

Chuyên đề 4: Cực trị trong hình học

Ban Toán học – Tổ chức The Gifted Battlefield nhiệm kỳ 2025-2026

Xuất bản vào Ngày 18 tháng 1 năm 2026

Tóm tắt nội dung

Hình học phẳng luôn giữ vai trò quan trọng trong việc rèn luyện tư duy logic, khả năng phân tích và suy luận toán học. Qua đó, hình học phẳng trở thành một nội dung trọng tâm trong các kì thi chuyên và chọn Học sinh giỏi. Chuyên đề này giới thiệu một mảng tiêu biểu của hình học phẳng, tập trung các lớp bài toán hình học có yếu tố cực trị.

Các phương pháp như sử dụng các đánh giá cơ bản, các bất đẳng thức như AM-GM hoặc định lí Ptolemy cũng sẽ được nhắc đến, kèm theo một số bài toán hình học thực tế có yếu tố cực trị. Do đó, chuyên đề này sẽ phù hợp với các bạn học sinh Trung học Cơ sở muốn tìm hiểu sâu hơn về các bài toán này, đặc biệt nhằm phục vụ cho việc ôn luyện các kì thi chuyên và chọn Học sinh giỏi. Cầm trên tay chuyên đề này, bạn đọc hãy nghiền ngẫm lí thuyết và nghiên cứu các phương pháp một cách tuần tự, và hãy tự giải một số bài toán được viết trong đây. Chuyên đề cũng có thêm một số bài tập nhằm tạo điều kiện cho bạn đọc tự học, tự khám phá và củng cố kiến thức đã tiếp thu.

Mục lục

1	Lí thuyết cơ sở	2
2	Các bài toán ví dụ	4
2.1	Các bài toán sử dụng định nghĩa và đánh giá cơ bản	4
2.2	Các bài toán sử dụng định lí Ptolemy	6
2.3	Cực trị hình học trong các bài toán thực tế	7
3	Bài tập	9
3.1	Bài tập có hướng dẫn giải	9
3.2	Bài tập tự luyện	10
4	Lời kết	12
	Tài liệu tham khảo	12

1 Lí thuyết cơ sở

Chúng ta quan tâm đến các bài toán hình học có yếu tố cực trị; tức là, tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một đại lượng hình học (độ dài, diện tích, thể tích) hoặc một biểu thức gồm các đại lượng hình học. Cũng như các bài toán về cực trị khác, một bài toán cực trị hình học là một bài toán “hai phần”: chứng minh một biểu thức các đại lượng hình học bị chặn trên ($\leq$) hoặc dưới ($\geq$) bởi một cực trị (giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất); và chỉ ra rằng tồn tại một cấu hình sao cho biểu thức đó đạt cực trị.

Để chứng minh một biểu thức bị chặn bởi một cực trị nào đó, ta sử dụng một hoặc một chuỗi các bất đẳng thức nhằm đánh giá biểu thức. Bất đẳng thức cơ bản nhất có thể kể đến như bất đẳng thức hiển nhiên $x^2 \geq 0$, hoặc các bất đẳng thức so sánh độ dài hai đại lượng hình học. Một số bài toán cực trị có thể được giải quyết bằng một số bất đẳng thức cụ thể, chẳng hạn như bất đẳng thức AM-GM (so sánh trung bình cộng - trung bình nhân), và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (hay còn gọi là bất đẳng thức Bunyakovsky).

Định lý 1.1 (Bất đẳng thức AM-GM)

Cho n số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$. Khi đó

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Trong khuôn khổ của Toán chuyên Trung học Cơ sở, ta thường quan tâm đến trường hợp $n = 2$ và $n = 3$. Dưới đây là chứng minh bất đẳng thức cho hai trường hợp này.

Chứng minh. Với trường hợp $n = 2$, chú ý rằng bất đẳng thức

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$$

luôn đúng với mọi số thực không âm x_1 và x_2 . Khai triển bất đẳng thức trên, rõ ràng thu được

$$x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \geq 0 \iff \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}.$$

Với trường hợp $n = 3$, đặt $a = \sqrt[3]{x_1}$, $b = \sqrt[3]{x_2}$, và $c = \sqrt[3]{x_3}$. Chú ý rằng bất đẳng thức

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

luôn đúng với mọi số thực không âm a, b, c . Khai triển, rõ ràng thu được

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \iff a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0.$$

Vì $a + b + c \geq 0$ nên

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0 \iff a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0,$$

hay ta có $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$. ■

Định lý 1.2 (Cauchy-Schwarz)

Cho $2n$ số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Cũng như bất đẳng thức AM-GM, ta quan tâm đến trường hợp $n = 2$ và $n = 3$.

Chứng minh. Với $n = 2$, ta thấy

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2.$$

Với $n = 3$, chú ý rằng

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 \geq 0.$$

Hoàn tất chứng minh. ■

Ngoài ra, một số bài toán cực trị liên quan đến tứ giác và tứ giác nội tiếp có thể được giải quyết bằng một định lý khá mạnh, xin giới thiệu đến bạn đọc, đó là định lý Ptolemy.

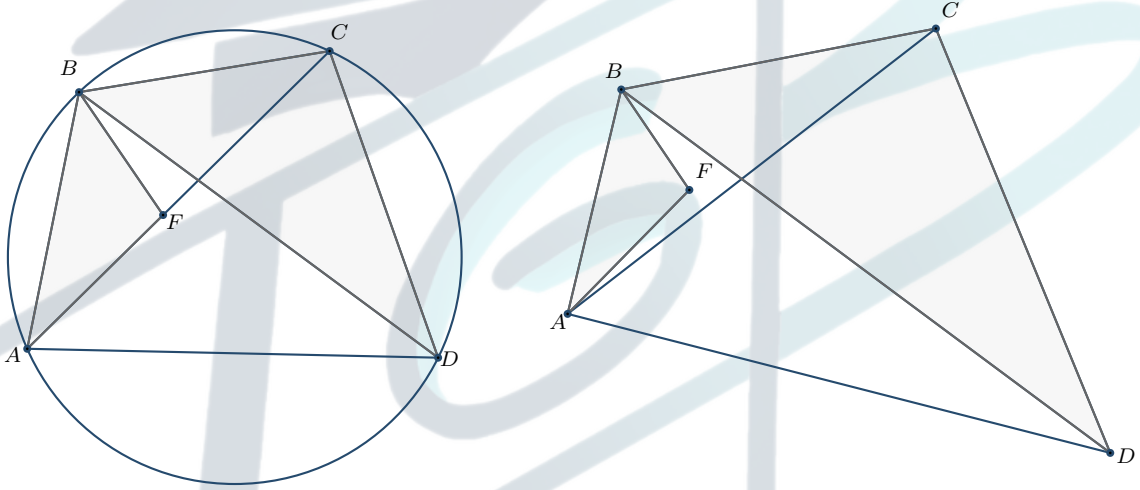
Định lý 1.3 (Ptolemy)

Với mọi tứ giác lồi $ABCD$, ta luôn có

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Chứng minh. Dựng F thuộc AC , sao cho $\widehat{ABF} = \widehat{CBD}$ và $\widehat{BAF} = \widehat{BDC}$. Khi đó, $\triangle BFA \sim \triangle BCD$ và $\triangle ABD \sim \triangle FBC$, cả hai đều theo trường hợp đồng dạng góc-góc. Ta xét hai trường hợp trên tứ giác $ABCD$.



Trường hợp 1: Tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, mà $\widehat{BAF} = \widehat{BDC}$ nên $\widehat{BAF} = \widehat{BAC} \Rightarrow F \in AC$.

Mặt khác, từ $\triangle BFA \sim \triangle BCD$, ta suy ra $\frac{AB}{BD} = \frac{FA}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = FA \cdot BD$ (1).

Tương tự, $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{FC} \Rightarrow AD \cdot BC = FC \cdot BD$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $AB \cdot CD + AD \cdot BC = FA \cdot BD + FC \cdot BD = AC \cdot BD$.

Trường hợp 2: Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp.

Vì $\widehat{BAC} \neq \widehat{BAF}$ nên F không còn thuộc AC . Khi đó

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = FA \cdot BD + FC \cdot BD = (FA + FC) \cdot BD > AC \cdot BD.$$

Chứng minh hoàn tất. ■

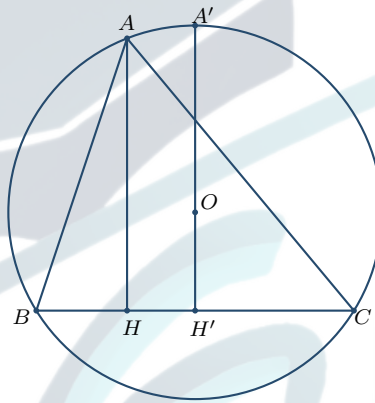
2.1 Các bài toán sử dụng định nghĩa và đánh giá cơ bản

Ta sẽ khởi đầu bằng một ví dụ cơ bản.

Ví dụ 2.1

Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC . Tìm vị trí của A để ta đạt được giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC .

Để làm một bài cực trị, ta cần xác định: Cái gì cố định; cái gì thay đổi; cái cần tối ưu hóa là gì. Ở bài này, cái cố định là dây cung BC , cái thay đổi là điểm A , cái cần tối ưu hóa là diện tích tam giác ABC . Cung BC cố định dẫn tới việc độ dài của BC cũng như vị trí của BC cố định trong (O) , và việc yêu cầu tối đa hóa diện tích tam giác ABC gợi chúng ta đến công thức $S = \frac{BC \times AH}{2}$, với H là chân đường cao hạ từ A xuống BC . Rõ ràng, A càng cách xa BC thì AH sẽ càng lớn, và điểm nằm trên đường tròn cách xa BC nhất là điểm chính giữa cung lớn BC . Thế nên, ta sẽ có lời giải như sau.



LỜI GIẢI. Gọi A' là điểm chính giữa cung lớn BC trong (O) , H, H' lần lượt là chân đường cao hạ từ A, A' xuống BC . Dùng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} \leq \frac{(AO + OH') \cdot BC}{2} = \frac{(A'O + OH') \cdot BC}{2} = \frac{A'H \cdot BC}{2} = S_{A'BC}$$

Vậy diện tích của tam giác ABC sẽ không quá diện tích tam giác $A'BC$, đẳng thức xảy ra khi $AH = AO + OH'$, tức khi A, O, H thẳng hàng, tương đương A là điểm chính giữa cung lớn BC . ■

Nhận xét

Lời giải trên áp dụng ý tưởng kẻ song song để chứng minh khi điểm nằm trong/ngoài miền giới hạn, thì khoảng cách của điểm ấy sẽ lớn/nhỏ hơn điểm ta lấy làm cực trị.

Sau đây là một bài toán bất đẳng thức cũng tương đối đơn giản:

Ví dụ 2.2

1. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng:

$$BC^2 < AB^2 + AC^2$$

2. Cho tam giác ABC có $\hat{A} > 90^\circ$. Chứng minh rằng:

$$BC^2 > AB^2 + AC^2$$

Các dữ kiện trên gợi chúng ta đến hệ thức của định lý Pytago, và để áp dụng định lý Pytago ta có việc tìm ra hoặc dựng nên góc vuông, dẫn tới lời giải như sau:

LỜI GIẢI. Dựng đường cao BH với cạnh AC .

1. H nằm trên đoạn BC do ABC nhọn nên ta có:

$$AB^2 + AC^2 > HB^2 + HC^2 = BC^2$$

suy ra điều phải chứng minh.

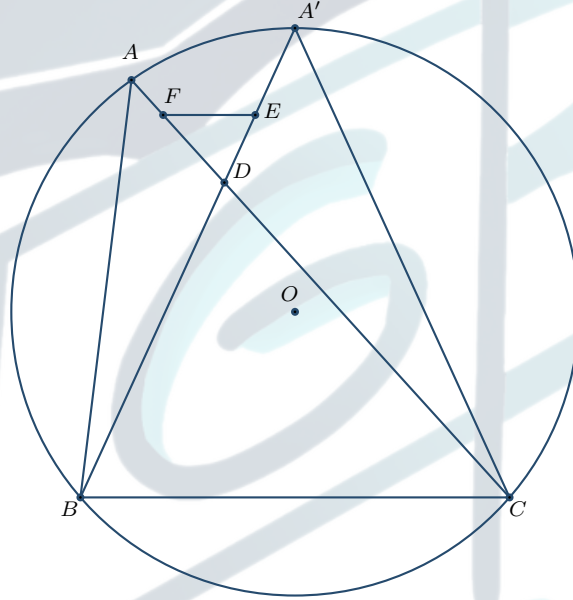
2. Do A nằm trên đoạn HC nên ta có:

$$AB^2 + AC^2 = AH^2 + BH^2 + (HC - HA)^2 = CH^2 + BH^2 + 2AH^2 - 2AH \cdot CH < CH^2 + BH^2 = BC^2$$

Suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 2.3

Cho đường tròn (O) và dây cung BC của đường tròn (O) cố định. Tìm vị trí điểm A trên cung lớn BC của (O) sao cho $S = AB + AC$ đạt giá trị lớn nhất



LỜI GIẢI. Gọi A' là điểm chính giữa cung lớn BC , khi đó ta có $A'B = A'C$. Ta muốn chứng minh khi $A \equiv A'$ thì tổng S sẽ đạt giá trị lớn nhất, nên ta sẽ chứng minh $A'B - AB + A'C - AC \geq 0$, hay $A'B - AB \geq AC - A'C$. Không mất tính tổng quát, giả sử A thuộc cung nhỏ $A'B$. Giả sử AC giao $A'B$ tại D . Lấy hai điểm E, F trên các cạnh $A'B, AC$ thỏa $AB = BE$ và $A'C = CF$. Khi đó điều phải chứng minh trở thành $A'E \geq AF$. Nhận thấy $\widehat{AA'B} = \widehat{ACB} < \widehat{A'CB} = \widehat{A'BC} = \widehat{A'AC}$ nên ta suy ra $AD < A'D$.

Do tứ giác $AA'BC$ nội tiếp, nên ta có:

$$\begin{aligned} \Delta ABD \sim \Delta A'CD &\Rightarrow \begin{cases} \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \\ \frac{AD}{BD} = \frac{A'D}{CD} \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{A'C} = \frac{AB - BD}{A'C - CD} = \frac{BE - BD}{CF - CD} = \frac{DE}{DF} \end{aligned}$$

Đồng thời, $\Delta AA'D \sim \Delta BCD \Rightarrow 1 \geq \frac{AD}{A'D} = \frac{DB}{DC} = \frac{DE}{DF} \Rightarrow DE \leq DF$ Dẫn đến $A'E = A'D - DF \geq AD - DF = AF$ dẫn đến điều phải chứng minh. ■

2.2 Các bài toán sử dụng định lí Ptolemy

Hãy khởi động bằng vài bài toán để ta làm quen với bất đẳng thức Ptolemy

Ví dụ 2.4

Cho $\triangle ABC$, điểm M bất kỳ trên mặt phẳng.

- Giả sử ABC là tam giác đều. Xét độ dài các đoạn thẳng MA, MB, MC . Chứng minh rằng hoặc chúng là độ dài các cạnh của một tam giác, hoặc tồn tại hai trong ba độ dài sao cho tổng của chúng bằng độ dài còn lại.
- Tìm vị trí điểm M để $MA + MB + MC$ là nhỏ nhất.

 LỜI GIẢI.

- Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho 4 điểm A, B, M, C ta có:

$$AB \cdot CM + AC \cdot BM \geq BC \cdot AM$$

Mà $AB = BC = CA$, nên $MB + MC \geq MA$. Tương tự, ta thu được $MC + MA \geq MB$ và $MA + MB \geq MC$, thu được điều phải chứng minh.

- Với trường hợp mọi góc trong tam giác nhỏ hơn 120° . Ta dựng về phía ngoài $\triangle ABC$ tam giác đều BCD . Từ đánh giá ở câu 1., ta có

$$MA + MB + MC \geq MA + MD \geq AD$$

Mà AD là một đoạn thẳng cố định, thế nên giá trị nhỏ nhất của biểu thức là AD .

Ta xác định được vị trí điểm M khi các dấu "=" trong bất đẳng thức xảy ra. Tức là $MB + MC = MD$ và $MA + MD = AD$, suy ra A, M, D thẳng hàng và M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD .

Với trường hợp tam giác có một góc lớn hơn 120° thì M trùng với đỉnh ứng với góc tù đó. ■

Nhận xét

Điểm M được gọi là điểm Torricelli trong tam giác. với vị trí điểm M như trên thì ta biến đổi thu được $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$. Nếu ta cũng dựng các tam giác ACE và AFB đều thì M là giao của các đường tròn $(BCD), (ACE), (ABF)$. Điều này kéo theo các tính chất như điểm M là duy nhất, AD, BE, CF đồng quy, và $AD = BE = CF$.

Ví dụ 2.5

Cho đường tròn $(O; R)$ cố định, có dây cung $BC = R\sqrt{3}$ và điểm D bất kì nằm trên đoạn thẳng BC (D khác 2 đầu mút). M là điểm di động trên đường tròn. Xác định vị trí điểm M để $S = MB \cdot CD + MC \cdot BD$ lớn nhất, tính giá trị ấy theo R ,

 LỜI GIẢI. Gọi I là điểm chính giữa cung BC lớn, ID cắt lại đường tròn tại điểm A khác I . Khi đó D là chân đường phân giác đỉnh A trong tam giác ABC . Ta có $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DC} = k$. Ta biến đổi

$$MB \cdot CD + MC \cdot BD = \frac{1}{k}(MB \cdot CD \cdot k + MC \cdot BD \cdot k) = \frac{1}{k}(MB \cdot AC + MC \cdot AB) = \frac{1}{k}BC \cdot AM$$

Vậy giá trị của S chỉ phụ thuộc vào AM . AM lớn nhất khi AM là đường kính. Giá trị lớn nhất của S là $\frac{2\sqrt{3}}{k}R^2$ ■

Nhận xét

Ví dụ 2.5 sẽ rất khó cho đa phần các bạn lớp 9 nếu không biết dựng điểm I và A . Thực chất A mới là điểm then chốt trong bài này. Ý tưởng để ta dựng được điểm A chính là ta phải đưa biểu thức này trở thành một biểu thức nào đó liên quan đến đường tròn để dùng định lý Ptolemy, và việc dựng điểm A như trên cũng giúp biểu thức mới tỉ lệ với biểu thức cũ, từ đó công việc biến đổi rất nhẹ nhàng.

Ví dụ 2.6

Cho tam giác ABC . Các ký hiệu a, b, c, m_a, m_b, m_c tương ứng là độ dài đoạn thẳng BC, CA, AB , và độ dài đường trung tuyến đỉnh A, B, C . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{(a+b+c)(m_a+m_b+m_c)}{am_a+bm_b+cm_c}$, điều kiện nào để T đạt giá trị nhỏ nhất?

LỜI GIẢI. Gọi M, N, P là trung điểm của BC, CA, AB và G là trọng tâm của tam giác ABC . Xét tứ giác $ANGP$ có:

$$\begin{aligned}AN \cdot GP + AP \cdot GN &\geq AG \cdot NP \\ b \cdot m_c + c \cdot m_b &\geq 2a \cdot m_a\end{aligned}$$

Sau đó thao tác tương tự cho các tứ giác còn lại và cộng vế theo vế ta thu được

$$\begin{aligned}a(m_b+m_c) + b(m_a+m_c) + c(m_b+m_c) &\geq 2(am_a+bm_b+cm_c) \\ a(m_a+m_b+m_c) + b(m_a+m_b+m_c) + c(m_a+m_b+m_c) &\geq 3(am_a+bm_b+cm_c) \\ \frac{(a+b+c)(m_a+m_b+m_c)}{am_a+bm_b+cm_c} &\geq 3\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 3, dấu "=" xảy ra khi các tứ giác $ANGP, BPGM, CMGN$ nội tiếp. Khi đó $\angle BAC = \angle BPM = \angle BGM = \angle AGN = \angle APN$, và tương tự cho các góc còn lại, dẫn đến tam giác ABC đều. ■

2.3 Cực trị hình học trong các bài toán thực tế

Ví dụ 2.7

Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa đó là nhỏ nhất

LỜI GIẢI. Đổi $1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$

Ta có thể tích của bể nước là

$$V = \pi R^2 h = 1 \quad \text{vậy} \quad h = \frac{1}{\pi R^2}.$$

Khi đó diện tích toàn phần của hình trụ là $S_p = 2\pi Rh + 2\pi R^2$, hay

$$S_p = 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \frac{2}{R} + 2\pi R^2 \quad (R > 0)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số thực không âm,

$$\begin{aligned}S_p &= \frac{2}{R} + 2\pi R^2 = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + 2\pi R^2 \\ &\geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi} \text{ (m}^2\text{)}\end{aligned}$$

Vậy diện tích toàn phần nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \text{ (m)}.$$

Ví dụ 2.8

Một gia đình muốn cải tạo một ao nước nhỏ thành một hồ nước đẹp hơn. Hồ nước có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp hai lần chiều rộng và người ta tính được có thể tích bằng $\frac{62250}{3}m^3$. Theo thị trường xây dựng, giá tiền xây dựng bình quân là 350 000 đồng/ m^2 (bao gồm cả đáy và thành hồ). Hỏi chi phí thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây dựng hồ nước trên là bao nhiêu tiền?

LỜI GIẢI. Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy hồ là x (m) ($x > 0$); y là chiều sâu của hồ ($y > 0$). Khi đó, chiều dài của hình chữ nhật là $2x$ (m). Thể tích của hồ là $V = 2x \cdot x \cdot y = 2x^2y$ (m^3). Từ các dữ kiện đề bài, ta có phương trình $2x^2y = \frac{62500}{3}$. Suy ra $y = \frac{31250}{3x^2}$. Diện tích xây dựng của hồ nước là

$$S = 2x \cdot x + 2 \cdot (2x + x) \cdot y = 2x^2 + 6xy = 2x^2 + 6 \cdot x \cdot \frac{31250}{3x^2} = 2x^2 + \frac{62500}{x}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, với hai số thực không âm, ta được

$$S = 2x^2 + \frac{62500}{x} = (2x^2 + 1250) + \frac{62500}{x} - 1250 \geq 2\sqrt{2x^2 \cdot 1250} + \frac{62500}{x} - 1250 = 100x + \frac{62500}{x} - 1250.$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta thu được

$$S \geq 100x + \frac{62500}{x} - 1250 \geq 2\sqrt{100x \cdot \frac{62500}{x}} - 1250 = 3750.$$

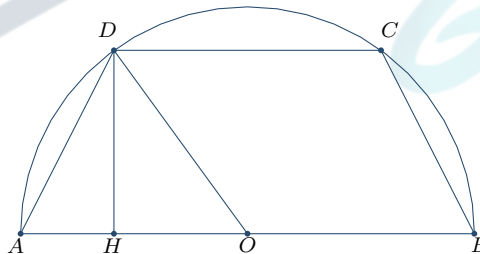
Khi đó $S_{\min} = 3750$. Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $2x^2 = 1250$ và $100x = \frac{62500}{x}$, hay $x = 25$.

Vậy chi phí thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây dựng hồ nước là

$$3750 \times 350\,000 = 1\,312\,500\,000 \text{ (đồng)}.$$

Ví dụ 2.9

Ông Sáu có một mảnh đất hình nửa hình tròn với đường kính $AB = 200m$. Trên mảnh đất ấy, ông muốn dựng hàng rào để tạo thành một mảnh đất hình thang cân $ABCD$, trong đó C và D nằm trên cung tròn đường kính AB . Hỏi diện tích lớn nhất của mảnh đất hình thang cân $ABCD$ mà ông Sáu có thể rào được là bao nhiêu mét vuông?



LỜI GIẢI. Gọi $R > 0$ là bán kính mảnh đất hình tròn. Ta có $AB = 2R = 200m$, suy ra $R = 100m$. Gọi O là tâm của đường tròn, H là hình chiếu của D trên đường thẳng AB . Đặt $OH = x$ (m), khi đó $0 < x < R$ và $DH = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Do $ABCD$ là hình thang cân nên $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DH$. Nhận thấy rằng $CD = 2OH = 2x$, do đó

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2R + 2x)\sqrt{R^2 - x^2} = (R + x)\sqrt{(R - x)(R + x)}.$$

Suy ra

$$S_{ABCD}^2 = (R+x)^2(R-x)(R+x) = (R+x)^3(R-x),$$

hay

$$3S_{ABCD}^2 = (R+x)^3(3R-3x).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 4 số thực dương

$$\begin{aligned} 3S_{ABCD}^2 &= (R+x)^3(3R-3x) \\ &\leq \left(\frac{(R+x) + (R+x) + (R+x) + (3R-3x)}{4} \right)^4 = \left(\frac{3R}{2} \right)^4. \end{aligned}$$

Khi đó

$$S_{ABCD} \leq \frac{9R^2}{4\sqrt{3}} = \frac{9 \cdot 100^2}{4\sqrt{3}} = 7500\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $R+x = 3R-3x$, hay $x = \frac{R}{2} = 50m$.

Vì vậy, diện tích lớn nhất của mảnh đất hình thang cân $ABCD$ là $7500\sqrt{3} \text{ m}^2$ khi $x = 50m$. ■

3 Bài tập

3.1 Bài tập có hướng dẫn giải

Bài toán 1. Cho tam giác ABC cân tại B với $\angle ABC = \beta$. Gọi O là trung điểm của cạnh AC . Từ O hạ đường vuông góc xuống cạnh AB tại K . Xét đường tròn (ω) tâm O , bán kính OK . Lấy điểm E thay đổi trên cạnh BA sao cho

$$\angle AOE = \alpha \quad (20^\circ < \alpha < 90^\circ).$$

Trên cạnh BC , lấy điểm F sao cho đường thẳng EF tiếp xúc với đường tròn (ω) . Hãy tìm giá trị của α để tổng $AE + CF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (ω) , và P là một điểm thay đổi thuộc cung BC không chứa A của ω . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên PB, PC .

- (a) Tìm vị trí của P để độ dài đoạn thẳng HK là lớn nhất.
- (b) Tìm vị trí của P để giá trị biểu thức $AH \cdot PB + AK \cdot PC$ là lớn nhất.

Bài toán 3. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) , và D là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A và không trùng với B, C . Gọi H, I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng BC, AC, AB . Đặt

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c, \quad DH = x, \quad DI = y, \quad DK = z.$$

- (a) Chứng minh rằng $\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x}$.
- (b) Tìm vị trí của điểm D để tổng $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$. Xác định điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho biểu thức

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

đạt giá trị nhỏ nhất, trong đó x, y, z lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến các cạnh BC, CA, AB .

Bài toán 5. Cho tam giác ABC đều cạnh a . M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB .

- (a) Chứng minh $MD + ME + MF$ không đổi và tìm giá trị nhỏ nhất của $MD^2 + ME^2 + MF^2$.
- (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $BD^2 + CE^2 + AF^2$. (Hà, n.d.) (Điền Nguyễn, 2001)

3.2 Bài tập tự luyện

Bài toán 6. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a và bốn điểm M, N, P, Q lần lượt nằm trên các đoạn AB, BC, CD, DA . Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $MNPQ$.

Bài toán 7. Cho đoạn thẳng AB , điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy. Vẽ các đường tròn có đường kính MA và MB . Xác định vị trí của điểm M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 8. Cho điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB . Vẽ các tam giác đều AMC và BMD về một phía của AB . Xác định vị trí của M để tổng diện tích hai tam giác đều trên là nhỏ nhất.

Bài toán 9. Cho đoạn thẳng AB có độ dài $2a$. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB . Qua trung điểm M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D . Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích tam giác đó.

Hướng dẫn giải bài tập

Bài 1. Dễ dàng chỉ ra $\angle EOF = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$. Chú ý rằng tam giác ABC cân $\Rightarrow \angle A = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$. Do đó $\angle EOF = \angle A = \angle C$, dẫn đến tam giác AEO và tam giác OCF đồng dạng. Mặt khác, tam giác OCF và tam giác COF đồng dạng. Từ đó tam giác AEO và tam giác COF đồng dạng. Suy ra

$$\frac{AE}{AO} = \frac{CO}{CF} \iff AE \cdot CF = AO \cdot CO = \text{const.}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, $AE + CF \geq 2\sqrt{AE \cdot CF} = 2\sqrt{AO \cdot CO} = \text{const.}$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AE = CF$, nghĩa là tam giác OCF cân tại O , và tam giác AEO cân tại A . Khi đó,

$$\angle AOE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = 90^\circ - \frac{1}{2}\left(90^\circ - \frac{1}{2}\beta\right) = 45^\circ + \frac{1}{4}\beta.$$

Vậy khi $\angle AOE = 45^\circ + \frac{1}{4}\beta$ thì $AE + CF$ nhỏ nhất.

Bài 2. Với ý (a), ta có $\triangle AHB \sim \triangle AKC \Rightarrow \triangle AHK \sim \triangle ABC$. Suy ra $\frac{HK}{BC} = \frac{AH}{AB} \leq 1$. Do đó $HK \leq BC$. Dấu bằng xảy ra khi $H \equiv B$ hay AP là đường kính. Vậy HK lớn nhất bằng BC khi AP là đường kính.

Với ý (b), ta có $AH \cdot PB + AK \cdot PC = 2S_{APB} + 2S_{APC} = 2S_{ABPC} = 2(S_{ABC} + S_{PBC})$. Suy ra $AH \cdot PB + AK \cdot PC$ lớn nhất khi và chỉ khi S_{PBC} lớn nhất, hay P là điểm chính giữa cung BC . Vậy $AH \cdot PB + AK \cdot PC$ lớn nhất khi P là điểm chính giữa cung BC .

Bài 3. Với ý (a), lấy E trên BC sao cho $\widehat{CDE} = \widehat{ADB}$. Ta thấy $\triangle CDE$ đồng dạng với $\triangle ADB$. Suy ra

$$\frac{DH}{DK} = \frac{CE}{AB} \iff \frac{x}{z} = \frac{CE}{c} \iff \frac{c}{z} = \frac{CE}{x}.$$

Tương tự $\triangle BDE$ đồng dạng với $\triangle ADC$, suy ra

$$\frac{DH}{DI} = \frac{BE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{BE}{b} \Rightarrow \frac{b}{y} = \frac{BE}{x}.$$

Từ đó $\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{BE + CE}{x} = \frac{a}{x}$. Với ý (b), chú ý rằng từ ý (a), ta có

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x} = \frac{2a}{x}.$$

Do đó S nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{a}{x}$ nhỏ nhất, hay x lớn nhất, khi và chỉ khi $D \equiv M$ (M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A).

Bài 4. Gọi diện tích $\triangle ABC$ là S . Ta có $ax + by + cz = 2S$ không đổi. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(ax + by + cz) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \geq \left(\sqrt{ax} \sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{by} \sqrt{\frac{b}{y}} + \sqrt{cz} \sqrt{\frac{c}{z}} \right)^2 = (a + b + c)^2.$$

Suy ra $\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \geq \frac{(a + b + c)^2}{2S}$. Vậy $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) = \frac{(a + b + c)^2}{2S} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}} = \frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}} = \frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}} \Leftrightarrow x = y = z,$$

hay tam giác ABC đều.

Bài 5. Ta có $S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB}$, dẫn đến

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}AH \cdot BC &= \frac{1}{2}MD \cdot BC + \frac{1}{2}ME \cdot AC + \frac{1}{2}MF \cdot AB \\ \frac{1}{2}AH \cdot a &= \frac{1}{2}a(MD + ME + MF) \\ \Rightarrow MD + ME + MF &= AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz,

$$\Rightarrow MD^2 + ME^2 + MF^2 \geq \frac{1}{3}(MD + ME + MF)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $MD = ME = MF$, tức là M là giao điểm 3 đường phân giác của tam giác ABC , do tam giác ABC đều nên M cũng là trọng tâm tam giác. Vậy $(MD^2 + ME^2 + MF^2)_{\min} = \frac{a^2}{4}$, hoàn tất ý (a). Với ý (b), ta chứng minh trường hợp tổng quát với ABC nhọn. Đặt $BD = k, CE = m, AF = n, BC = a, AC = b, AB = c$. Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (MA^2 - MF^2) + (MB^2 - MD^2) + (MC^2 - ME^2) \\ &= (MA^2 - ME^2) + (MB^2 - MF^2) + (MC^2 - MD^2) = n^2 + k^2 + m^2. \end{aligned}$$

Suy ra $2(x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2 + n^2 + k^2 + m^2 = (x^2 + k^2) + (y^2 + m^2) + (z^2 + n^2)$. Sử dụng các kết quả

$$x^2 + k^2 \geq \frac{(x + k)^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = \frac{c^2}{2}, \quad y^2 + m^2 \geq \frac{(y + m)^2}{2} = \frac{BC^2}{2} = \frac{a^2}{2}, \quad z^2 + n^2 \geq \frac{(z + n)^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{b^2}{2},$$

Ta thu được $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = k, y = m, z = n$, hay M là giao điểm của các đường trung trực của $\triangle ABC$.

Kết thúc chuyên đề “Cực trị trong hình học”, chúng ta đã cùng tiếp cận một loạt khái niệm và phương pháp nhằm khám phá các bài toán hình học có yếu tố cực trị. Hy vọng rằng tài liệu này đã góp phần giúp bạn đọc củng cố nền tảng kiến thức, kích thích sự sáng tạo, và chuẩn bị những công cụ cần thiết để tiếp tục khám phá sâu hơn lĩnh vực phong phú của hình học phẳng, đặc biệt trong bối cảnh các kì thi chuyên và chọn Học sinh giỏi. Cuối cùng, mong rằng bạn đọc sẽ không ngừng khám phá và chiêm nghiệm vẻ đẹp của hình học phẳng – một vẻ đẹp chỉ thực sự bộc lộ qua nghiên ngẫm, tư duy, sự kiên nhẫn và sự sáng tạo. Bởi lẽ, như Euclid đã từng khẳng định (Proclus, ca. 410-485):

“KHÔNG CÓ CON ĐƯỜNG HOÀNG GIA CHO HÌNH HỌC.”

Tài liệu tham khảo

- Hà, V. (n.d.). *Chuyên đề Cực trị Hình học*. Retrieved from <https://tailieumontoan.com/download-chuyen-de-cuc-tri-hinh-hoc-boi-duong-hoc-sinh-gioi-lop-9-1814/>
- Proclus. (ca. 410-485). *Eis prōton Eukleidou stoicheiōn biblon*. Author.
- Diễn Nguyễn, H. (2001). *Phương pháp giải các bài toán cực trị trong Hình học*. NXB Khoa học và Kỹ thuật.