

Chuyên đề 1: Các bài toán trò chơi tổ hợp và rời rạc

Ban Toán học – Tổ chức The Gifted Battlefield nhiệm kỳ 2025-2026

Xuất bản vào Ngày 2 tháng 3 năm 2026

Tóm tắt nội dung

Các bài toán trò chơi tổ hợp và rời rạc là một phần không thể thiếu trong chương trình Toán Chuyên, đặc biệt là trong các kì thi HSG cấp trường, tỉnh, quốc gia và quốc tế. Bên cạnh đó, các bài toán trên còn có thể ứng dụng vào tin học thi đấu và nâng cao tư duy xử lý các vấn đề. Vì vậy, đối tượng được hướng đến ở đây là các bạn học sinh có niềm đam mê với toán học, đặc biệt là các bạn học sinh bậc THCS đang học và ôn thi Chuyên Toán.

Chuyên đề này trình bày hai nội dung trọng tâm: các trò chơi trên tập nguyên và các trò chơi trên lưới nguyên. Để sử dụng tài liệu chuyên đề hiệu quả nhất, chúng mình đề xuất bạn đọc sử dụng theo trình tự chuyên đề, tham khảo các cách viết lời giải cho các bài toán tổ hợp và dành nhiều thời gian vào việc luyện tập các bài tập tự luyện.

Mục lục

1	Lí thuyết và các ví dụ	2
1.1	Các trò chơi trên tập số nguyên	2
1.2	Các trò chơi trên lưới nguyên	4
2	Bài tập vận dụng	6
2.1	Bài tập có hướng dẫn giải	6
2.2	Bài tập tự luyện	6
3	Hướng dẫn giải bài tập	8
4	Lời kết	11
	Tài liệu tham khảo	11

1 Lí thuyết và các ví dụ

Chúng ta bắt đầu bằng cách mô tả chi tiết về Trò chơi Nim và các trò chơi tương tự (thường được gọi là Trò chơi Vô tư - Impartial Games). Hầu hết các trò chơi trong các cuộc thi đều thuộc loại này, nhưng một số không thuộc bất kỳ danh mục nào mà thí sinh biết. Tuy nhiên, hầu hết các định nghĩa sau đây đều hữu ích ngay cả trong những tình huống đó.

Định nghĩa 1.1 (Bài toán trò chơi)

Chúng ta xem xét các trò chơi dành cho hai người chơi A và B , luân phiên di chuyển. A luôn đi trước. Không thể xảy ra hòa. Chúng ta được cho trạng thái bắt đầu và tập hợp M các nước đi hợp lệ. Người chơi thua nếu người đó rơi vào vị trí mà từ đó không thể thực hiện nước đi hợp lệ nào.

Như vậy, sẽ luôn có một người thua cuộc và một người thắng cuộc.

Định nghĩa 1.2 (Vị trí thắng thua)

Tập hợp P của tất cả các vị trí trong một trò chơi có thể được phân hoạch thành hai tập hợp: tập hợp L các vị trí dẫn đến thua cuộc và tập hợp W các vị trí dẫn đến thắng cuộc.

Trong một bài toán trò chơi, một người chơi sẽ rơi vào vị trí thuộc L nếu đối thủ của họ chơi đúng. Ngược lại, một người chơi có thể rơi vào vị trí thuộc W , bất kể đối thủ của họ làm gì.

Để làm chủ cuộc chơi, các trạng thái cần được phân hoạch thành hai tập hợp: tập L gồm các vị trí dẫn đến thua cuộc và tập W gồm các vị trí mang lại chiến thắng. Bí quyết để luôn giành ưu thế nằm ở chiến thuật "bắt cặp": bằng cách chia các vị trí thành từng đôi một và luôn đáp trả bằng phần tử còn lại trong cặp mà đối thủ vừa chiếm giữ, bạn sẽ khiến đối thủ sớm cạn kiệt nước đi. Nếu có một vị trí khởi đầu không có cặp, bạn nên chọn đi trước để chiếm lấy nó; nếu không, hãy chọn đi sau để duy trì quyền kiểm soát các cặp và giành thắng lợi cuối cùng.

Lí thuyết trên đây mang tính trừu tượng; vì thế, các ví dụ sau đây sẽ hướng đến việc làm rõ các vấn đề trên.

1.1 Các trò chơi trên tập số nguyên

Ví dụ 1.1

Có 36 que diêm, hai người chơi lần lượt bốc, mỗi lần bốc từ 1 đến 4 que. Người phải bốc que cuối cùng là người thua cuộc. Hãy tìm cách chơi cho người đi sau để người đó luôn luôn thắng cuộc. (Điền Nguyễn, 2005)

 **LỜI GIẢI.** Để luôn thắng khi đi sau, bạn cần vận dụng chiến thuật "bắt cặp" nhằm kiểm soát tổng số que diêm bị bốc sau mỗi vòng chơi. Vì người bốc que cuối cùng (thứ 36) sẽ thua, mục tiêu của bạn là bốc hết 35 que trước đó để đẩy đối thủ vào vị trí thua cuộc khi trên bàn chỉ còn đúng 1 que duy nhất. Bằng cách luôn bốc số lượng que bù với đối thủ sao cho tổng mỗi lượt đôi (một vòng lặp) luôn bằng 5 (x que đối thủ bốc và $5 - x$ que bạn bốc), bạn sẽ duy trì được thế trận "hoàn hảo". Do $35 = 5 \times 7$, sau đúng 7 vòng bốc như vậy, bạn chắc chắn sẽ để lại duy nhất 1 que trên bàn, buộc đối thủ phải bốc que đó và nhận lấy thất bại. ■

Phân tích. Đây là một bài toán tổ hợp thường được gọi là trò chơi Nim thông thường. Luật chơi ở đây là bốc từ 1 đến 4 que, người bốc que cuối cùng là người thua. Mục tiêu cuối cùng là để lại 1 que cho đối thủ. Vậy vì sao là 5 que? Vì để luôn thắng khi đi sau, bạn cần vận dụng chiến thuật "bắt cặp" nhằm kiểm soát tổng số que diêm bị bốc sau mỗi vòng chơi. Vì người bốc que cuối cùng (thứ 36) sẽ thua, mục tiêu của bạn là bốc hết 35 que trước đó để đẩy đối thủ vào vị trí thua cuộc khi trên bàn chỉ còn đúng 1 que duy nhất. Bằng cách luôn bốc số lượng que bù với đối thủ sao cho tổng mỗi lượt đôi (một vòng lặp) luôn bằng 5 (x que đối thủ bốc và $5 - x$ que

bạn bốc), bạn sẽ duy trì được thế trận "hoàn hảo". Do $35 = 5 \times 7$, sau đúng 7 vòng bốc như vậy, bạn chắc chắn sẽ để lại duy nhất 1 que trên bàn, buộc đối thủ phải bốc que đó và nhận lấy thất bại.

Ví dụ 1.2

Hai bạn Dũng và Long cùng chơi trò chơi: trên mặt bàn có 3 cái hộp, hộp thứ nhất đựng 20 viên bi, hộp thứ hai đựng 25 viên bi, hộp thứ ba đựng 20 viên bi. Mỗi lần đến lượt mình, mỗi người được lấy đi số viên bi tùy ý trong cùng một hộp, ai lấy được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Dũng được ghép đi trước. Hãy giúp tìm bí quyết để Dũng chắc chắn thắng trong cuộc thi này nhé! (Điền Nguyễn, 2005)

 **LỜI GIẢI.** Ta thấy đầu tiên Dũng sẽ lấy hết 25 viên bi ở hộp thứ hai để cho trò chơi ở trạng thái cân bằng là hộp một là 20 viên bi, hộp hai là 0 viên, hộp ba là 20 viên. Khi đó Long đi x viên ở hộp 1 hoặc 3 thì Dũng sẽ lấy x viên ở hộp còn lại để trò chơi luôn ở trạng thái cân bằng khi đó Dũng chắc chắn sẽ lấy được bi cuối cùng. ■

Phân tích. Đây là một bài toán tổ hợp, cụ thể là trò chơi Nim (hoặc một dạng tương đương). Bí quyết để Dũng chắc chắn thắng là Dũng phải luôn đưa trò chơi về trạng thái cân bằng (còn gọi là trạng thái thắng cho người chơi trước đó) sau mỗi lượt đi của mình.

Ví dụ 1.3

Trên bảng ta viết 10 dấu cộng và 15 dấu trừ tại các vị trí bất kì. Ta thực hiện xóa hai dấu bất kì trong đó và viết vào đó một dấu cộng nếu xóa hai dấu giống nhau và dấu trừ nếu xóa hai dấu khác nhau. Hỏi trên bảng còn lại dấu gì sau khi ta thực hiện thao tác trên 24 lần? (Điền Nguyễn, 2005)

 **LỜI GIẢI.** Ta có thể thấy nếu xoá 2 dấu giống nhau sẽ thay thành dấu cộng và nếu xoá 2 dấu khác nhau sẽ thành dấu trừ. Khi đó ta thay dấu cộng thành 1 và dấu trừ thành -1 thì khi đó 2 dấu giống nhau sẽ là $1 \times 1 = 1$ hoặc $-1 \times (-1) = 1$ còn 2 dấu khác nhau là $-1 \times 1 = -1$. Khi đó ta nhân 10 dấu cộng và 15 dấu trừ thì sẽ ra được -1. Vậy trên bảng còn lại dấu trừ sau khi thực hiện thao tác 24 lần. ■

Phân tích, Đây là 1 bài toán tổ hợp thuộc dạng bất biến. Mục tiêu là tìm ra kết quả cuối cùng của một chuỗi thao tác lặp đi lặp lại. Phương pháp hiệu quả nhất là tìm ra một đại lượng bất biến — một thuộc tính của hệ thống không thay đổi (hoặc chỉ thay đổi theo một quy luật cố định) sau mỗi thao tác.

Ví dụ 1.4

Trên bảng ta viết ba số nguyên. Sau đó ta xóa đi một số và viết vào đó tổng hai số còn lại trừ đi 1. Thao tác như vậy lặp lại một số lần và cuối cùng ta nhận được ba số 17, 1967, 1983. Phải chăng những số đầu tiên trên bảng được viết là 2,2,2? (Điền Nguyễn, 2005)

 **LỜI GIẢI.** Ta sẽ chứng minh không thể nhận được bộ số (17, 1967, 1983) từ xuất phát điểm (2, 2, 2) dựa trên tính bất biến của tính chẵn lẻ. Khi xét bước biến đổi đầu tiên từ ba số (2, 2, 2), ta nhận được bộ (2, 2, 3) gồm hai số chẵn và một số lẻ. Từ bước thứ hai trở đi, kết quả luôn luôn duy trì cấu trúc hai số chẵn và một số lẻ dù ta thực hiện thay thế bất kỳ số nào (vì số chẵn mới sẽ bằng tổng của một số chẵn và một số lẻ trừ đi 1; số lẻ mới là tổng của hai số chẵn trừ đi 1). Tuy nhiên, bộ số mục tiêu (17, 1967, 1983) lại bao gồm cả ba số lẻ. Do đó, với thao tác đã cho, từ xuất phát điểm (2, 2, 2) không thể thu được kết quả là (17, 1967, 1983). ■

Phân tích. Đây là một bài toán tổ hợp về tính bất biến trong các phép biến đổi. Gọi ba số trên bảng là (a, b, c) . Thao tác biến đổi là xóa một số (ví dụ a) và thay thế bằng $a' = b + c - 1$. Ta cần tìm một thuộc tính của bộ ba số (a, b, c) không đổi (hoặc thay đổi theo một quy luật đơn giản) sau mỗi lần biến đổi.

1.2 Các trò chơi trên lưới nguyên

Ví dụ 1.5

Xét một bàn cờ vua có 4×8 ô vuông. Chứng minh rằng một con ngựa không thể bắt đầu từ một ô vuông, đi qua mọi ô vuông trên bàn cờ đúng một lần và quay trở lại ô vuông ban đầu. (Bước nhảy của ngựa là trước tiên di chuyển hai ô vuông theo chiều dọc hoặc chiều ngang, sau đó di chuyển một ô vuông sang trái hoặc phải.) (Engels, 1998)

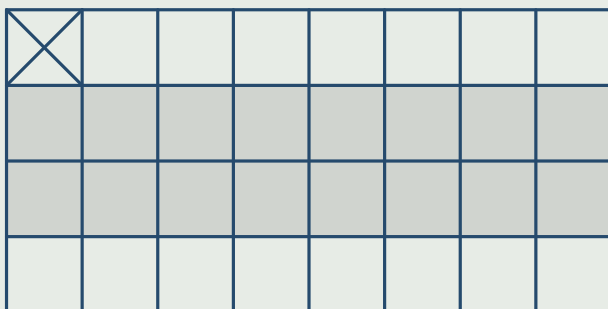
LỜI GIẢI. Giả sử: Tồn tại một cách đi sao thỏa đề bài.

Không mất tính tổng quát, giả sử ta xuất phát từ ô góc hình chữ nhật như hình vẽ. Ta tô màu đen 2 hàng ở giữa như hình vẽ. Khi đó

- Từ ô trắng thì sau đó quân mã sẽ phải vào ô đen.
- Từ ô đen thì sau đó quân mã sẽ có thể đi vào ô trắng hoặc đen.

Để thỏa đề bài thì từ trắng qua đen sau đó phải quay về trắng, vì trên bàn cờ thì số ô đen bằng số ô trắng.

Ta gán tọa độ là (i, j) vào mỗi ô với i là hàng và j là cột.



Từ ô trắng là $(1,1)$ có tổng chẵn di chuyển qua ô đen có tổng là số lẻ, sau đó di chuyển về ô trắng có tổng là số chẵn.

Từ đó các ô trắng có tổng lẻ và các ô đen có tổng chẵn sẽ không được quân mã đi qua. Điều này mâu thuẫn, dẫn đến mệnh đề sai và ta có điều phải chứng minh là đúng. ■

Phân tích. Ta thử tô màu bàn cờ theo một quy luật nào đó, sao cho bước đi của mã luôn làm thay đổi theo một quy tắc hoặc bảo toàn một tính chất nhất định. Ở bài toán trên, ta áp dụng hai phương pháp là tô màu và gán tọa độ để tìm ra được hướng giải. Chú ý rằng sau khi tô màu thì việc nhìn ra tính bất biến của tọa độ cũng đơn giản hơn.

Ví dụ 1.6

Cho một bàn cờ 8×8 gồm 64 ô. Có thể lấp kín bàn cờ bằng 2 hình chữ I và 15 hình chữ T được không? (Diễn đàn Toán học, n.d.)

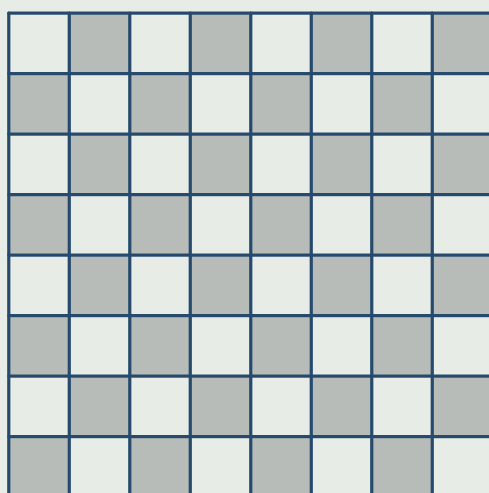
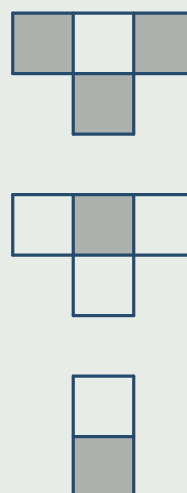
LỜI GIẢI. Ta tô màu bàn cờ xen kẽ trắng đen như bàn cờ vua và tô hình chữ I, T tương tự (Số 1 tượng trưng cho màu đen).

Mỗi chữ T sẽ bao trùm lên 1 ô đen và 3 ô trắng hoặc 3 ô đen và 1 ô trắng. 2 hình chữ I sẽ bao trùm lên 2 ô trắng và 2 ô đen.

Không mất tính tổng quát, giả sử có 1 chữ T có 1 ô đen và 3 ô trắng. Suy ra có số lẻ ô đen.

Mà bàn cờ 8×8 có 32 ô đen. Điều này mâu thuẫn, dẫn đến mệnh đề sai.

Vậy ta không thể lấp kín bàn cờ. ■



Phân tích. Bài toán trên áp dụng phương pháp tô màu giúp lời giải trở nên dễ dàng hơn. Ta suy nghĩ đến tính bất biến chẵn lẻ của ô đen và trắng trên bàn cờ.

Ví dụ 1.7

Một hình vuông được chia thành 16 ô vuông. Trong mỗi ô vuông đánh dấu cộng (+), trừ một ô đánh dấu trừ (-). Những dấu ở các ô vuông có thể thay đổi đồng thời theo hàng, cột hoặc đường chéo. Có khả năng sau hữu hạn lần đổi dấu theo nguyên tắc trên dẫn đến tất cả các ô vuông đều có dấu cộng (+) không? (Điền Nguyễn, 2005)

LỜI GIẢI. Bằng cách quy ước dấu (+) là 1 và dấu (-) là -1 , ta xét tích của 8 ô được đánh dấu ở hình 2. Vì mọi thao tác đổi dấu hàng, cột hay đường chéo đều tác động lên một số chẵn các ô trong nhóm này (0, 2 hoặc 4 ô), nên tích của chúng là một đại lượng bất biến không bao giờ thay đổi. Ban đầu, tích của 8 ô này bằng -1 , trong khi trạng thái mục tiêu (toàn dấu cộng) yêu cầu tích phải bằng 1. Do sự mâu thuẫn của đại lượng bất biến này, câu trả lời là không thể thực hiện được yêu cầu đề bài. ■

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

2.1 Bài tập có hướng dẫn giải

Bài toán 1. Cho một quân cờ ở ô $(1, 1)$ của một bảng vuông $n \times n$. Hai người A và B thay phiên nhau di chuyển quân cờ, A đi trước. Mỗi lượt, người chơi có thể di chuyển quân cờ từ ô (x, y) đến một trong ba ô: $(x + 1, y)$, $(x, y + 1)$ hoặc $(x + 1, y + 1)$, miễn là ô đó vẫn nằm trong bảng. Người di chuyển quân cờ đến được ô (n, n) là người thắng. Tìm tất cả các giá trị $n \geq 2$ để B có chiến thuật thắng. (Larsson, 2010)

Bài toán 2. Viết lên bảng số 10^{2025} . Hai bạn An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Ở mỗi lượt chơi, người chơi được phép thực hiện một trong hai thao tác sau:

- Nếu trên bảng có hợp số n thì xóa số n đi và viết lên bảng hai số nguyên dương $a, b > 1$ sao cho $n = ab$.
- Nếu trên bảng xuất hiện hai số bằng nhau thì có thể xóa ít nhất một trong hai số đó

Người nào không thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng, biết An là người đi trước? (Lâm, 2024)

Bài toán 3. Có ba đồng sỏi với số sỏi tương ứng là 2024, 2025, 2026 viên sỏi. Hai người chơi lần lượt bốc sỏi như sau: Mỗi lần người chơi được phép bốc một viên sỏi từ một đồng sỏi bất kì trừ đồng sỏi đã được bốc bởi đối phương ở lượt ngay trước đó. Người nào không thực hiện được lượt đi của mình là người thua cuộc. Ai là người có chiến thuật thắng? (Lâm, 2024)

Bài toán 4. Người ta chơi một trò chơi trên một bảng kẻ ô vuông, kích thước 5×9 (gồm 45 ô vuông đơn vị). Ban đầu, có 33 đồng xu được đặt vào các ô vuông của bảng, sao cho không có ô nào có nhiều hơn một đồng xu. Ở mỗi bước, người chơi sẽ di chuyển tất cả các đồng xu trên bảng, dựa theo ba quy tắc sau:

- Tại mỗi bước, với mỗi đồng xu trên bảng, một trong hai thao tác sau được thực hiện: (1) lên hoặc xuống ô kề nó (chung cạnh); hoặc (2) sang trái hoặc sang phải ô kề nó.
- Nếu ở mỗi bước, một đồng xu nào đó đã được thực hiện một trong hai thao tác thì ở bước tiếp theo nó phải thực hiện thao tác còn lại.
- Không thể có đồng xu di chuyển ra khỏi bảng.

Trò chơi sẽ dừng lại nếu tồn tại một ô vuông chứa nhiều hơn một đồng xu. Chứng minh rằng trò chơi sẽ kết thúc sau hữu hạn bước. (Sở Giáo dục và Đào tạo Thanh Hóa, 2022)

2.2 Bài tập tự luyện

Bài toán 5. Giả sử n là 1 số lẻ ta viết lên bảng các số từ 1 đến $2n$, sau đó chọn ra 2 số bất kỳ a và b và viết lại 1 số bằng $|a - b|$. Chứng minh rằng số cuối cùng còn lại trên bảng là 1 số lẻ.

Gợi ý: Đặt $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2n$ ta có S' là tổng đó sau mỗi lần thực hiện phép biến đổi. Vậy ta có $S' = S - (a + b) + |a - b|$. Tới đây ta sẽ xét module 2 cho $|a - b| - (a + b)$ sao cho $S' \equiv S \pmod{2}$ và chứng minh S là số lẻ.

Bài toán 6. Hai bạn A và B tham gia một trò chơi. Có một tờ giấy đã viết 47 số nguyên từ 1 đến 47 và một hộp đựng n viên bi. A là người chơi trước, B là người chơi sau và sở hữu hộp bi. Hai người luân phiên thực hiện gạch số, mỗi lượt chơi thì người chơi gạch đi 5 số. Sau khi A chơi xong lượt cuối cùng thì còn lại 2 số, hai số đó chênh lệch bao nhiêu thì B phải đưa cho A bấy nhiêu viên bi. Nếu B hết bi hoặc không đủ bi để đưa cho A thì A thắng, ngược lại nếu B còn ít nhất 1 viên bi thì B thắng cuộc.

1. Với $n = 27$, chứng minh rằng B luôn có cách chơi để thắng cuộc.

2. Với $n = 26$, chứng minh rằng A luôn có cách chơi để thắng cuộc.

(Sở Giáo dục và Đào tạo Thanh Hóa, 2024)

Bài toán 7. Trên bảng ghi một số nguyên dương có hai chữ số trở lên. Người ta thiết lập số mới bằng cách xóa đi chữ số hàng đơn vị của số đã cho, sau đó cộng vào số còn lại 7 lần số vừa bị xóa. Ban đầu trên bảng ghi số 6^{100} . Hỏi sau một số bước thực hiện như trên ta có thể thu được 100^6 hay không? Tại sao?

Gợi ý: Đặt $n = 10q + r$ với $r \in [0; 9]$. Từ đó ta có $f(n) = q + 7r \equiv 0 \pmod{3}$ rồi xét đồng dư modulo 3.

Bài toán 8. Trong một hộp có 2010 viên sỏi. Có hai người tham gia trò chơi, mỗi người lần lượt phải bốc ít nhất là 11 viên sỏi và nhiều nhất là 20 viên sỏi. Người nào bốc viên sỏi cuối cùng sẽ thua cuộc. Hãy tìm thuật toán chơi để đảm bảo người bốc đầu tiên luôn là người thắng cuộc.

Bài toán 9. Cho một bàn cờ quốc tế 8×8 . Hỏi rằng quân mã có thể đi nước đầu tiên từ ô dưới cùng bên trái và kết thúc ở ô trên cùng bên phải hay không, với điều kiện nó phải đi qua tất cả các ô trên bàn cờ và mỗi ô chỉ đi qua đúng một lần?

Gợi ý: Theo bàn cờ quốc tế 8×8 thì một bàn cờ có 2 ô ở hai góc phía ngoài cùng đối nhau sẽ có màu giống nhau. Ta cũng có quân mã sau mỗi nước đi sẽ thay đổi màu ô của mình. Do một bàn cờ gồm 64 ô nên quân mã cần đi 63 lần để thỏa yêu cầu đề. Tuy nhiên sau n lần đi với n là số lẻ thì quân mã sẽ có màu ô khác màu ô ban đầu. Suy ra lúc mã tới ô phía bên kia sẽ có màu khác. Từ đó ta suy ra vô lý.

Bài toán 10. Cho bàn cờ vua tiêu chuẩn 8×8 , các hàng ngang được đánh số từ 1 đến 8, các cột được đánh dấu từ a đến h . Trong một trận đấu 2 người chơi, một người có quân xe trắng bắt đầu ở $b2$, còn người kia thì có xe đen ở $c4$. Ở mỗi lượt đi, một quân xe phải di chuyển đến một ô khác nằm trên cùng hàng hoặc cùng cột với ô xuất phát của nó. Tuy nhiên, ô đến không được nằm trong tầm tấn công của quân xe còn lại, và không được là ô mà bất kỳ quân xe nào đã từng đặt chân tới trước đó. Người chơi không còn nước đi hợp lệ sẽ thua. Hỏi người nào có cách để chiến thắng? (Art of Problem Solving, 2020)

Bài toán 11. Trên bảng cho 2014 số tự nhiên từ 1 đến 2014. Thực hiện liên tiếp phép biến đổi sau: Mỗi lần xóa đi hai số bất kỳ a, b có trên bảng rồi viết thêm số $a + b - \frac{ab}{2}$ vào bảng. Khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số thì dừng lại. Tìm số còn lại đó.

Bài 1. (Larsson, 2010) Cho một quân cờ ở ô $(1, 1)$ của một bảng vuông $n \times n$. Hai người A và B thay phiên nhau di chuyển quân cờ, A đi trước. Mỗi lượt, người chơi có thể di chuyển quân cờ từ ô (x, y) đến một trong ba ô: $(x + 1, y)$, $(x, y + 1)$ hoặc $(x + 1, y + 1)$, miễn là ô đó vẫn nằm trong bảng. Người di chuyển quân cờ đến được ô (n, n) là người *thắng*. Tìm tất cả các giá trị $n \geq 2$ để B có chiến thuật thắng.

LỜI GIẢI. Ta gọi số bước còn lại để đi từ ô (x, y) đến (n, n) theo phương ngang và phương dọc là:

$$a = n - x, \quad b = n - y.$$

Mỗi lượt di chuyển làm giảm a đi 1, hoặc giảm b đi 1, hoặc giảm cả hai.

Do từ ô $(2c, 2d)$ với c, d là số tự nhiên bất kỳ nước đi nào cũng sẽ tạo ra ít nhất một số lẻ. Xét một ví trí bất kì:

- Nếu a và b đều *chẵn*, thì người đến lượt đi tại vị trí đó rơi vào thế bất lợi.
- Nếu a và b không đồng thời *chẵn*, người chơi luôn có thể di chuyển sao cho đưa trò chơi trở về ô $(2c, 2d)$.

Ở ô $(1, 1)$, ta có $a = b = n - 1$. Xét các trường hợp sau.

- Nếu n *lẻ* thì $n - 1$ là *chẵn*, nên ô ban đầu là ô $(2c, 2d)$. Do đó người A (đi trước) rơi vào vị trí bất lợi nên B có lợi thế và chiến thắng.
- Nếu n *chẵn* thì $n - 1$ là *lẻ*, nên A có lợi thế và thắng.

Do đó người B có chiến thuật thắng khi và chỉ khi là số lẻ.

Bài 2. (Lâm, 2024) Viết lên bảng số 10^{2025} . Hai bạn An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Ở mỗi lượt chơi, người chơi được phép thực hiện một trong hai thao tác sau:

- Nếu trên bảng có hợp số n thì xóa số n đi và viết lên bảng hai số nguyên dương $a, b > 1$ sao cho $n = ab$.
- Nếu trên bảng xuất hiện hai số bằng nhau thì có thể xóa ít nhất một trong hai số đó

Người nào không thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng, biết An là người đi trước?

LỜI GIẢI. Ta thấy rằng sau mỗi thao tác thì tích tất cả các số có mặt trên bảng luôn không tăng, mà 10^{2025} có hữu hạn ước số nên trò chơi sẽ phải kết thúc sau hữu hạn lượt chơi. Ta sẽ chứng minh rằng A sẽ có chiến thuật thắng. Thật vậy, chiến thuật chơi của A là như sau:

- Ở lượt đi đầu tiên, A sẽ xóa số 10^{2025} và viết lên bảng hai số 2^{2025} và 5^{2025} .
Theo luật chơi, sau lượt chơi này, mọi số trên bảng đều chỉ có thể là lũy thừa của 2 hoặc 5.
- Ở những lượt đi tiếp theo, A sẽ "bắt chước" lượt chơi của B như sau:
 - Nếu ở lượt chơi của mình mà B xóa số 2^α ($\alpha \in \mathbb{N}^*$) và viết thêm hai số $2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^*$) thì A sẽ xóa đi số 5^α và viết thêm lên bảng hai số $5^{\alpha_1}, 5^{\alpha_2}$ và ngược lại.
 - Nếu ở lượt chơi của mình mà B xóa đi ít nhất một trong hai số $2^{\alpha_i}, 2^{\alpha_j}$ với $\alpha_i = \alpha_j$ thì A sẽ thực hiện thao tác tương tự với hai số $5^{\alpha_i}, 5^{\alpha_j}$ và ngược lại.

Do số mũ của 2 và 5 của hai số trên bảng ở lượt chơi đầu tiên của B giống nhau, A luôn có thể thực hiện lượt chơi của mình sau mọi lượt chơi của B.

Vì trò chơi sẽ phải dừng lại sau hữu hạn lượt chơi, sẽ tới một lúc mà B không thể thực hiện lượt chơi của mình và A sẽ thắng.

Nhận xét

Trong các bài toán trò chơi có điểm dừng, chiến thuật "bắt chước" là một kỹ thuật vô cùng quen thuộc.

Bài 3. (Lâm, 2024) Có ba đồng sỏi với số sỏi tương ứng là 2024, 2025, và 2026 viên sỏi. Hai người chơi lần lượt bốc sỏi như sau: Mỗi lần người chơi được phép bốc một viên sỏi từ một đồng sỏi bất kì trừ đồng sỏi đã được bốc bởi chính người chơi ấy ở lượt ngay trước đó. Người nào không thực hiện được lượt đi của mình là người thua cuộc. Ai là người có chiến thuật thắng?

LỜI GIẢI. Gọi A, B, C là ba đồng sỏi tương ứng gồm 2024, 2025 và 2026 viên sỏi và X, Y tương ứng là người chơi thứ nhất và người chơi thứ hai.

Ta sẽ chứng minh X có chiến thuật thắng. Thật vậy, chiến thuật của người chơi X là như sau:

Ở lượt đi đầu tiên, X bốc một viên sỏi từ đồng B . Có hai trường hợp có thể xảy ra:

- Nếu ở lượt đi đầu tiên của Y , Y bốc sỏi ở đồng không phải B thì X sẽ bốc sỏi ở đồng mà Y bốc trước đó. Ở những lượt chơi tiếp theo, nếu Y bốc sỏi ở đồng nào thì X sẽ bốc sỏi ở đồng đó ở lượt ngay sau đó.
- Nếu ở lượt đi đầu tiên của Y , Y bốc sỏi ở đồng B thì X sẽ bốc sỏi ở đồng A ở lượt tiếp theo. Số sỏi hai đồng A, B lúc này bằng nhau (cùng bằng 2023 viên sỏi). Từ đó, X sẽ bắt chước cách chơi ở lượt ngay trước đó của Y khi tới lượt mình chơi như sau:
 - Nếu Y bốc sỏi ở đồng A ở lượt của mình thì X sẽ bốc sỏi ở đồng B và ngược lại.
 - Nếu Y bốc sỏi ở đồng C thì X cũng sẽ bốc sỏi ở đồng C .

Ở trường hợp đầu, sau lượt bốc sỏi đầu tiên của X thì số sỏi ở mỗi đồng đều là số chẵn, và vì X có thể thực hiện chiến thuật của mình cho tất cả các lượt tiếp theo nên X luôn có thể thực hiện lượt chơi sau khi Y thực hiện lượt chơi.

Ở trường hợp thứ hai, sau lượt bốc sỏi thứ hai của X thì số sỏi của đồng A và B bằng nhau và số sỏi đồng C là một số chẵn. Vì X có thể thực hiện chiến thuật của mình cho mọi lượt chơi sau đó, X luôn có thể thực hiện lượt chơi sau khi Y thực hiện lượt chơi. Và do số sỏi là hữu hạn nên sẽ có lúc Y không thể thực hiện lượt chơi và X là người chiến thắng.

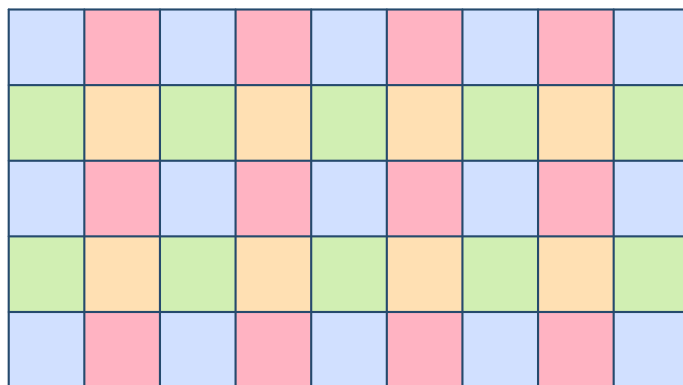
Vậy X là người có chiến thuật thắng. ■

Bài 4. (Sở Giáo dục và Đào tạo Thanh Hóa, 2022) Người ta chơi một trò chơi trên một bảng kẻ ô vuông, kích thước 5×9 (gồm 45 ô vuông đơn vị). Ban đầu, có 33 đồng xu được đặt vào các ô vuông của bảng, sao cho không có ô nào có nhiều hơn một đồng xu. Ở mỗi bước, người chơi sẽ di chuyển tất cả các đồng xu trên bảng, dựa theo ba quy tắc sau:

- Tại mỗi bước, với mỗi đồng xu trên bảng, một trong hai thao tác sau được thực hiện: (1) lên hoặc xuống ô kề nó (chung cạnh); hoặc (2) sang trái hoặc sang phải ô kề nó.
- Nếu ở mỗi bước, một đồng xu nào đó đã được thực hiện một trong hai thao tác thì ở bước tiếp theo nó phải thực hiện thao tác còn lại.
- Không thể có đồng xu di chuyển ra khỏi bảng.

Trò chơi sẽ dừng lại nếu tồn tại một ô vuông chứa nhiều hơn một đồng xu. Chứng minh rằng trò chơi sẽ kết thúc sau hữu hạn bước.

LỜI GIẢI. Giả sử tồn tại một cách chơi không kết thúc sau hữu hạn bước. Ta tô bảng ô vuông như hình.



Khi đó sẽ có 15 ô màu lam, 12 ô màu đỏ, 8 ô màu vàng, và 10 ô màu lục. Chia 33 đồng xu được xếp lên thành hai nhóm:

I. Nhóm các đồng xu nằm ở ô màu lam hoặc màu vàng;

II. Nhóm các đồng xu nằm ở ô màu đỏ hoặc màu lục.

Theo nguyên lí Dirichlet, sẽ có một nhóm chứa ít nhất 17 đồng xu. Nếu sau bước nào đó một nhóm có không ít hơn 17 đồng xu, thì sau bước tiếp theo nhóm còn lại có không ít hơn 17 đồng xu.

Vì trò chơi diễn ra vô hạn, tồn tại một thời điểm mà nhóm I có ít nhất 17 đồng xu. Ta xét thời điểm này. Lại theo nguyên lí Dirichlet, trong nhóm I có ít nhất 9 đồng xu nằm trên cùng một màu, là một trong hai màu lam hoặc vàng. Tuy nhiên, trên bảng chỉ có 8 ô màu vàng, và không có một ô chứa nhiều hơn một đồng xu; do đó, ô màu lam chứa ít nhất 9 đồng xu.

Tuy nhiên, sau hai bước, mọi đồng xu ở các ô màu lam sẽ di chuyển vào các ô màu vàng (bằng cách di chuyển xanh $\rightarrow$ đỏ $\rightarrow$ vàng hoặc xanh $\rightarrow$ lục $\rightarrow$ vàng). Khi đó, tồn tại một ô màu vàng chứa nhiều hơn một đồng xu. Ta có ngay điều mâu thuẫn. Vì vậy, giả sử ban đầu là sai, tức là trò chơi phải kết thúc sau hữu hạn bước. ■

Qua chuyên đề “Các bài toán tổ hợp và rời rạc”, mong rằng bạn đọc đã tiếp cận những khái niệm cốt lõi và cách tư duy chiến lược trong các trò chơi toán học rời rạc. Từ việc phân tích cấu trúc trò chơi, xác định trạng thái thắng-thua và xây dựng chiến lược tối ưu, các bài toán trò chơi đã cho thấy một phần thú vị của Toán học, đồng thời giúp người học rèn luyện khả năng lập luận và tư duy sáng tạo trong việc tìm giải pháp.

Hy vọng rằng chuyên đề này đã góp phần giúp bạn đọc trang bị được những công cụ cần thiết cho các bài toán trò chơi nói riêng và Toán Tổ hợp – Rời rạc nói chung, và đồng thời cảm nhận được vẻ đẹp tinh tế từ thế giới phong phú của các bài toán trò chơi. Đó cũng là điều mà nhà toán học John Horton Conway – người đã sáng tạo ra nhiều trò chơi toán học và góp phần định hình lý thuyết trò chơi tổ hợp đã thể hiện qua lời trích dẫn (MacTutor, n.d.):

“TÔI TỪNG CẢM THẤY TỘI LỖI... VÌ DÀNH CẢ NGÀY CHƠI TRÒ CHƠI TRONG KHI ĐÁNG LÊ RA PHẢI HỌC TOÁN. RỒI... TÔI NHẬN RA RẰNG TRÒ CHƠI CHÍNH LÀ TOÁN HỌC.”

Tài liệu tham khảo

- Art of Problem Solving. (2020). *2012 ToT Spring Senior O p5 2 rooks on chessboard, winning strategy*. Retrieved from <https://artofproblemsolving.com/community/c893771h2022962p14227601>
- Diễn đàn Toán học. (n.d.). *Cho bàn cờ 8x8 ô vuông có thể lắp kín bàn cờ này bằng 2 chữ I và 15 chữ T được không?* Retrieved from <https://diendantoanhoc.org/topic/135134-cho-ba%CC%80n-c%CC%A1%CC%80-8x8-%C3%B4-vu%CC%B4ng-co%CC%81-th%CC%AA%CC%89-1%CC%A2%CC%81p-ki%CC%81n-ba%CC%80n-c%CC%A1%CC%80-na%CC%80y-b%CC%83%CC%80ng-2-ch%CC%B0%CC%83-i-va%CC%80-15-ch%CC%B0%CC%83-t-%CC%91%CC%B0%CC%A1%CC%A3c-kh/>
- Engels, A. (1998). *Problem Solving Strategies*. Springer.
- Larsson, U. (2010). A generalized Wythoff's game. *arXiv preprint arXiv:1005.1555*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1005.1555>
- Lâm, N. T. (2024). *Một số chuyên đề tổ hợp*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- MacTutor. (n.d.). *Quotations from John Conway*. Retrieved from <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Conway/quotations/>
- Sở Giáo dục và Đào tạo Thanh Hóa. (2022). *Kỳ thi vào lớp 10 THPT chuyên Lam Sơn năm học 2022-2023: Môn Toán (Chuyên)*.
- Sở Giáo dục và Đào tạo Thanh Hóa. (2024). *Kỳ thi vào lớp 10 THPT chuyên Lam Sơn năm học 2024-2025: Môn Toán (Chuyên)*.
- Diễn Nguyễn, H. (2005). *Giải toán bằng phương pháp Đại lượng bất biến*. NXB Giáo dục.