Định luật bảo toàn động lượng

Ban chuyên môn Vật lý – The Gifted Battlefield

Xuất bản vào Ngày 31 tháng 10 năm 2021

I. Lời mở đầu

Định luật bảo toàn động lượng, một trong những định luật vật lý cơ bản và quan trọng nhất, cùng với hai định luật bảo toàn năng lượng và khối lượng,... tạo nên hệ thống các định luật bảo toàn. Các định luật bảo toàn rất quan trọng trong nghiên cứu vật lý vì chúng có thể áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực. Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu sâu hơn về các khái niệm cũng như áp dụng vào các ví dụ của định luật bảo toàn động lượng.

II. Định luật bảo toàn động lượng

1. Hệ Nhiều Hạt

Khi khảo sát chuyển động của nhiều vật (trong bài học ta chỉ xét này là các chất điểm) tương tác với nhau, việc xét tương tác của từng vật đối với nhau đôi khi gặp ít nhiều khó khăn. Vì vậy, người ta thường xét đến tập hợp của các vật (hay các chất điểm) để tìm ra các tính chất chung của chuyển động của một tập hợp, từ đó tính toán được các địa lượng đặc trưng cho chuyển động của các chất điểm . Tập hợp các chất điểm đó được gọi là hệ nhiều hạt. Các hạt ở đây là để chỉ các chất điểm trong tập hợp.
Một số ví dụ về hệ nhiều hạt:

1. Mỗi vật rắn là một hệ nhiều hạt, trong đó các hạt được dùng để chỉ các phần tử vật chất rất nhỏ liên kết chặt chẽ với nhau tạo nên một vật rắn.

2. Hệ các ngôi sao và các hành tinh trong một thiên hà. Ở ví dụ này, khái niệm hạt được dùng để chỉ các vật có kích thước rất nhỏ so với khoảng cách giữa chúng

3. Các quả bóng bi-da chuyển động đến va chạm nhau cũng có thể là một hệ nhiều hạt. Ở đây "hạt" chính là những quả bóng bi-da, hay chính là chất điểm, vì chuyển động của chúng có thể coi như là tịnh tiến ($r_{\text{bóng}} \ll$).

Hệ nhiều hạt có thể được chia ra thành 3 loại chính: hệ mở, hệ kín và hệ cô lập

Hệ mở

Hệ mở được định nghĩa là một hệ có các lực do các vật trong hệ tác dụng lẫn nhau (gọi là nội lực) và các lực từ bên ngoài hệ (ngoại lực).
Ví dụ:
+ Hệ Trái Đất và vệ tinh có chịu tác dụng của lực hấp dẫn do Mặt Trời. + Chiếc xe hơi (vật rắn) đang chạy trên đường thì thắng lại nên chịu tác động của lực ma sát trượt và đi

chậm dần.

Hệ kín

Ngược lại với hệ mở, một hệ được gọi là hệ kín khi hệ chỉ có nội lực mà không có ngoại lực hoặc nếu có thì các lực từ bên ngoài hệ cân bằng nhau và triệt tiêu lẫn nhau $\left(\sum \vec{F_N} = 0\right)$.

Ví dụ:

+Hệ Mặt Trời và các hành tinh có thể coi gần đúng là một Trong các vụ nổ hoặc va chạm, nội lực F_i xuất hiện rất lớn so với F_N thì có thể coi hệ là hệ kín.

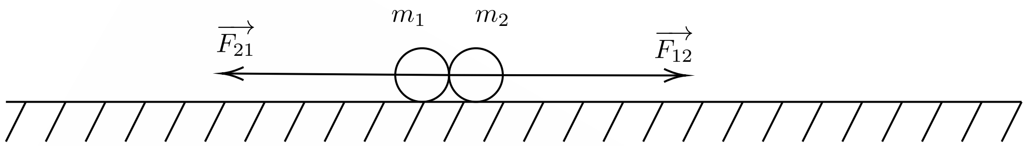
+ Trong các ngày lễ quan trọng như Ngày Quốc Khánh hay Tết Âm lịch, người ta thường ăn mừng bằng cách bắn pháo hoa với nhiều mày sắc sặc sỡ sáng rực cả một vùng trời. Khi nổ, lực do vụ nổ của các chất hoá học tạo ra F rất lớn so với trọng lực P nên ta có thể coi là hệ kín.

2. Tương tác của 2 vật trong hệ kín

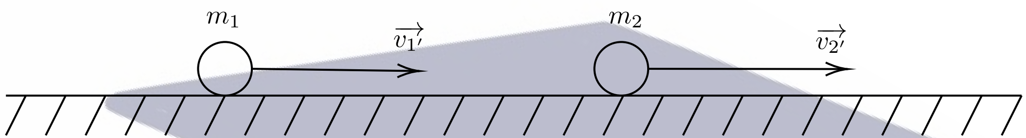
Xét hệ kín gồm hai vật có khối lượng là m_1 và m_2 chuyển động không ma sát với vận tốc là $\vec{v_1}$ và $\vec{v_2}$ trên mặt phẳng ngang va chạm vào nhau trong khoảng thời gian Δt.
Gọi $\vec{v_1}$' và $\vec{v_2}$' lần lượt là vận tốc của vật 1 và 2 sau va chạm.

Trước khi va chạm:

Khi va chạm



Sau va chạm



Khi va chạm:
Vật 1 tác dụng lên vật 2 một lực $\vec{F_{12}}$, nên theo định luật II Newton ta có:

$$\vec{F_{12}} = m_2\vec{a_2} = m_2\frac{\Delta\vec{v_2}}{\Delta t} = m_2\frac{\vec{v_2}' - \vec{v_2}}{\Delta t}$$

Tương tự, vật 2 tác dụng lên vật 1 một lực $\vec{F_{21}}$, theo định luật II Newton, ta có:

$$\vec{F_{21}} = m_1\vec{a_1} = m_1\frac{\Delta\vec{v_1}}{\Delta t} = m_1\frac{\vec{v_1}' - \vec{v_1}}{\Delta t}$$

Theo định luật III Newton:

$$\vec{F_{21}} = -\vec{F_{12}}$$

$$\Leftrightarrow m_1\frac{\vec{v_1}' - \vec{v_1}}{\Delta t} = -m_2\frac{\vec{v_2}' - \vec{v_2}}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow m_1\vec{v_1}' - m_1\vec{v_1} = -m_2\vec{v_2}' + m_2\vec{v_2}$$

Chuyển vế đổi dấu, ta được

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}' \tag{2.1}$$

3. Động lượng

Biểu thức *(2.1)* cho ta một đại lượng có dạng tích $m\vec{v}$. Người ta định nghĩa rằng:

Động lượng của một vật khối lượng m, đang có vận tốc v là một vector p được định nghĩa:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Đối với hệ có n vật thì động lượng của hệ là tổng động lượng của các vật trong hệ:

$$\vec{p_h} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3} + ... + \vec{p_n} = \sum_{i=1}^{n}\vec{p_i} \tag{3.1}$$

4. Định luật II Newton mở rộng

Như đã học trong chuyên đề trước, Định luật II Newton phát biểu rằng:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{4.2}$$

trong đó: $\begin{cases} \sum \vec{F} & : \text{Tổng hợp lực tác dụng lên vật } (N) \\ m & : \text{Khối lượng của vật } (kg) \\ \vec{a} & : \text{Gia tốc của vật } (m/s^2) \end{cases}$

Từ (4.2), ta có:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}\Delta t = m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{p}' - \vec{p} = \Delta\vec{p} \tag{4.3}$$

Ở đây đại lượng $\vec{F}\Delta t$ được định nghĩa là xung lượng của lực F.
Ta có định lý biến thiên động lượng:
Độ biến thiên động lượng của một vật trong khoảng thời gian Δt bằng xung lượng của tổng các lực tác dụng lên vật trong khoảng thời gian đó

$$\sum \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$$

Định luật II Newton ở dạng tổng quát:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Trường hợp khối lượng của hệ không đổi thì:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

5. Định luật bảo toàn động lượng

Biểu thức *b.1* có thể được viết lại thành:

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1}' + \vec{p_2}'$$

Mở rộng ra với n vật trong hệ kín $\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}} = 0\right)$

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} + ... + \vec{p_n} = \vec{p_1}' + \vec{p_2}' + ... + \vec{p_n}'$$

Theo định nghĩa (3.1) ta có:

$$\vec{p_h} = \vec{p_h}'$$

Từ đây ta rút ra được định luật bảo toàn động lượng:

Vector động lượng của hệ vật luôn được bảo toàn

$$\vec{p} = \overrightarrow{const}$$

Hay nói cách khác:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F} = \vec{0}$$

Lưu ý:
Trong một số trường ngoại lực chỉ tác dụng lên một số phương nhất định thì ta vẫn có thể áp dụng định luật bảo toàn động lượng ở phương mà tổng hợp lực trên phương đó $\sum F = 0$.

III. Chuyển động bằng phản lực

- Xét một hệ kín, nếu một phần của hệ chuyển động về một hướng, thì theo định luật bảo toàn động lượng, phần còn lại của hệ phải chuyển ộong theo hướng ngược lại. Chuyển động theo nguyên tắc như thế được gọi là chuyển động bằng phản lực.

- Hay nói cách khác, chuyển động bằng phản lực là chuyển động tự tạo ra phản lực, một phần của hệ chuyển động về phía trước, phần còn lại chuyển động về phía sau.
Ví dụ: Các động cơ phản lực hoạt động dựa trên nguyên lý: khi phản ứng với nhiên liệu và phát nổ, khí phụt về phía sau, đẩy cho động cơ tiến về phía trước.

1. Chuyển động của tên lửa:

Chuyển động của tên lửa cũng là một dạng của chuyển động bằng phản lực, nhưng với khối lượng thay đổi nên rất khó để áp dụng định luật bảo toàn động lượng.

Gọi $\begin{cases} m_0 \text{ là khối lượng ban đầu của tên lửa} \\ M \text{ là khối lượng của tên lửa tại một thời điểm nào đó} \\ \mu \text{ là khối lượng khí đốt phụt ra mỗi giây } \left(\mu = -\dfrac{dm}{dt}\right) (> 0) \end{cases}$

Giả sử rằng nhiên liệu phụt ra với tốc độ $\vec{u}$ không đổi đối với tên lửa.
Xét tại thời điểm t, vật có khối lượng là m và có vận tốc là $\vec{v}$.
Sau thời gian rất nhỏ dt tên lửa có khối lượng chuyển từ m thành $m + dm$ và vận tốc biến thiên từ $\vec{v}$ thành $\vec{v} + d\vec{v}$.
Lúc này khối lượng khí phụt ra là $-dm$ có vận tốc là $v' = u + v$.
Độ biến thiên động lượng của hệ là

$$d\vec{p} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + (-dm.\vec{v}') - m\vec{v}$$

$$d\vec{p} = m\vec{v} + md\vec{v} + dm\vec{v} + dmd\vec{v} - dm\vec{v} - dm\vec{u} - m\vec{v}$$

Chú ý rằng số hạng $dmdv$ rất nhỏ nên ta có thể bỏ qua.

$$d\vec{p} = md\vec{v} - dm\vec{u}$$

Áp dụng định luật II Newton cho hệ, ta có:

$$\sum \overrightarrow{F_{ex}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

$$m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} - \mu\vec{u} \tag{6.1}$$

Phương trình (6.1) là phương trình chuyển động của tên lửa.

Lưu ý rằng ngoại lực ở đây bao gồm trọng lực và lực cản $\sum \overrightarrow{F_{ex}} = \vec{P} + \vec{F_c}$ nên phương trình (6.1) trở thành:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_c} - \mu\vec{u} \tag{6.3}$$

Ở đây $\mu\overrightarrow{u} = -\dfrac{dm}{dt}\overrightarrow{u}$ có thứ nguyên của lực, đó chính là phản lực do phân nhiên liệu dm tác dụng vào tên lửa khi tách ra khỏi tên lửa. Lực $\dfrac{dm}{dt}\overrightarrow{u}$ phụ thuộc vào tốc độ tiêu thụ nhiên liệu và vận tốc tương đối của nhiên liêu so với tên lửa.

Mở rộng: Nếu ta thiết lập một cách tổng quát thì công thức trên có thể áp dụng cho hệ có khối lượng thay đổi theo thời gian:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_c} + \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

Xét trường hợp $\sum F_{ex} = 0$

Từ (6.1) ta có:

$$dv = u\frac{dm}{m}$$

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = u\int_{m_1}^{m_2} \frac{dm}{m}$$

$$\Leftrightarrow v_2 - v_1 = uln\frac{m_1}{m_2}$$

Với m_1, m_2 là khối lượng của tên lửa tại hai thời điểm xé tướng ứng với vận tốc v_1, v_2.

Nếu xét từ thời điểm bắt đầu tới thời điểm t thì:

$$v = uln\frac{m_0}{M} = uln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right) \tag{6.4}$$

Nhận xét: Từ công thức trên, ta thấy, để vận tốc của tên lửa tăng nhanh(a lớn) thì vận tốc khí phụt ra cũng như là khối lượng nhiên liệu phụt ra phải lớn. Ngoài ra thì cần chọn tỉ lệ thích hợp giữa khối lượng của vỏ tên lửa và khối lượng nhiên liệu chứa trong nó. Từ đó, người ta đã chế tạo ra được tên lửa nhiều tầng. (Khi nhiên liệu của 1 tầng đã cháy hết thì tầng đó tự tách ra và bốc cháy trong khí quyển). Thông thường, tên lửa ba tầng sẽ cho ra hiệu suất cao nhất.

IV. Hệ quy chiếu khối tâm

1. Tọa độ khối tâm

Khi khảo sát chuyển động của nhiều hệ gồm các hạt, ví dụ như các vật va chạm nhau như đã nói đến ở phần I, người ta thấy rằng mỗi hệ hạt bất kì đều có một điểm đặc biệt gọi là khối tâm của hệ, kí hiệu là G hoặc C. Khối tâm có vai trò cực kì quan trọng trong việc miêu tả chuyển động của một hệ nói chung.

Vị trí của khối tâm được định nghĩa là:

$$\overrightarrow{r_G} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2} + ... + m_n\overrightarrow{r_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_i\overrightarrow{r_i}}{m} \tag{7.1}$$

Chiếu lên 3 phương trong hệ trục toạ độ Decartes:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum m_i x_i}{m} \\ y_G = \dfrac{\sum m_i y_i}{m} \\ z_G = \dfrac{\sum m_i z_i}{m} \end{cases}$$

2. Chuyển động của khối tâm

a. Vận tốc khối tâm

Từ công thức (7,1) ta có:

$$\overrightarrow{v_G} = \frac{\overrightarrow{dr_G}}{dt} = \frac{\sum m_i \dfrac{\overrightarrow{dr_i}}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\overrightarrow{v_i}}{\sum m_i} = \frac{\sum \overrightarrow{p_i}}{\sum m_i} = \frac{\overrightarrow{p}}{m}$$

Vậy:

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v_G} \tag{7.2}$$

Hệ quả: Nếu như hệ ta đang xét là 1 hệ kín thì động lượng của hệ sẽ không đổi, hay vận tốc của khối tâm cũng không đổi.

Như vậy, ta có thể thấy rằng *Tổng động lượng của hệ chất điểm bằng động lượng của một chất điểm đặt tại khối tâm của hệ, có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ và có vận tốc bằng vận tốc khối tâm của hệ.*

b. Gia tốc khối tâm

Giả sử mỗi chất điểm thứ i chịu 1 lực $\overrightarrow{F_i}$ và có gia tốc $\overrightarrow{a_i}$

Lấy đạo hàm vận tốc khối tâm của hệ(7.2), cũng biến đổi tương tự như trên, ta sẽ có:

$$\overrightarrow{a_G} = \frac{\sum m_i\overrightarrow{a_i}}{m} = \frac{\sum \overrightarrow{F_i}}{m} = \frac{\sum \overrightarrow{F_{ext}} + \sum \overrightarrow{F_{int}}}{m}$$

Theo định luật III Newton, nội lực tác dụng lên các chất điểm là các cặp lực trực đối nhau nên tổng nội lực bằng 0 $\left(\sum \overrightarrow{F_{int} = 0}\right)$

Vậy:

$$\overrightarrow{a_G} = \frac{\sum \overrightarrow{F_{ext}}}{m} \tag{7.3}$$

Hay

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\overrightarrow{p_G}}{dt}$$

Ta kết luận rằng: *Khối tâm của hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ và chịu tác dụng của một lực bằng tổng ngoại lực tác dụng lên hệ*

3. Hệ quy chiếu khối tâm

Khi khảo sát chuyển động của các vật và các hệ vật, việc chọn hệ quy chiếu rất quan trọng để có thể chính xác các đại lượng vật lý đặc trụng cho hệ vật. Như đã học ở chuyên đề trước, hệ quy chiếu phi quán tính cho phép chúng ta khảo sát các vật thể chuyển động một cách dễ dàng hơn các hệ quy chiếu quán tính. Ở bài học này, ta sẽ đi xét đến một hệ quy chiếu mới quan trọng và giúp cho việc giải quyết các bài toán động lượng đơn giản hơn rất nhiều, đó là hệ quy chiếu khối tâm.

a. Tính chất

Xét 1 hệ gồm n chất điểm có khối lượng lần lượt là m_1,m_2,...m_n đang chuyển động với vận tốc lần lượt là $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$,...$\overrightarrow{v_n}$.

Lúc này, khối tâm của hệ đang chuyển động với vận tốc: $\overrightarrow{v_G} = \dfrac{\overrightarrow{p}}{m}$ (với $\overrightarrow{p}$ là động lượng toàn hệ).

Vận tốc của vật 1 trong hệ quy chiếu khối tâm là :

$$\overrightarrow{v_1'} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_G}$$

Động lượng của vật 1 trong hệ quy chiếu này là:

$$\overrightarrow{p_1}' = m1\overrightarrow{v_1}' = m1(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_G}) = m1\left(\overrightarrow{v_1} - \frac{\overrightarrow{p}}{m}\right)$$

Tương tự, động lượng của vật 2 trong hệ quy chiếu này là:

$$\overrightarrow{p_2}' = m_2\left(\overrightarrow{v_2} - \frac{p}{m}\right)$$

Động lượng của vật n là:

$$\overrightarrow{p_n}' = m_n\left(\overrightarrow{v_n} - \frac{p}{m}\right)$$

Tổng động lượng của hệ trong hệ quy chiếu này:

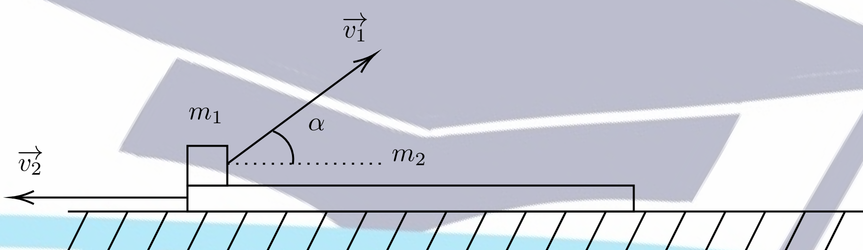
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p}' &= \overrightarrow{p_1}' + \overrightarrow{p_2}' + ... + \overrightarrow{p_n}' \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i(\overrightarrow{v_i} - \frac{\overrightarrow{p}}{m}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{v_i} - \sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\overrightarrow{p}}{m} \\
&= \overrightarrow{p} - \frac{\overrightarrow{p}}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \\
&= \overrightarrow{p} - \frac{\overrightarrow{p}}{m}m \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

Kết luận: *Nếu xét trong hệ quy chiếu khối tâm của một hệ, thì động lượng của cả hệ đó luôn luôn bằng 0.* Đây cũng chính là định nghĩ của hệ quy chiếu khối tâm.

Việc động lượng của 1 hệ luôn bằng 0 khi xét trong hệ quy chiếu khối tâm sẽ giúp cho việc giải 1 bài toán có chúng ta có những tiện lợi nhất định.(Sẽ giới thiệu thêm ở phần va chạm)

V. Bài tập

Bài 1. Một người có khối lượng m_1 đang đứng trên một tấm ván có khối lượng m_2, chiều dài L, đặt trên mặt sàn ngang nhẵn. Hỏi, người đó phải nhảy với vận tốc nhỏ nhất là bao nhiêu và theo hướng nào để tới được đầu bên kia tấm ván.



Bài 2. Hai thuyền, mỗi thuyền khối lượng M chứa một kiện hàng khối lượng m chuyển động song song ngược chiều nhau với cùng vận tốc v . Khi thuyền ngang nhau, người ta đổi hai kiện hàng cho nhau theo một trong hai cách:

1. Hai kiện hàng được chuyển theo thứ tự trước sau.

2. Hai kiện hàng được chuyển cùng lúc

Hỏi với cách nào thì vận tốc cuối của hai con thuyền lớn hơn?

Bài 3. Một sợi dây nhẹ 2 đầu buộc vào 1 vật nặng và 1 thùng cát rồi vắt qua 1 ròng rọc cố định. Khối lượng của cát bằng khối lượng của thùng và bằng một nửa khối lượng của vật nặng. Ban đầu các vật đều ở trạng thái đứng yên. Tại thời điểm $t = 0$, qua một lỗ nhỏ ở đáy thùng cát bắt đầu chảy đều ra ngoài. Biết rằng toàn bộ cát chảy hết ra khỏi thùng sau thời gian t_0. Xác định vật tốc của vật nặng ở thời điểm $2t_0$. Cho gia tốc trọng trường là g.

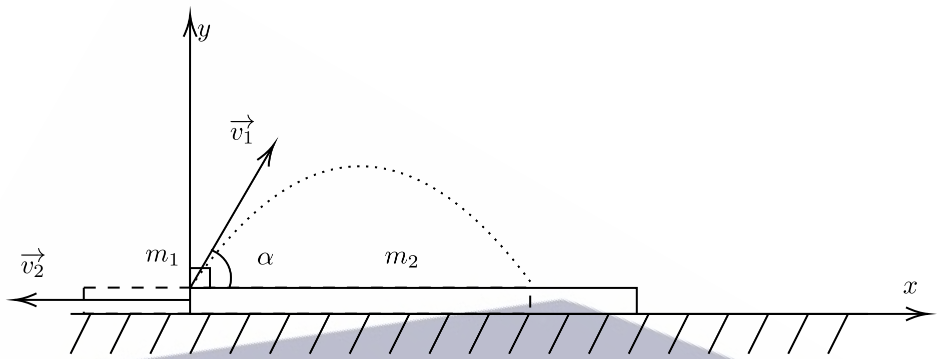
Bài 4. Một tên lửa có khối lượng tổng cộng $m_0 = 12$ tấn lúc xuất phát. Tên lửa được phóng theo phương thẳng đứng. Lực đẩy tên lửa được ra bởi một động cơ phản lực. Nhiên liệu đốt cháy được phụt qua một ống. Cho biết tốc độ tiêu thụ nhiên liệu là $\mu = 120kg/s$và khí đốt phụt ra khỏi tên lửa với tốc độ (so với tên lửa) là $u = 2400m/s$. Hỗn hợp nhiên liệu ban đầu có khối lượng là $m_1 = 0,8m_0$. Lấy $g = 9,8m/s^2$. Hãy xác định:

1. Gia tốc của tên lửa lúc xuất phát, sau 1 phút.

2. Công thức cho biết sự phụ thuộc của vận tốc vào thời gian.

VI. Lời giải tham khảo

Bài 1



Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ ($O \equiv$ Vị trí ban đầu của người)
Gọi v_1, v_2 là vận tốc của người và ván.
Áp dụng định luật bảo toàn động lượng theo phương ngang:

$$m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = 0$$

$$m_1v_1\cos\alpha - m_2v_2 = 0$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1\cos\alpha \tag{1}$$

Phương trình chuyển động của người:

$$\begin{cases} x_1 = v_1\cos\alpha \\ y_1 = v_1\sin\alpha t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \tag{2}$$

Phương trình chuyển động của đuôi ván:

$$x_2 = L - v_2t$$

Thay (1) vào phương trình trên:

$$x_2 = L - \frac{m_1}{m_2}v_1\cos\alpha t \tag{3}$$

Để người nhảy trúng đầu bên kia của ván:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Thay (2),(3) vào hệ phương trình trên ta có:

$$\begin{cases} v_1\cos\alpha t = L - \dfrac{m_1}{m_2}v_1\cos\alpha t \\ v_1\sin\alpha t - \dfrac{gt^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \cos\alpha t = L - \dfrac{m_1}{m_2} v_1 \cos\alpha t \\ t = \dfrac{2v_1 \sin\alpha}{g} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \cos\alpha \dfrac{2v_1 \sin\alpha}{g} = L - \dfrac{m_1}{m_2} v_1 \cos\alpha \dfrac{2v_1 \sin\alpha}{g} \\ t = \dfrac{2v_1 \sin\alpha}{g} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_1^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{m_1}{m_2} \frac{v_1^2 \sin 2\alpha}{g} = L$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_1^2 \sin 2\alpha}{g} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = L \qquad (4)$$

Ta thấy rằng để v_1 đạt GTNN thì $\sin 2\alpha$ phải lớn nhất. Hay

$$\sin 2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$$

Từ (4) ta có:

$$\Rightarrow \boxed{v_{1min} = \sqrt{\frac{Lgm_2}{m_1 + m_2}}}$$

Bài 2

Coi thời gian chuyển hàng là vô cùng bé nên vận tốc các kiện hàng trong lúc trao đổi không đổi.
Và cũng cần để ý rằng:
Áp dụng định luật bảo toàn động lượng lên hệ gồm 2 thuyền, ta có:
Sau khi 2 thuyền đã trao đổi vận tốc, tổng động lượng của hệ bằng động lượng ban đầu của hệ và bằng 0
Hay:

$$(m + M)\overrightarrow{v_2} + (m + M)\overrightarrow{v_1} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \qquad (5)$$

Do đó, ta chỉ cần xét vận tốc của 1 thuyền là có thể suy ra được vận tốc còn lại.
Cách 1
Áp dụng định luật bảo toàn động lượng:

$$m\overrightarrow{v} - (M + m)\overrightarrow{v} = (M + 2m)\overrightarrow{v_2}$$

Chọn chiều dương là chiều chuyển động của thuyền 1, ta có:

$$v_2 = -\frac{mv - (M + m)v}{M + 2m} = \frac{Mv}{M + 2m} \qquad (6)$$

Sau đó, thuyền 2 lại chuyển 1 kiện hàng xem thuyền 1. Tuy nhiên, trong quá trình chuyển thì vận tốc thuyền 2 vẫn không đổi. Mà từ (5), ta không cần tính vận tốc thuyền 2 mà vẫn khẳng định được rằng độ lớn của nó cũng bằng v_2 và vẫn bằng $\dfrac{Mv}{M+2m}$

Cách 2

Xét thuyền 1 trao hàng cho thuyền 2: Áp dụng định luật bảo toàn động lượng:

$$m\overrightarrow{v} - M\overrightarrow{v} = (M+m)\overrightarrow{v_2}'$$

Chọn chiều dương là chiều chuyển động của thuyền 1, ta có:

$$v_2' = -\frac{mv - Mv}{M+m} = \frac{(M-m)v}{M+m} \tag{7}$$

Và v_1' cũng bằng $v_2' = \dfrac{(M-m)v}{M+m}$

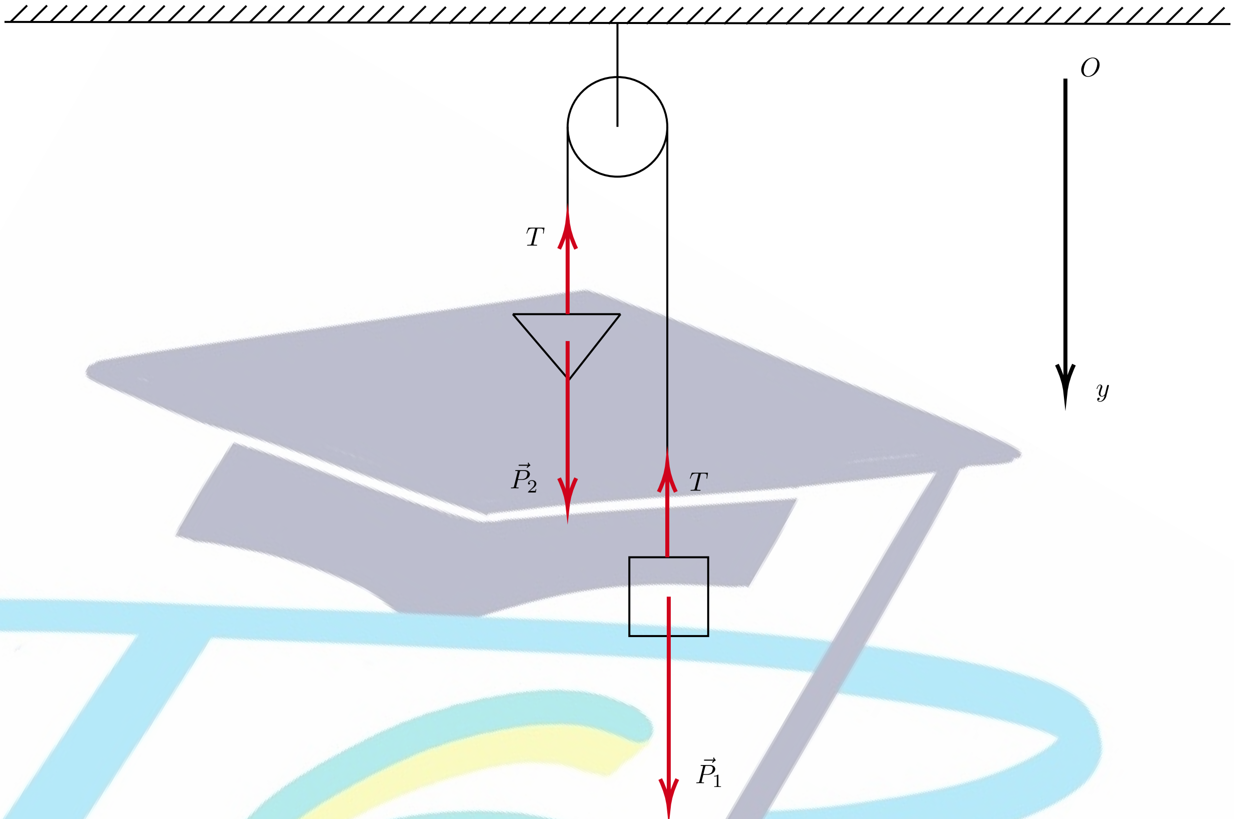
So sánh (7) và (6), ta có:

$$\frac{M-m}{m+M} = 1 - \frac{2m}{m+M}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M}{M+2m} = 1 - \frac{2m}{2m+M}$$

Do đó, dễ thấy là ở trong cách 1, vận tốc sau khi trao kiện hàng sẽ nhanh hơn cách 2.

Bài 3



Chọn chiều dương như hình vẽ. Gọi m_1, m_2 lần lượt là khối lượng của vật nặng và thùng chứa cát tại thời điểm bất kì. Đặt $m_1 = 2m$. Vậy, khối lượng cát có trong thùng ban đầu là $\dfrac{m_1}{2} = m$.

Gọi tốc độ cát chảy ra trong thời gian t_0 ban đầu là μ. Ta có:

$$\mu = \frac{m}{t_0} = \frac{-dm_2}{dt}$$

Áp dụng định luật II Newton vào m_1 và m_2:

$$\begin{cases} \mathrm{a}_1 = \dfrac{P_1 + T}{m_1} \\ \mathrm{a}_2 = \dfrac{P_2 + T}{m_2} \end{cases} \tag{1}$$

Mà $a_2 = -a_1$

$$\Rightarrow \frac{P_1 + T}{m_1} + \frac{P_2 + T}{m_2} = a_1 + a_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = -\frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{m_2} = -2g$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{-2g}{\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}} = \frac{-2gm_1m_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

Từ (1) và (2):

$$a_1 = g + \frac{1}{m_1}\frac{-2gm_1m_2}{m_1 + m_2} = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= \int_0^{2t_0} a_1 dt \\
&= \int_0^{t_0} a_1 dt + \int_{t_0}^{2t_0} a_1 dt \\
&= \int_0^{t_0} g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} dt + \int_{t_0}^{2t_0} g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} dt \\
&= \int_{2m}^{m} g\frac{2m - m_2}{2m + m_2}\frac{-dm_2}{\mu} + \int_{t_0}^{2t_0} g\frac{2m - m}{2m + m} dt \\
&= g\frac{t_0}{m}\int_m^{2m} \frac{2m - m_2}{2m + m_2} dm_2 + \frac{g}{3}\Big|_{t_0}^{2t_0} \\
&= g\frac{t_0}{m}\int_m^{2m} \frac{4m}{2m + m_2} dm_2 - g\frac{t_0}{m}\int_m^{2m} dm_2 + \frac{gt_0}{3} \\
&= 4gt_0 \ln(2m + m_2)\Big|_m^{2m} - gt_0 + \frac{gt_0}{3} \\
&= 4gt_0 \ln\left(\frac{2m + 2m}{2m + m}\right) - \frac{2gt_0}{3} \\
&= 4gt_0 \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3}gt_0
\end{aligned}$$

Bài 4.

Chọn chiều dương hướng lên.

1. Từ công thức (6.3), ta có:

$$ma = -P + \mu u$$

Thời gian để đốt cháy hết nhiên liệu là $t_1 = \dfrac{m_1}{\mu} = \dfrac{0,8m_0}{\mu} = 80s$

Ta cần phân biệt 2 trường hợp: Nếu $t \le 80s$ thì $a = \dfrac{\mu u}{m} - g$

Nếu $t > 80s$ thì $a = -g$

Tại thời điểm ban đầu $m = m_0$ và t=0 nên:

$$m_0 a_{\text{bđ}} = -m_0 g + \mu u$$

$$\Rightarrow a_{\text{bđ}} = \frac{\mu u}{m_0} - g = 14,2m/s^2$$

Tại thời điểm $t' = 60s$:

$$a_1 = \frac{\mu u}{m_1} - g = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t'} - g = 50,2m/s^2$$

2. Nếu $t \leq 80s$:

$$dv = \left(\frac{\mu u}{m} - g\right) dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{\mu u}{m} - g\right) dt$$

$$\Leftrightarrow v = u\int_0^t \left(\frac{\mu}{m}\right) dt - g\int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow v = uln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right) - gt$$

Khi $t = 80$ thì vận tốc tên lửa đạt GTLN:

$$\boxed{v_{max} = uln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t_1}\right) - gt_1 \approx 3078,65m/s}$$

Nếu $t > 80s$:

$$\boxed{v = -g(t - 80) + v_{max}}$$

Tài liệu tham khảo

[1] David Halliday – Robert Resnick – Jean Walker. *Principle of Physics- Extended* Section 9-1, Center of Mass, Section 9-2 Newton's Second Law For A System of Particles, and Section 9-5 Conservation of Linear Momentum.

[2] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*, Section 5.5, Momentum, Section 5.6, The center of mass frame

[3] Bùi Quang Hân. *Giải Toán Vật Lý 10 tập 2.*