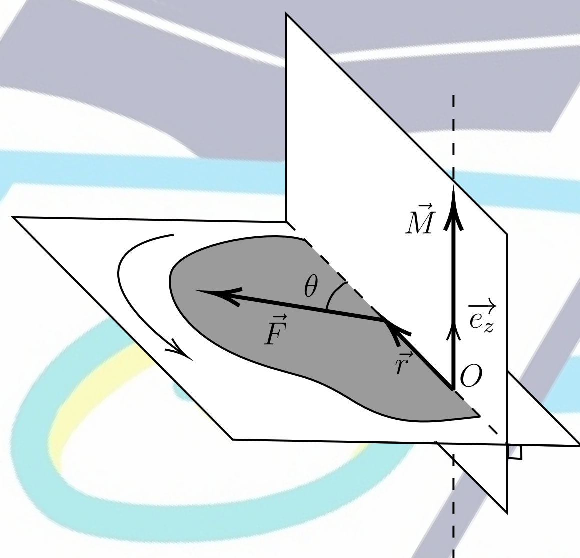
Đối với những vật có trục quay bất kỳ, tức những vật mà ta có thể chọn trục quay cho vật và trục quay đó có thể nằm trong hoặc nằm ngoài vật, tác dụng của lực sẽ khác một chút. Do vật không chịu tác dụng của phản lực của trục nên lúc này chuyển động của vật sẽ được phân tích thành hai thành phần bao gồm chuyển động quay quanh khối tâm và chuyển động của khối tâm.

Lúc này, momen lực được định nghĩa một cách tổng quát hơn bằng công thức:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = rF\sin\theta\overrightarrow{e_z}$$

Trong đó:

$$\begin{cases} \overrightarrow{r} : \text{vector khoảng cách từ trục quay mà ta xác định cho vật đến điểm đặt lực} \\ \overrightarrow{F} : \text{vector lực tác dụng lên vật} \end{cases}$$



Để xác định hướng của M, ta tịnh tiến vector $\overrightarrow{F}$ về gốc của vector $\overrightarrow{r}$, sau đó áp dụng quy tắc bàn tay phải: cong các ngón tay phải theo chiều quay từ $\overrightarrow{r}$ đến $\overrightarrow{F}$ thì ngón tay cái choãi ra sẽ là chiều của $\overrightarrow{M}$.

Nếu bạn để ý thì sẽ nhận ra một điều thú vị: trong cả hai công thức trên, thứ nguyên của moment lực là [lực].[độ dài], giống với thứ nguyên của công và năng lượng. Tuy nhiên moment lực khác với công nên trong hệ SI đơn vị của moment lực là $N.m$, còn đơn vị của công là $joule(J)$.

Một trường hợp đặc biệt trong phần b này là ngẫu lực. Đó là khi hai lực ngược chiều có cùng độ lớn, cùng phương nhưng không cùng giá tác dụng lên vật. Khi này, vật rắn sẽ quay quanh một trục đi qua khối tâm và vuông góc với mặt phẳng chứa ngẫu lực. Đồng thời ngẫu lực sẽ gây ra trên vật rắn một moment lực có phương song song với trục quay, chiều được xác định theo quy tắc bàn tay phải với chiều quay của vật và có độ lớn là:

$$M = F.d$$

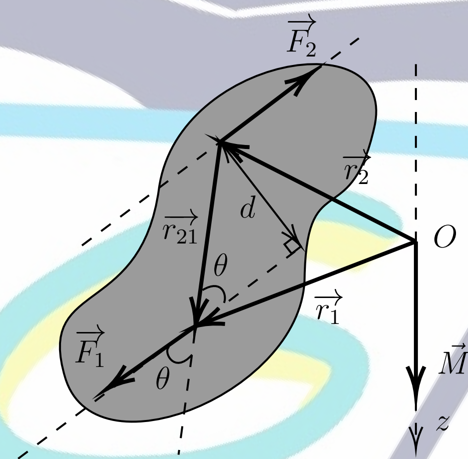
Trong đó:

$$\begin{cases} F \text{ là độ lớn của mỗi lực} \\ d \text{ là khoảng cách giữa hai giá của hai lực, còn gọi là cánh tay đòn của ngẫu lực.} \end{cases}$$

Độ lớn của moment lực do ngẫu lực tác dụng lên vật rắn không phụ thuộc vào cách ta chọn trục quay của vật và là như nhau đối với mọi điểm.

Chứng minh:

Xét một trục quay Oz bất kì có phương vuông góc với mặt phẳng chứa hai ngẫu lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$.



Gọi $\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_2}, \overrightarrow{M}$ lần lượt là moment lực do $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ gây ra trên vật rắn và tổng momnent lực của vật rắn đối với trục Oz.

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M} &= \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} \\ &= \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{F_2} \\ &= \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_2} \times (-\overrightarrow{F_1}) \\ &= (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \times \overrightarrow{F_1} \\ &= \overrightarrow{r_{21}} \times \overrightarrow{F_1} \end{aligned}$$

Suy ra độ lớn của $\overrightarrow{M}$ là:

$$M = F.r_{21} \sin\theta = F.d$$

III. Trọng tâm

1. Khái niệm

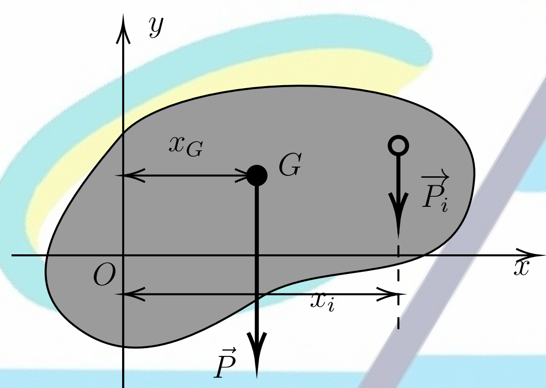
Khi xét đến tác dụng trọng lực lên một vật rắn nào đó, người ta nhận ra rằng có một điểm rất đặc biệt, tại đó trọng lực tác dụng lên từng phần tử của vật rắn như là trọng lực tác dụng một chất điểm có khối lượng bằng tổng khối lượng của vật rắn. Điều này cũng có thể suy ra từ quy tắc tổng hợp lực: tổng hợp các lực song song (trọng lực tác dụng lên từng phần tử) là một lực có giá trị bằng tổng các lực đó và có vị trí là điểm G được xác định bằng công thức:

$$x_G = \frac{\sum P_i.x_i}{P}$$

Vị trí của điểm đó được gọi là trọng tâm của vật.

Chứng minh:

Xét một vật rắn bất kì có khối lượng m chịu tác dụng của trọng lực (lực hấp dẫn). Từng phần tử của vật sẽ chịu tác dụng của trọng lực P_i khiến cho nó quay quanh một trục z nào đó và có momen là M_i đối với trục đó.



Tổng momen trọng lực tác dụng lên vật rắn là:

$$M = \sum M_i = \sum P_i.x_i \tag{1}$$

Nếu ta xét toàn vật rắn, thì theo Định luật II Newton tổng quát, vật rắn chỉ chịu tác dụng của ngoại lực làm thay đổi chuyển động của khối tâm của nó nên tổng momen trọng lực lên các phần tử bằng với momen của trọng lực P lên vật tại trọng tâm:

$$M = P.x_G \tag{2}$$

Từ (1), (2) ta có:

$$P.x_G = \sum P_i.x_i$$

$$\iff x_G = \frac{\sum P_i.x_i}{P}$$

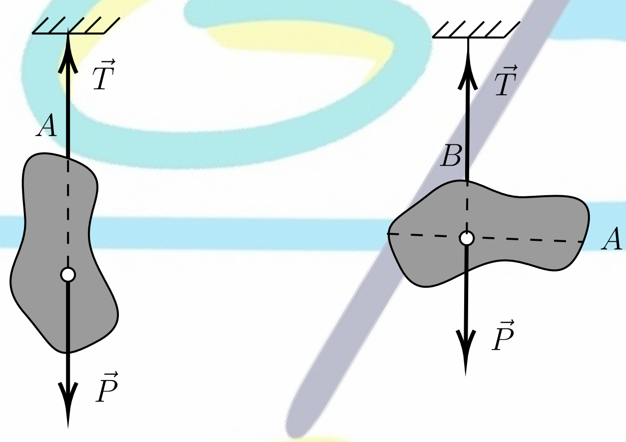
Ta thấy rằng, nếu gia tốc trọng trường không đổi thì công thức nên trọng tâm nằm trùng với khối tâm ($G \equiv C$). Trường hợp gia tốc trọng trường thay đổi theo độ cao, hoặc là trường hấp dẫn không đều, thì lúc này trọng tâm không còn trùng với với khối tâm nữa ($G \neq C$).

Trọng tâm của một số vật thể đối xứng, cũng giống như khối tâm, nằm tại tâm đối xứng.

Lưu ý: Tương tự với khối tâm, trọng tâm của một vật rắn có thể không nằm trên vật đó.

2. Cách xác định bằng thực nghiệm

Treo vật cần xác định trọng tâm lên bằng một sợi dây nhẹ không dãn. Do không có ngoại lực theo phương ngang nên để vật cân bằng (hay tổng hợp lực bằng $\overrightarrow{0}$) thì phương của sợi dây phải đi qua trọng tâm của vật .Kẻ một đường thẳng có phương đi qua sợi dây. Tiếp tục làm như trên một lần nữa, lần này treo vật tại một vị trí khác trên vật, ta sẽ được giao điểm của hai đường thẳng là trọng tâm của vật như hình vẽ.



3. Mặt chân đế

Trong đời sống hằng ngày, có lẽ chúng ta đã quá quen thuộc với những chiếc bàn học, chiếc ghế 4 chân, hay là những chiếc bàn ủi đồ,....Chúng đều có những bộ phận chân vững chãi khiến cho chúng đứng yên trên mặt sàn. Vậy điều gì khiến cho chúng có thể đứng chắc chắn như vậy? Điều gì khiến chúng nằm yên không bị đung đưa, giúp cho ta làm hầu như mọi việc hằng ngày? Lý do nằm ở mặt chân đế của chúng.

a. Khái niệm

Mặt chân đế là phần diện tích nhỏ chứa tất cả các điểm tiếp xúc của vật với mặt phẳng. Nó có thể là phần diện tích chân của chiếc bàn, ghế trong ví dụ ở trên, hay là phần đáy của chiếc bình. Nguyên lý của mặt chân đế thực sự rất đơn giản: để vật nằm cân bằng, thì trọng tâm G của vật, hay giá của trọng lực tác dụng lên vật, phải nằm trên mặt chân đế. Tưởng tượng một chiếc ghế nằm yên trên mặt sàn. Nếu chúng ta nghiêng chiếc ghế sao cho trọng tâm lệch khỏi mặt chân đế, thì chắc chắn rằng chiếc ghế sẽ tự động ngã xuống về vị trí cân bằng. Nếu bạn ngồi trên chiếc ghế đó và ngả về phía sau, thì sẽ có hai trường hợp xảy ra: bạn ngả ghế sao cho trọng tâm của bạn nằm trên diện tích tiếp xúc của chân ghế, bạn sẽ nằm cân bằng; ở trường hợp còn lại, trọng tâm của bạn và ghế không nằm trên diện tích tiếp xúc của ghê, thì bạn sẽ ngã ra sau hoặc về trước tuỳ theo vị trí của bạn.

b. Ứng dụng

Mặt chân đế có ứng dụng hết rộng rãi trong cuộc sống hằng ngày. Những công trình kiến trúc, những vật dụng hằng ngày, tất cả đều có mặt chân đế, tất cả đều tuân theo nguyên lý như trên để có thể nằm cân bằng trên mặt đất.

IV. Điều kiện cân bằng

1. Cân bằng của một vật là gì?

Khi nói đến cân bằng chúng ta thường nghĩ tới những vật dụng rất quen thuộc như một cuốn sách nằm yên trên bàn, hay một chiếc xe đứng yên trên mặt đất. Sự cân bằng đã rất quen thuộc đối với chúng ta. Chúng ta thường định nghĩa rằng cân bằng nghĩa là một vật chịu tác dụng các lực triệt tiêu nhau và đang đứng yên. Thật ra thì chúng ta không bao giờ hoàn toàn đúng yên cả (bạn có lẽ biết rằng chúng ta đang cùng Trái Đất chuyển động xung quanh Mặt Trời. Khó để có thể thấy được một vật nào đứng yên tuyệt đối). Vậy nên định nghĩa chính xác nhất cho sự cân bằng của một vật đó là vật đó phải có vận tốc không đổi theo thời gian ($\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{const}$) và có momen động lượng (sẽ được nhắc đến trong những chuyên đề sau) không thay đổi theo thời gian. Tuy nhiên, trong phần này chúng ta chỉ xét đến những vật rắn đứng yên so với hệ quy chiếu là mặt đất cho tiện dụng.

2. Điều kiện cân bằng của vật rắn chịu tác dụng của hai lực

Xét một vật rắn chịu tác dụng của 2 lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$.
Để vật cân bằng thì:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{0}$$
$$\iff \overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$$

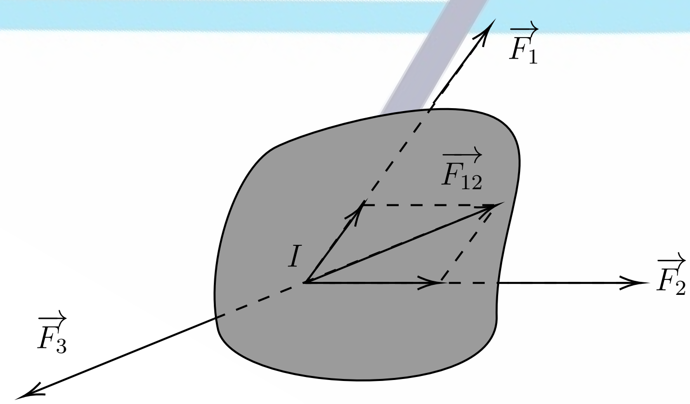
Vậy nên để vật cân bằng thì hai lực trên phải:
- Cùng phương.
- Cùng giá.
- Cùng độ lớn.
- Ngược chiều nhau.

Nhận xét: Nếu hai lực có cùng độ lớn và ngược chiều nhau nhưng không có cùng giá thì sẽ trở thành trường hợp ngẫu lực. Vật sẽ có xu hướng quay xung quanh một trục đi qua khối tâm của nó và vuông góc với mặt phẳng chứa ngẫu lực (vì theo định luật II Newton tổng quát $\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \overrightarrow{0}$ nên khối tâm của vật sẽ đứng yên) và momen lực của vật sẽ khác không ($M \neq 0$).

3. Điều kiện cân bằng của ba lực

Xét một vật nằm cân bằng chịu tác dụng của 3 lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$.
Theo định luật II Newton, ta có:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{0}$$
$$\iff \overrightarrow{F_3} = -(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) = -\overrightarrow{F_{12}}$$



Để vật cân bằng thì lực $\overrightarrow{F_{12}}$ phải có điều kiện cân bằng tương tự như trên, hay các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ phải đồng phẳng và phải đồng quy với nhau. Đồng thời, hợp lực của 2 lực bất kì phải cân bằng với lực còn lại.

4. Điều kiện cân bằng tổng quát

Giả sử vật rắn chịu tác dụng của n lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, ..., \overrightarrow{F_n}$ và các lực này gây ra đối với trục O bất kì momen lực $\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_2}, \overrightarrow{M_3}, ..., \overrightarrow{M_n}$.

Điều kiện tổng quát để vật cân bằng là:

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + ... + \overrightarrow{F_n} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + ... + \overrightarrow{M_n} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

5. Các dạng cân bằng

Mỗi vật trong trong trường hấp dẫn đều có một thế năng U.

Theo định luật bảo toàn năng lượng, ta có độ biến thiên thế năng bằng trừ công của lực thế:

$$dU = -dA_{\text{thế}} = -\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{r}$$

$$\iff \overrightarrow{F} = -\nabla U$$

Nếu vật cân bằng thì $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, hay:

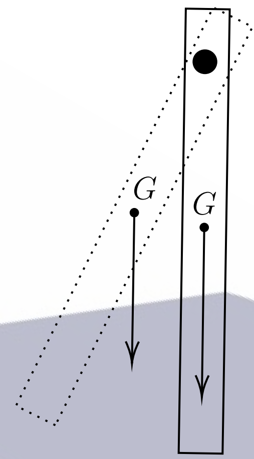
$$\nabla U = \overrightarrow{0}$$

$$\iff dU = 0$$

Suy ra $U = U_{min}$, $U = U_{max}$ hoặc $U = const$. Từ đó ta có 3 trường hợp có thể xảy ra như sau:

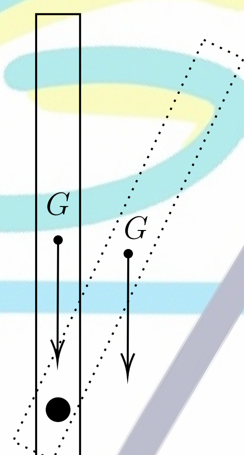
a. Cân bằng bền

Cân bằng bền là khi vật rắn có thế năng bé nhất trong tất cả các cách sắp xếp cho vật cân bằng (tức $U = U_{min}$). Khi này nếu ta dịch chuyển vật khỏi vị trí cân bằng (VTCB) một đoạn Δr rất nhỏ thì hợp lực tác dụng lên vật sẽ có xu hướng kéo vật về VTCB. Lúc này trọng tâm G của vật nằm ở vị trí thấp nhất.



b. Cân bằng không bền

Cân bằng không bền là khi vật rắn có thế năng lớn nhất trong tất cả các cách sắp xếp cho vật cân bằng (tức $U = U_{max}$). Khi ấy, nếu ta dịch chuyển vật ra xa VTCB một đoạn Δr rất nhỏ thì hợp lực tác dụng lên vật sẽ có xu hướng kéo vật ra xa VTCB. Do đó trọng tâm G của vật rắn nằm ở vị trí cao nhất.



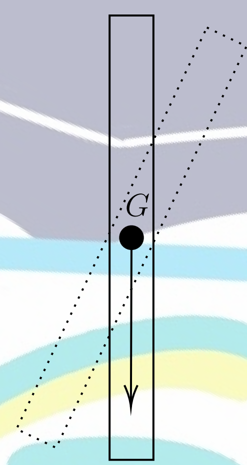
c. Cân bằng phiếm định

Cân bằng phiếm định là cân bằng mà khi ta dịch chuyển vật rắn một đoạn rất nhỏ Δr thì vật sẽ nằm cân bằng tại vị trí mới đó. Nói cách khác, thế năng của vật tại hai vị trí, VTCB và vị trí mới của vật, bằng nhau:

$$U(r_0) = U(r_0 + \Delta r) \quad (\Delta r \ll r_0)$$

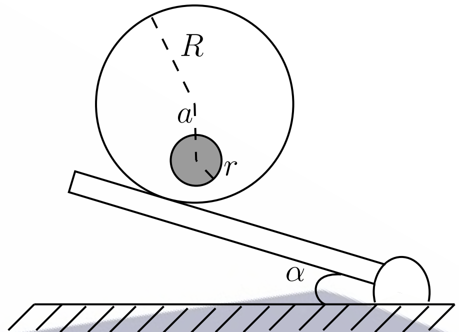
Hay:

$$U(x_0) = U(x_0 + \Delta x) \quad (\Delta x \ll x_0)$$

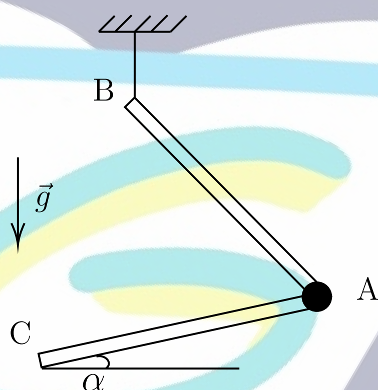


V. Bài tập tự luyện

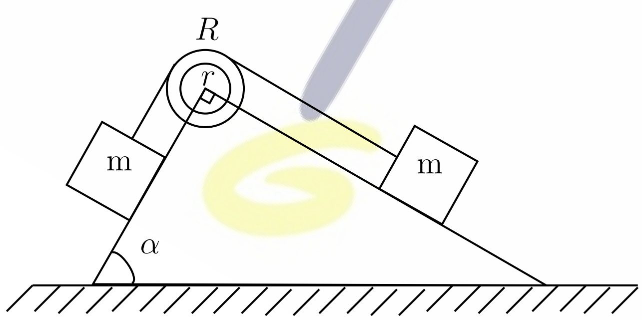
Bài 1: Trên một hình trụ bán kính R, tại vị trí cách trục một khoảng $a < R$, người ta khoan một lỗ hình trụ có bán kính $r < a$, trục của lỗ và của hình trụ song song với nhau như hình vẽ. Đổ vào trong lỗ đó một chất có khối lượng riêng bằng $n > 1$ lần khối lượng riêng của chất làm hình trụ. Hình trụ được đặt nằm trên một tấm ván nhẹ gắn cố định với sàn. Nhấc chậm một đầu của tấm ván lên. Cho hệ số ma sát giữa tấm ván và hình trụ là μ. Tìm góc nghiêng α cực đại của tấm ván với sàn để cho hình trụ còn nằm cân bằng.



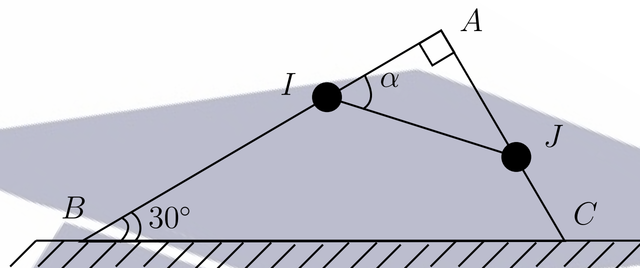
Bài 2: Một compa được ghép từ hai thanh BA và CA. Các thanh được coi như mảnh, đồng chất, tiết diện đều, có cùng khối lượng và chiều dài. Hai thanh liên kết chặt với nhau qua một chốt nhẹ tại A như hình vẽ. Đầu B của compa được treo bằng một sợi dây nhẹ, không dãn trong trọng trường có gia tốc rơi tự do là g. Gọi là góc tạo bởi giữa thanh CA và phương ngang. Xác định giá trị khi chốt A nằm ở vị trí cao nhất.



Bài 3: Trong hệ cơ học được biểu diễn như hình hình vẽ, một ròng rọc nhẹ có bán kính ngoài R và bán kính trong r lồng qua một trục hình trụ cố định. Hệ số ma sát nghỉ cực đại giữa ròng rọc và bề mặt của trục bằng μ. Bỏ qua ma sát giữa các vật nặng m_1 và m_2 với mặt phẳng nghiêng. Xác định giá trị của góc α để hệ ở trạng thái cân bằng.



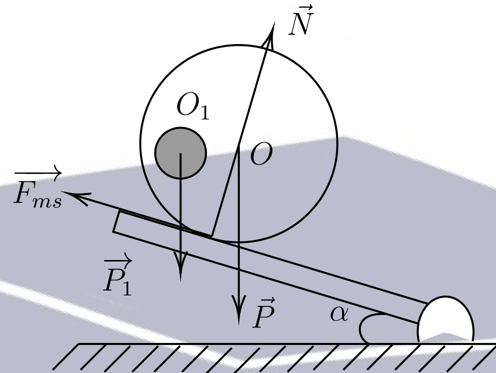
Bài 4: Một khung kim loại hình tam giác ABC vuông tại A, với góc nhọn $\hat{B} = 30°$ được đặt thẳng đứng, cạnh huyền nằm ngang. Trên cạnh AB có viên bi I trọng lượng P_1, cạnh AC có viên bi J trọng lượng P_2. Hai viên bi được nối với nhau bằng một thanh cứng, nhẹ, chiều dài l và có thể trượt không ma sát trên hai cạnh góc vuông. Xác định góc α tạo bởi AB và IJ khi hệ cân bằng và khảo sát độ bền của cân bằng này.



Bài 5: Một sợi dây được quấn một góc θ xung quanh một cột. Ta giữ một đầu và kéo nó với lực kéo T_0. Đầu còn lại được nối với một con thuyền. Nếu hệ số ma sát tĩnh giữa dây và cột là μ, lực căng lớn nhất mà dây có thể tác dụng lên thuyền là bao nhiêu với giả sử rằng dây không bị trượt xung quanh cột?

VI. Lời giải tham khảo

Bài 1:



Gọi m là khối lượng của hình trụ đồng chất không bị khoan, m_1 là khối lượng dư của phần lấp vào lỗ trống.

Ta có:

$$m_1 = \frac{\pi.r^2.h}{\pi.R^2.h}.(n-1)m = (\frac{r}{R})^2.(n-1)m$$

Khi góc α tăng thì hình trụ có thể trượt hoặc lăn.

- Gọi α_1 là góc lớn nhất mà hình trụ chưa trượt. Theo định luật II Newton, ta có:

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F_{ms}} = \overrightarrow{0} \quad (1)$$

Chiếu biểu thức trên lên phương song song với tấm ván, ta được:

$$(P + P_1)\sin\alpha_1 = F_{ms}$$

$$\iff (m+m_1)g\sin\alpha_1 = \mu(m+m_1)g\cos\alpha_1$$

$$\iff \tan\alpha_1 = \mu$$

- Gọi α_2 là góc lớn nhất mà hình trụ chưa lăn không trượt.

Khi này:

+ Lực ma sát phải nhỏ hơn giá trị lớn nhất của nó là $\mu(m+m_1)g\cos\alpha_2$ và bằng $(m+m_1)g\sin\alpha_2$.

+ Momen của lực ma sát đối với trục quay đi qua O bằng giá trị lớn nhất có thể của momen do trọng lực P_1, tương ứng với trường hợp đường thẳng OO_1 song song với phương ngang.

Suy ra phương trình cân bằng momen đối với trục quay đi qua O là:

$$\overrightarrow{M_P} + \overrightarrow{M_{P_1}} + \overrightarrow{M_N} + \overrightarrow{M_{F_{ms}}} = \overrightarrow{0}$$

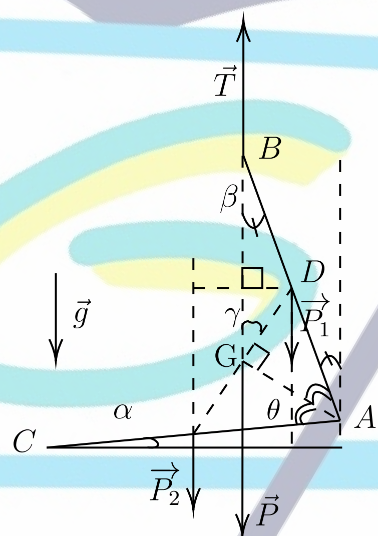
$$\iff R(m+m_1)g\sin\alpha_2 = am_1g$$

$$\iff \sin\alpha_2 = \frac{a}{R}.\frac{r^2(n-1)}{R^2+r^2(n-1)}$$

$$\iff \tan\alpha_2 = \frac{ar^2(n-1)}{\sqrt{R^2[R^2+r^2(n-1)]^2 - a^2r^4(n-1)^2}}$$

Ta thấy rằng nếu $\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2$ hay $\alpha_1 < \alpha_2$ thì khi tăng góc α, sự cân bằng trượt sẽ bị phá vỡ trước sự cân bằng momen quay nên để hình trụ vẫn nằm cân bằng trên tấm ván thì góc α phải bằng α_1. Ngược lại, nếu $\tan\alpha_1 > \tan\alpha_2$ hay $\alpha_1 > \alpha_2$ thì sự cân bằng momen quay sẽ bị phá vỡ trước sự cân bằng trượt nên góc α phải bằng α_2.

Bài 2:



Gọi G là trọng tâm của hệ hai thanh.
Khi hệ cân bằng thì G và B thẳng hàng.
Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{2}\sin\beta = GD\sin\gamma \\ GD = \dfrac{AB}{2}\sin\theta \end{cases}$$

Suy ra:

$$\sin\beta = \sin\theta.\sin\gamma$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}\sin\gamma &= \cos(\beta+\theta)\\ &= \cos\beta.\cos\theta - \sin\beta.\sin\theta\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\sin\beta = \cos\beta.\cos\theta.\sin\theta - \sin\beta.\sin^2\theta$$

$$\iff \tan\beta.(1+\sin^2\theta) = \sin\theta.\cos\theta$$

$$\iff \tan\beta = \frac{\sin\theta.\cos\theta}{2\sin^2\theta + \cos^2\theta}$$

$$\iff \tan\beta = \frac{1}{2\tan\theta + \cot\theta}$$

$$\iff \tan\beta \le \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{(Bất đẳng thức Cauchy)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $2\tan\theta = \cot\theta$ hay $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Khi chốt A nằm ở vị trí cao nhất thì góc β đạt cực đại $\Longrightarrow \tan\beta$ đạt giá trị cực đại.
Suy ra:

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Và:

$$\begin{cases}\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$$

Ta có:

$$\cos\alpha = \sin(2\theta+\beta)$$

Sau khi biến đổi thì biểu thức trên trở thành:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{3\sin\theta.\cos\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\\ &= 1\end{aligned}$$

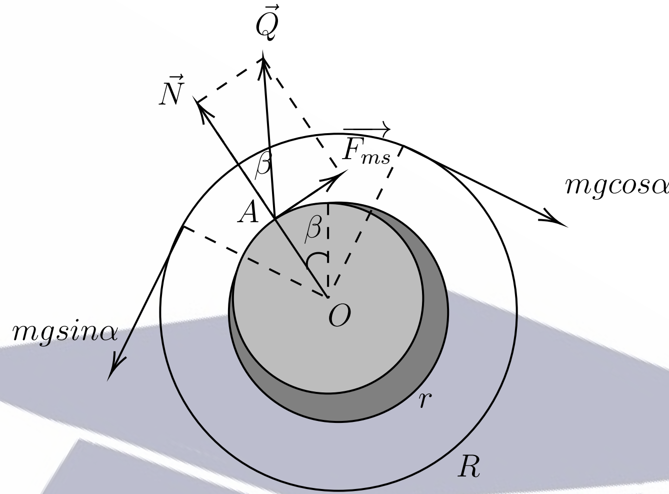
Ta suy ra được góc $\alpha = 0$.

Bài 3:

Hiển nhiên, khi không có ma sát trong trục của ròng rọc, các lực căng của sợi dây nối hai vật nặng là như nhau ở cả hai phía của ròng rọc, và bởi vậy hệ có thể ở trạng thái cân bằng chỉ khi nó hoàn toàn đối xứng, tức là khi $\alpha = \pi/4$. Nếu trong trục của ròng rọc có ma sát khô thì lực căng của sợi dây ở bên trái và bên phải của ròng rọc sẽ khác nhau và sẽ tồn tại cả một miền giá trị của góc α tại đó hệ ở trạng thái cân bằng. Ở đây, tất nhiên, ta xem rằng ma sát giữa sợi dây và ròng rọc rất lớn sao cho dây không bị trượt trên ròng rọc.

Để tìm ranh giới của miền cân bằng, ta cần khảo sát các lực tác dụng lên ròng rọc. Vì không có ma sát giữa các vật nặng và mặt phẳng nghiêng, nên khi cân bằng sức căng của sợi dây ở bên trái ròng rọc bằng $mg\sin\alpha$ và bên phải ròng rọc bằng $mg\cos\alpha$. Đây cũng là các lực mà sợi dây tác dụng lên ròng rọc như hình vẽ. Thành phần nằm ngang của hai lực này đều có độ lớn bằng $mg\cos\alpha.\sin\alpha$ và cân bằng nhau. Bởi vậy tổng vector của các lực căng của dây tác dụng lên ròng rọc có phương thẳng đứng và hướng xuống dưới. Độ lớn của lực tương đương với hai lực này bằng mg.

Ngoài các lực căng của dây, ròng rọc còn chịu tác dụng của phản lực $\overrightarrow{Q}$ của trục. Lực $\overrightarrow{Q}$ thường được biểu diễn như tổng vector của phản lực pháp tuyến $\overrightarrow{N}$ và lực ma sát $\overrightarrow{F_{ms}}$ hướng tiếp tuyến với mặt trong của ròng rọc. Cả hai lực này đều đặt vào điểm A là tiếp điểm của ròng rọc và trục như hình vẽ. Để định ý, giả sử rằng $\alpha > \pi/4$. Khi đó, lực ma sát $\overrightarrow{F_{ms}}$ ở trạng thái cân bằng của hệ sẽ hướng về bên phải. Độ lớn của lực ma sát nghỉ có thể thay đổi từ 0 (khi $\alpha = \pi/4$) đến một giá trị cực đại mà ta xem là bằng μN. Giá trị cực đại này của lực ma sát sẽ đạt được khi góc α tương ứng với ranh giới của vùng hệ ở trạng thái cân bằng.



Vị trí tiếp điểm A của ròng rọc với trục được đặc trưng bởi góc β tạo bởi phương thẳng đứng và bán kính đi qua điểm tiếp xúc đó. Góc này có thể tìm được khi lưu ý rằng lực $\overrightarrow{Q}$ cân bằng với tổng vector các lực căng của dây tác dụng lên ròng rọc, tức là $\overrightarrow{Q}$ có độ lớn bằng mg và hướng theo phương thẳng đứng lên trên. Cho độ lớn thành phần nằm ngang của các lực $\overrightarrow{N}$ và $\overrightarrow{F_{ms}}$ bằng nhau, ta có:

$$N\sin\beta = \mu N\cos\beta$$

$$\iff \tan\beta = \mu$$

Bây giờ ta dễ dàng xác định được lực ma sát tác dụng lên ròng rọc. Vì lực $\overrightarrow{Q}$ có độ lớn bằng mg nên ta có:

$$\begin{aligned} F_{ms} &= mg\sin\beta \\ &= mg\tan\beta\cos\beta \\ &= mg\tan\beta\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} \\ &= \frac{mg\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \end{aligned}$$

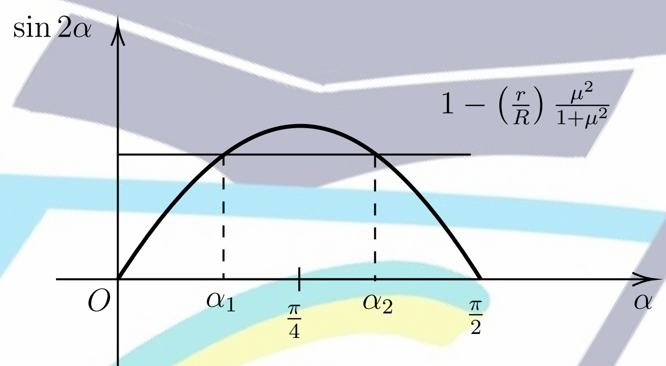
Để tìm giới hạn của góc α, tại đó hệ còn có thể cân bằng, ta viết điều kiện cân bằng của momen các lực tác dụng lên ròng rọc đối với tâm O:

$$mg(\sin\alpha - \cos\alpha)R = F_{ms}.r$$

Sau khi biến đổi biểu thức trên thì ta được:

$$\sin 2\alpha = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \frac{\mu^2}{1+\mu^2}$$

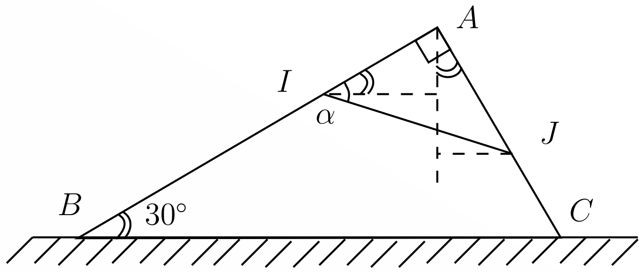
Khi $\mu = 0$, tức là không có ma sát trong trục, công thức trên cho $\sin 2\alpha = 1$, tức $\alpha = \pi/4$. Khi μ khác 0, vế phải của công thức nhỏ hơn 1 nên phương trình đối với α có hai nghiệm α_1 và α_2 nằm trong khoảng từ 0 đến $\pi/2$ và đối xứng nhau qua giá trị $\alpha = \pi/4$ như hình vẽ. Nghiệm $\alpha_1 < \pi/4$ là nghiệm ngoại lai xuất hiện do ta bình phương hai vế của phương trình momen lực, có ý nghĩa vật lý là cùng với α_2 xác định toàn bộ miền giá trị của góc α tại đó hệ ở trạng thái cân bằng.



Ta cũng thấy rằng khi cho $r = R$, bài tập này tương ứng với trường hợp khi hai vật nặng nối với nhau bằng sợi dây vắt qua một hình trụ cố định, đồng thời hệ số ma sát tĩnh giữa sợi dây và mặt hình trụ là μ. Tuy nhiên, thực tế thì không thể áp dụng công thức ở trên vì trong bài tập này sự tiếp xúc của hình trụ bên trong chỉ ở một điểm A, trong khi sợi dây mềm áp vào mặt hình trụ cả một cung. Trường hợp này sẽ đưa ta đến bài tập 5.

Bài 4:

Trong bài tập này, ta không thể sử dụng phương pháp phân tích các lực và xét cân bằng lực cũng như cân bằng momen của hệ vì ta không có đủ dữ kiện để xác định được các lực do khung và thanh tác dụng lên hai viên bi. Chính vì thế, ta phải sử dụng một phương pháp đặc biệt hơn mà đề bài cũng đã gợi ý là xét đến khía cạnh năng lượng, cụ thể ở đây là thế năng trọng trường của hệ và tìm cực trị của nó.



Chọn mốc thế năng trọng trường tại A.

Ta có thế năng của hệ hai viên bi là:

$$\begin{aligned} U &= -P_1 l\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6} - P_2 l\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{l}{2}(P_1 l\cos\alpha + \sqrt{3}P_2 l\sin\alpha) \\ &\geq -\frac{l}{2}\sqrt{{P_1}^2 + 3{P_2}^2} \quad \text{(Bất đẳng thức Bunyakovsky)} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{P_1}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}P_2}{\sin\alpha}$.

Hay $U = U_{min} = -\dfrac{l}{2}\sqrt{{P_1}^2 + 3{P_2}^2}$ khi $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}P_2}{P_1}$.

Vậy hệ cân bằng khi $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}P_2}{P_1}$ và vì $U = U_{min}$ nên cân bằng này là cân bằng bền.

Bài 5:

Xét một đoạn nhỏ của dây có góc mở là $d\theta$. Gọi lực căng trong đoạn dây này là T (mà nó thay đổi không đáng kể trên đoạn dây nhỏ). Như hình vẽ, cột tác dụng vào đoạn dây một phản lực $N_{d\theta}$ hướng ra ngoài cột. Phản lực này tồn tại để cân bằng với các thành phần hướng vào "trong cột" của lực căng dây ở hai đầu. Các thành phần lực căng hướng vào phía trong cột này có độ lớn là $T\sin\dfrac{d\theta}{2}$ (Thực ra một trong hai thành phần này có độ lớn là $(T + dT)\sin\dfrac{d\theta}{2}$, với $d\theta$ là thành phần tăng thêm của lực căng dọc theo đoạn dây nhỏ, tuy nhiên thành phần lực hướng vào trong tăng thêm này chỉ bằng $(dT)\sin\dfrac{d\theta}{2}$, là đại lượng vô cùng bé bậc hai nên chúng ta có thể bỏ qua). Do đó, $N_{d\theta} = 2T\sin\dfrac{d\theta}{2}$. Sử dụng xấp xỉ đối với góc nhỏ, sin x xấp xỉ bằng x, cho phép chúng ta viết lại biểu thức này là $N_{d\theta} = Td\theta$. Lực ma sát trên đoạn nhỏ của dây này thỏa mãn $F_{d\theta} \leq \mu N_{d\theta} = \mu Td\theta$.

Lực ma sát này sinh ra do có sự khác nhau của lực căng giữa hai đầu dây. Nói cách khác, lực căng bên trong đoạn dây là một hàm của θ, thỏa mãn:

$$T(\theta + d\theta) \leq T(\theta) + \mu T d\theta$$

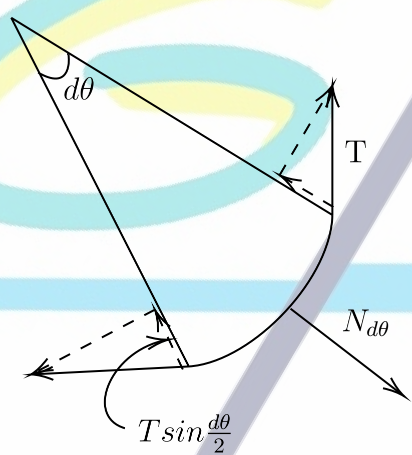
$$\iff dT \leq \mu T d\theta$$

$$\iff \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} \leq \int_0^{\theta} \mu d\theta$$

$$\iff \ln \frac{T}{T_0} \leq \mu\theta$$

$$\iff T \leq T_0 e^{\mu\theta}$$

Trong đó chúng ta đã sử dụng $T = T_0$ khi $\theta = 0$. Ở đây, lực căng trong dây thay đổi rất nhanh theo một hàm mũ. Nếu cho $\mu = 1$, thì trong trường hợp dây chỉ quấn quanh cột một phần tư vòng tròn, lực căng dây cũng sẽ tăng lên gấp $e^{\pi/2} \approx 5$ lần. Nếu dây được quấn xung quanh cột cả một vòng thì lực căng sẽ tăng lên gấp $e^{2\pi} \approx 530$ lần, và nếu như quấn hai vòng thì con số này là $e^{4\pi} \approx 300000$. Hệ số tăng lên rất lớn trong trường hợp này không phải là do sức mạnh của ta tạo ra, mà là do kết cấu của toàn bộ hệ cột có dây quấn xung quanh nó.



Tài liệu tham khảo

[1] David Morin *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions* Section 2, Statics

[2] Trần Ngọc Hợi, Phạm Văn Thiều *Vật lý đại cương - Các nguyên lí và ứng dụng* Chương 7: Động lượng và chuyển động của hệ, Phần 1: Khối tâm Chương 8: Chuyển động quay, Phần 1: Chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của vật rắn, Phần 6: Momen lực đối với một trục cố định Chương 9: Cân bằng tĩnh của một vật rắn

[3] Tô Giang *Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí Trung học phổ thông: Cơ học 1* Chủ đề 2: Cân bằng của vật rắn

[4] Phạm Văn Thiều *Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí Trung học phổ thông: Những bài toán tổng hợp - Phân tích và lời giải* Chương 3: Tĩnh học