

Chuyên đề 2: Phương trình nghiệm nguyên chứa ẩn ở mũ

Ban Toán học – Tổ chức The Gifted Battlefield nhiệm kỳ 2025-2026

Xuất bản vào Ngày 18 tháng 1 năm 2026

Tóm tắt nội dung

Số học, khác với đại số và hình học, là một mảng thú vị và đầy thách thức của Toán học; nó vừa cổ điển (có từ thuở sơ khai của lịch sử loài người), vừa hiện đại (được nghiên cứu rộng rãi ngày nay). Trong phạm vi Toán Olympic, đặc biệt là trong các kì thi tuyển sinh ở các trường chuyên, điều thú vị ấy được thể hiện qua các bài toán phương trình nghiệm nguyên. Giải phương trình nghiệm nguyên đòi hỏi sử dụng các phương pháp giải quyết đa dạng, sự sáng tạo trong phương pháp giải, từ đó dẫn đến những khám phá mới mẻ.

Chuyên đề này trình bày và tiếp cận một số phương pháp tiêu biểu để tìm nghiệm nguyên cho các phương trình có chứa ẩn ở mũ. Các phương pháp như xét tính chia hết, đồng dư sẽ được nhắc đến, đi kèm với việc sử dụng đánh giá bất đẳng thức và các định lí kinh điển trong Số học. Cầm trên tay bài viết chuyên đề này, bạn đọc hãy nghiền ngẫm lí thuyết và nghiên cứu các phương pháp một cách tuần tự, và hãy tự giải một số bài toán được viết trong đây. Chuyên đề cũng có thêm một số bài tập giúp bạn đọc tự nghiên cứu.

Mục lục

1	Lí thuyết và các phương pháp giải	2
1.1	Phương pháp 1: Xét tính chia hết, đồng dư	2
	Sử dụng đồng dư để chứng minh phương trình vô nghiệm	2
	Sử dụng đồng dư để giới hạn tính chất của mũ	3
1.2	Phương pháp 2: Sử dụng đánh giá bất đẳng thức	6
1.3	Phương pháp 3: Sử dụng định lí Fermat nhỏ	7
2	Bài tập	8
2.1	Bài tập có hướng dẫn giải	8
2.2	Bài tập tự luyện	8
3	Hướng dẫn giải bài tập	9
4	Lời kết	10
	Tài liệu tham khảo	10

1 Lí thuyết và các phương pháp giải

Để có góc nhìn đầy đủ hơn về chủ đề, ta giới thiệu lại một số khái niệm cơ bản trong lí thuyết chia hết.

Định nghĩa 1.1

Cho hai số nguyên a và b , trong đó $b \neq 0$. Ta nói a chia hết cho b , hoặc b chia hết a , hoặc a là bội của b , hoặc b là ước của a , nếu tồn tại số nguyên c sao cho $a = bc$. Ta kí hiệu mối quan hệ này là $b \mid a$. Ngược lại, nếu b không là ước của a , ta kí hiệu $b \nmid a$.

Đầy đủ hơn, ta còn xét phần dư. Việc chia lấy phần dư được lấy theo tên của Euclid – một nhà Toán học lỗi lạc thời Hi Lạp cổ đại.

Định lí 1.1

Cho các số nguyên a, b với $b \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất các số nguyên q, r sao cho $a = bq + r$, với $0 \leq r < |b|$.

Sự tồn tại duy nhất cần được chứng minh; tuy nhiên vì giới hạn của chuyên đề này, phần chứng minh của định lí trên mời bạn đọc tham khảo tại Andreescu and Andrica (2009). Từ phép chia trên, quan hệ giữa các số dư xuất hiện một cách tự nhiên, và chính quan hệ ấy cho ta khái niệm về sự đồng dư.

Định nghĩa 1.2

Cho số nguyên dương m và các số nguyên a, b . Ta nói rằng a đồng dư b modulo m nếu $m \mid (a - b)$. Kí hiệu cho mối quan hệ này là $a \equiv b \pmod{m}$. Ngược lại, $m \nmid (a - b)$ khi và chỉ khi $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Nếu không nói gì thêm, kí hiệu VT là vế trái, và VP là vế phải của biểu thức. Ngoài ra, kí hiệu $\gcd(a, b)$ là số nguyên dương lớn nhất chia hết cho cả a và b . Ta cùng đến với các phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên chứa ẩn ở mũ.

1.1 Phương pháp 1: Xét tính chia hết, đồng dư

Cần lưu ý rằng không có một phương pháp tổng quát xét đồng dư đơn thuần nhằm giải phương trình nghiệm nguyên. Tuy nhiên, việc khai thác tính chẵn lẻ, tính đồng dư modulo một vài số đặc biệt (có thể là lũy thừa của một số nguyên tố), và sử dụng các tính chất của số chính phương tỏ ra hữu dụng.

■ Sử dụng đồng dư để chứng minh phương trình vô nghiệm

Về bản chất, đây là một phương pháp tận dụng những tính chất của đồng dư để chỉ ra sự mâu thuẫn giữa hai vế của phương trình nghiệm nguyên nhằm đưa ra kết luận cho bài toán. Sau đây là các ví dụ để các bạn có thể hình dung rõ hơn về phương pháp này.

Ví dụ 1.1

Hỏi có tồn tại hay không một cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $2^x - 3^y = 21$?

 **LỜI GIẢI.** Giả sử phương trình có cặp nghiệm nguyên (x, y) . Biến đổi biểu thức ban đầu, ta có được $2^x = 21 - 3^y$. Khi đó $2^x = 21 - 3^y \equiv 0 \pmod{3}$. Suy ra $2^x \equiv 0 \pmod{3}$. Ta có điều mâu thuẫn vì $2^x \equiv 1$ hoặc $2 \pmod{3}$. Vậy phương trình này vô nghiệm. ■

Nhận xét

Trên đây là một ví dụ cơ bản để mở đầu về phương pháp này, qua việc khai thác vào tính đồng dư ở modulo 3 và tính chẵn lẻ để suy ra được bài toán vô nghiệm.

Ví dụ 1.2

Tìm tất các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $9^x + 5 = y^2$.

 **LỜI GIẢI.** Giả sử phương trình có cặp nghiệm nguyên (x, y) .

Ta có nhận xét: Một số chính phương thì luôn đồng dư với 0, 1 theo modulo 4.

Từ đây, ta có được $y^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$. Xét các trường hợp sau:

- Nếu $y^2 \equiv 0 \pmod{4}$ thì kết hợp với phương trình ban đầu, ta có được $9^x + 5 \equiv 0 \pmod{4}$. Mà $9^x + 5 \equiv 1^x + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, điều này mâu thuẫn.
- Nếu $y^2 \equiv 1 \pmod{4}$ thì kết hợp với phương trình ban đầu ta có được: $9^x + 5 \equiv 1 \pmod{4}$. Mà $9^x + 5 \equiv 1^x + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, điều này mâu thuẫn

Các mâu thuẫn trên dẫn đến phương trình này vô nghiệm. ■

Ví dụ 1.3

Giải phương trình nghiệm nguyên dương 2 ẩn m, n : $2022^{4n} + 2023^{4n} + 2024^{4n} + 2025^{4n} = m^2$ (Lấy ý tưởng từ đề thi TS 10 - ĐHSPT TPHCM 2015-2016)

 **LỜI GIẢI.** Ta nhận thấy rằng $x^2 \equiv 1, 9 \pmod{16}$ khi x lẻ và $x^2 \equiv 0, 4 \pmod{16}$ khi x chẵn. Khi đó $x^4 \equiv 0 \pmod{16}$ với mọi x là số chẵn và $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$ với mọi x lẻ.

Theo tính chất trên, ta có được $2024^{4n} \equiv 2022^{4n} \equiv 0 \pmod{16}$ và $2025^{4n} \equiv 2023^{4n} \equiv 1 \pmod{16}$. Từ đó

$$2022^{4n} + 2023^{4n} + 2024^{4n} + 2025^{4n} \equiv 0 + 0 + 1 + 1 \equiv 2 \pmod{16}.$$

Mặt khác, $m^2 \equiv 0, 1, 4, 9 \pmod{16}$. Ta có điều mâu thuẫn. Vì vậy phương trình vô nghiệm. ■

Nhận xét

Ví dụ trên là một bài toán không khó nhưng đòi hỏi sự nhạy bén trong việc nhận xét bài toán và sự khéo léo để chọn được modulo 16. Các modulo lũy thừa của 2 nhỏ hơn như 2, 4, 8 vẫn chưa đủ mạnh để giải quyết bài toán; việc chọn các modulo lũy thừa một cách khéo léo sẽ giúp ta khai thác bài toán tốt hơn.

■ Sử dụng đồng dư để giới hạn tính chất của mũ

Đây là một phương pháp khá phổ biến để xử lý các bài toán về phương trình nghiệm nguyên có nghiệm ở mũ. Việc giới hạn tính chất của mũ giúp cho ta xử lý các vấn đề của bài toán. Sau đây là một số ví dụ cơ bản để giúp các bạn đọc hiểu về phương pháp giải này.

Ví dụ 1.4

(Phạm, 2014) Giải phương trình nghiệm nguyên dương $3^x - 1 = 2^y$.

 **LỜI GIẢI.** Giả sử phương trình có cặp nghiệm nguyên (x, y) . Nếu $y = 1$ thì dễ thấy rằng $x = 1$. Do đó xét $y \geq 2$, khi đó $2^y \equiv 0 \pmod{4}$. Từ đây ta thấy rằng $3^x \equiv 1 \pmod{4}$.

Giả sử x là số lẻ. Đặt $x = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$1 \equiv 3^x = 3^{2k+1} = 9^k \cdot 3 \equiv 1^k \cdot (-1) \equiv -1 \pmod{4}.$$

Điều này mâu thuẫn. Do đó x là số chẵn. Đặt $x = 2k$, với $k \in \mathbb{N}^*$. Thay vào phương trình ban đầu, ta được

$$3^{2k} - 1 = 2^y \iff (3^k - 1)(3^k + 1) = 2^y.$$

Ta thấy rằng $3^k - 1$ và $3^k + 1$ đều là số chẵn. Từ biểu thức trên, tồn tại hai số nguyên dương a và b , sao cho $3^k - 1 = 2^a$, $3^k + 1 = 2^b$, đồng thời $0 < a < b$ và $a + b = y$. Khi đó đó

$$2^b - 2^a = (3^k + 1) - (3^k - 1) \iff 2^a(2^{b-a} - 1) = 2.$$

Vì $a \neq 0$ nên $2^a = 2$ và $2^{b-a} - 1 = 1$. Suy ra $a = 1$ và $b = 2$. Vậy $y = a + b = 3$, dẫn đến $3^x = 2^3 + 1 = 9$, hay $x = 2$. Thử lại các nghiệm trên vào phương trình ban đầu ta thấy đều thỏa.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương $(x, y) = (1, 1), (2, 3)$. ■

Nhận xét

Đây là một trong những bài toán kinh điển của việc sử dụng đồng dư để phân tích và giới hạn tính chất của ẩn trong các bài toán phương trình nghiệm nguyên. Sử dụng đồng dư, ta có thể giới hạn tính chất của x , từ đó làm cơ sở để thực hiện các bước biến đổi sau. Ngoài ra việc nhận ra tính chẵn lẻ của 2 đại lượng $(3^k - 1), (3^k + 1)$ sau đó đặt ẩn để biến đổi là một bước vô cùng quan trọng để có thể hoàn thành bài toán.

Ví dụ 1.5

(Phạm, 2014) Giải phương trình nghiệm nguyên dương $3^x + 4^y = 5^z$

 **LỜI GIẢI.** Ta có $3^x + 4^y \equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$. Từ đây kết hợp với giả thiết đề bài, ta có

$$5^z \equiv 3^x + 4^y \equiv 1 \pmod{3}.$$

Tương tự như ở Ví dụ 1.4, ta thu được z là số chẵn. Đặt $z = 2k$ với $k \in \mathbb{N}^*$; phương trình ban đầu trở thành

$$5^{2k} = 3^x + (2^y)^2 \iff (5^k - 2^y)(5^k + 2^y) = 3^x.$$

Ta thấy rằng $(5^k - 2^y) - (5^k + 2^y) = -2^{y+1}$ mà -2^{y+1} không chia hết cho 3 và $(5^k - 2^y) < (5^k + 2^y)$ đồng thời kết hợp với $(5^k - 2^y)(5^k + 2^y) = 3^x$ ta được $5^k - 2^y = 1$ và $5^k + 2^y = 3^x$.

Suy ra $5^k = 1 + 2^y = 3^x - 2^y$. Từ đây dẫn tới $3^x - 2^{y+1} = 1$. Ta nhận thấy rằng bài toán này tương tự với ví dụ 1.4 nên với cách giải tương tự ta thu được $x = 2, y = 2$. Thế vào phương trình ban đầu, ta có: $5^z = 3^2 + 4^2 = 25$ từ đây có được $z = 2$.

Thử lại các nghiệm này vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa.

Vậy nghiệm của phương trình này là $(x, y, z) = (2, 2, 2)$. ■

Ví dụ 1.6

Giải phương trình nghiệm tự nhiên: $3^a + 5^b = c^2$.

 **LỜI GIẢI.** Ta có $3^a + 5^b \equiv (-1)^a + 1^b \equiv (-1)^a + 1 \pmod{4}$. Suy ra $c^2 \equiv (-1)^a + 1$.

Nếu a là số chẵn thì $c^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$. Điều này là vô lý vì một số chính phương không đồng dư 2 theo modulo 4. Do đó, a là số lẻ. Đặt $a = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$.

Mặt khác, $c^2 \equiv 3^a + 5^b \equiv 0 + 2^b \pmod{3}$. Nếu b lẻ thì b sẽ có dạng $2h + 1$. Từ đó ta suy ra được $c^2 \equiv 2^{2h+1} \equiv 4^h + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$. Điều này vô lý, vì một số chính phương không đồng dư 2 theo modulo 3. Do đó b chẵn; đặt $b = 2h$ với $h \in \mathbb{N}$.

Thay $a = 2k + 1$ và $b = 2h$ vào phương trình ban đầu, ta thu được

$$3^{2k+1} + 5^{2h} = c^2 \iff 3^{2k+1} = (c - 5^h)(c + 5^h).$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $k = 0$. Do $k = 0$ nên $3 = (c - 5^h)(c + 5^h)$ mà $c - 5^h < c + 5^h$ nên

$$c - 5^h = 1 \quad \text{và} \quad c + 5^h = 3.$$

Trừ vế theo vế cho ta $2 \cdot 5^h = 2$, hay $5^h = 1$, dẫn đến $h = 0$. Từ đó $c = 2$; thay vào phương trình ban đầu ta có được $a = 1$ và $b = 0$.

- Trường hợp 2: $k \geq 1$. Dựa vào $3^{2k+1} = (c - 5^h)(c + 5^h)$, ta có các trường hợp:

- Trường hợp 2.1: c, h, k là các số tự nhiên thỏa mãn

$$c - 5^h = 1 \quad \text{và} \quad c + 5^h = 3^{2k+1}.$$

Trừ vế theo vế cho ta $2 \cdot 5^h = 3^{2k} \cdot 3 - 1$. Để ý rằng $3^{2k} \cdot 3 - 1 \equiv (-1)^k \cdot 3 - 1 \pmod{5}$. Nếu k chẵn thì $3^{2k+1} - 1 \equiv 2 \pmod{5}$. Nếu k lẻ thì $3^{2k+1} - 1 \equiv -4 \pmod{5}$.

Ta thấy rằng với mọi k thì $3^{2k+1} - 1$ đều không chia hết cho 5. Rõ ràng $h \neq 0$, do đó $2 \cdot 5^h$ luôn chia hết cho 5, mâu thuẫn.

- Trường hợp 2.2: c, h, k là các số tự nhiên thỏa mãn hệ phương trình

$$c - 5^h = 3^x \quad \text{và} \quad c + 5^h = 3^y,$$

với $x, y \in \mathbb{N}^*$ sao cho $y > x$ và $x + y = 2k + 1$. Trừ vế theo vế cho ta $2 \cdot 5^h = 3^y - 3^x$. Ta nhận thấy rằng vế phải của biểu thức chia hết cho 3 và vế trái của biểu thức không chia hết cho 3 do $\gcd(2, 3) = \gcd(3, 5) = 1$. Từ đây ta thấy được sự mâu thuẫn nên trường hợp này không tồn tại.

Thử lại nghiệm trên vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa.

Vậy nghiệm của phương trình trên là $(a, b, c) = (1, 0, 2)$. ■

Nhận xét

Mấu chốt của bài toán nằm ở việc sử dụng đúng modulo và cẩn thận trong việc xử lý lúc phân chia trường hợp. Ngoài ra, việc nhận biết các tính chất cơ bản của đồng dư như tính chất của đồng dư ở số chính phương.

1.2 Phương pháp 2: Sử dụng đánh giá bất đẳng thức

Phương pháp kẹp và đánh giá là cách ta dùng để ép giá trị của một biểu thức chứa lũy thừa về một khoảng rất hẹp, sao cho chỉ còn vài giá trị nguyên có thể xảy ra từ đó kiểm tra trực tiếp để tìm nghiệm của bài hoặc chứng minh vô nghiệm.

Ví dụ 1.7

Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $4^x = x^3 + 3$

 **LỜI GIẢI.** Nếu $x < 0$ thì $4^x \in (0, 1)$, hay vế trái không là số nguyên; trong khi vế phải là số nguyên. Điều này cho ta mâu thuẫn. Vậy $x \geq 0$.

Lần lượt thử $x = 0, 1, 2$, ta nhận thấy chỉ có $x = 1$ thỏa mãn đề bài. Ta sẽ chứng minh rằng $4^x > x^3 + 3$, với mọi $x \geq 2$ (*). Dễ thấy $4^2 > 2^3 + 3$. Giả sử mệnh đề đúng với số nguyên dương $k \geq 2$. Khi đó

$$4^{k+1} = 4 \cdot 4^k > 4 \cdot (k^3 + 3) = 4k^3 + 12.$$

Chú ý rằng $4k^3 + 12 - ((k+1)^3 + 3) = 4k^3 + 12 - (k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3) = 3k \cdot (k^2 - k - 1) + 8$.

Dễ thấy $k^2 - k - 1 > 0$, với mọi $k \geq 2$. Thành thử, $4k^3 + 12 > (k+1)^3 + 3$. Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề (*) đúng với mọi $x \geq 2$. Vì vậy, phương trình này chỉ có nghiệm duy nhất là $x = 1$. ■

Ví dụ 1.8

Giải phương trình nghiệm nguyên dương $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7 = m^2$.

 **LỜI GIẢI.** Ta có

$$n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7 = (n^2 + n)^2 + n^2 + n + 7 > (n^2 + n)^2$$

do $n^2 + n + 7 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$. Ta cũng có

$$n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7 = (n^2 + n + 2)^2 - 3n^2 - 3n + 3 < (n^2 + n + 2)^2$$

do $-3n^2 - 3n + 3 = -3 \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \right] < 0$ bởi $n \geq 1$. Khi đó

$$(n^2 + n)^2 < n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7 < (n^2 + n + 2)^2.$$

Mà $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7 = m^2$ là số chính phương nên $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7 = (n^2 + n + 1)^2$, tương đương $n^2 + n - 6 = 0$. Giải phương trình bậc hai, kết hợp $n \in \mathbb{Z}^+$ ta được $n = 2$. Suy ra $m = 7$.

Thử lại, ta được $(m, n) = (7, 2)$ là cặp nghiệm nguyên dương duy nhất thỏa mãn phương trình. ■

Nhận xét

Ở ví dụ trên, ta đã sử dụng tính chất sau: Với a và b là các số nguyên dương, nếu đa thức $f(n)$ là một số chính phương thỏa mãn

$$(n - a)^2 < f(n) < (n + b)^2$$

thì $f(n) = (n + i)^2$, trong đó $i \in \{-a + 1, -a + 2, \dots, b - 2, b - 1\}$. Tương tự, ta cũng thấy rằng giữa hai số chính phương liên tiếp, không tồn tại một số chính phương nào.

1.3 Phương pháp 3: Sử dụng định lý Fermat nhỏ

Định lý Fermat nhỏ là một kết quả quan trọng trong lý thuyết số, giúp xác định tính nguyên tố của một số và được ứng dụng rộng rãi trong tin học, đặc biệt là trong bảo mật trực tuyến như thuật toán RSA. Pierre de Fermat phát hiện ra định lý này vào năm 1679 nhưng không chứng minh, sau đó Leonhard Euler đã chứng minh vào năm 1736. Trong phần này, ta sẽ giới thiệu định lý, chứng minh định lý và nêu một số ứng dụng của nó.

Định lý 1.2 (Fermat nhỏ)

Cho số nguyên tố p và số nguyên a không chia hết cho p . Khi đó

$$p \mid a^{p-1} - 1 \quad \text{hay} \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Chứng minh. Xét tập hợp $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$, trong đó p là số nguyên tố, và tập hợp

$$\mathcal{T} = \{1a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a\}.$$

Giả sử tồn tại $m, n \in \mathcal{S}$ sao cho $ma \equiv na \pmod{p}$. Vì a không chia hết cho p nên $\gcd(a, p) = 1$. Khi đó, phương trình đồng dư tương đương $m \equiv n \pmod{p}$, suy ra $m = n$ do $1 \leq m, n \leq p-1$. Do đó, các phần tử thuộc tập $\mathcal{T}$, sau khi xét phần dư modulo p , là một hoán vị của các phần tử thuộc tập $\mathcal{S}$. Từ đó

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \equiv 1a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \pmod{p}.$$

Nhận thấy rằng p là số nguyên tố và các số $1, 2, \dots, p-1$ đều không chia hết cho p . Do đó phương trình đồng dư trên tương đương $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Đây chính là định lý Fermat nhỏ. (Gauss, 1801) ■

Ta thường dùng định lý này để giảm bớt các trường hợp cần xét khi xét số dư, hoặc để tìm ra tính chất đặc biệt của các bài toán. (Ngô, 2019; Van, 2016)

Ví dụ 1.9

Chứng minh rằng phương trình $n^6 + 5 = 7k$ không có nghiệm nguyên n với mọi số nguyên k .

 **LỜI GIẢI.** Nếu $n \equiv 0 \pmod{7}$ thì $n^6 + 5 \equiv 5 \pmod{7}$, suy ra $7k \equiv 5 \pmod{7}$ (vô lí). Mặt khác, nếu $n \not\equiv 0 \pmod{7}$ thì theo định lý Fermat nhỏ, ta có:

$$n^{7-1} \equiv 1 \pmod{7} \iff n^6 + 5 \equiv 6 \pmod{7} \iff 7k \equiv 6 \pmod{7}$$

Ta có điều vô lí. Thành thử, phương trình đã cho không có nghiệm nguyên n với mọi số nguyên k . ■

Nhận xét

Nhìn chung, đây là một bài toán với ý tưởng xét đồng dư khá cơ bản. Nhưng với việc áp dụng định lý nhỏ Fermat, ta đã rút ngắn được số trường hợp cần xét và giải bài toán một cách ngắn gọn hơn.

Ví dụ 1.10

Giải phương trình nghiệm nguyên dương $21^r + 10^q = 11^p$ với p là số nguyên tố.

 **LỜI GIẢI.** Ta có $11^p \equiv 21^r + 10^q \equiv 0 + 1^q \equiv 1 \pmod{3}$. Mà $11^p \equiv (-1)^p \pmod{3}$. Từ đây suy ra $(-1)^p \equiv 1 \pmod{3}$. Suy ra p phải là số chẵn mà p là số nguyên tố nên $p = 2$. Với $p = 2$, ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $r = 1$. Thế vào phương trình ban đầu, ta có được: $10^q = 100$ từ đây ta giải được $q = 2$.
- Trường hợp 2: $r = 2$. Thế vào phương trình ban đầu, ta có được: $21^2 + 10^q = 11^2$ suy ra $10^q = -320$, loại vì 10^x là số nguyên dương. Vậy trường hợp này không xảy ra.
- Trường hợp 3: $r > 2$. Khi $r > 2$ thì ta thấy rằng VT của biểu thức luôn lớn hơn 21^2 hay lớn hơn VP là 11^2 . Vậy trường hợp này không tồn tại.

Vậy phương trình có nghiệm (p, q, r) là $(2, 2, 1)$. ■

2 Bài tập

Sau đây là một số bài tập vận dụng với hướng dẫn giải để các bạn đọc có thể nắm thêm và hiểu rõ hơn về các phương pháp giải, đồng thời là các bài tập tự luyện để luyện tập thêm về dạng bài này.

2.1 Bài tập có hướng dẫn giải

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm tự nhiên $3^x = 10x - 3$.

Bài toán 2. Chứng minh rằng phương trình $x^{10} + y^{10} = 2023$ không có nghiệm nguyên x, y .

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $x! + 2^y = 3^z$.

Bài toán 4. (Tešić, 2024) Tìm tất cả bộ 3 số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $2020^x + 2^y = 2024^z$.

2.2 Bài tập tự luyện

Bài toán 1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa $2^x + 3^y = 13$.

Bài toán 2. Tìm tất cả số nguyên x thỏa $3^x = x^2 + 5$.

Bài toán 3. Tìm nghiệm nguyên dương x, y của phương trình $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 5 = y^2$.

Bài toán 4. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q và số nguyên dương n thỏa mãn $(p + q)^2 + 3p + q = n^2$.

Bài toán 5. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2^x \equiv 3^y \pmod{5}$.

Bài toán 6. Tìm tất cả nghiệm nguyên x của phương trình $7^x + 3^x = 10^y$.

Bài toán 7. Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho $3^n \equiv 7 \pmod{13}$.

Bài toán 8. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho $2^x \equiv 5^y \pmod{7}$.

Bài toán 9. Chứng minh rằng phương trình $x^{12} + 3 = 13y$ không có nghiệm nguyên x với mọi y nguyên.

3 Hướng dẫn giải bài tập

Bài 1. Dễ nhận thấy rằng $x = 3$ là giá trị đúng. Ta xét các giá trị $x = 0, 1, 2, 4$ đều không thỏa giả thiết đề bài. Xét $x > 4$. Đến đây, dễ dàng chứng minh $3^x > 10x - 3$ với mọi $x > 4$, dẫn đến $S = 3$.

Bài 2. Ta xét đồng dư theo modulo 11. Với số nguyên n bất kì, nếu $n \not\equiv 0 \pmod{11}$ thì theo định lý Fermat nhỏ,

$$n^{11-1} \equiv n^{10} \equiv 1 \pmod{11}.$$

Do đó $x^{10} + y^{10} \equiv 0, 1, 2 \pmod{11}$. Mà $2023 \equiv 10 \pmod{11}$ nên phương trình đã cho vô nghiệm nguyên. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $x = 1$. Phương trình ban đầu trở thành: $3^z - 2^y = 1$. Đây là bài toán ví dụ 1.4 nên ta sử dụng kết quả bài toán đó để có được $(y, z) = (1, 1)$ và $(y, z) = (3, 2)$.
- Trường hợp 2: $x = 2$. Phương trình trở thành: $2 + 2^y = 3^z$. Ta để ý tính chẵn/lẻ của 2 vế và nhận thấy rằng VT của biểu thức luôn chẵn và VP của biểu thức luôn lẻ nên trường hợp này không xảy ra.
- Trường hợp 3: $x \geq 3$. Biến đổi biểu thức đề bài trở thành: $2^y = 3^z - x!$. Do $x \geq 3$ nên $x!$ lúc này sẽ chia hết cho 3. Từ đó ta thấy rằng VP của biểu thức trên luôn chia hết cho 3 nhưng $VT = 2^y \equiv (-1)^y$ luôn không chia hết cho 3 với mọi y . Nên trường hợp này không xảy ra.

Vậy nghiệm của phương trình trên là: $(x, y, z) = (1, 1, 1); (1, 3, 2)$.

Bài 4. Xét phương trình theo modulo 3, ta được $1 + 2^y \equiv 2^z$. Nếu $y \equiv 1 \pmod{2}$ thì $1 + 2^y \equiv 0 \pmod{2}$, vô lí. Do đó $y \equiv 0 \pmod{2}$ và $z \equiv 1 \pmod{2}$. Đặt $y = 2k$. Phương trình trở thành

$$2020^x + 4^k = 2024^z \iff 2^{2x} \cdot 505^x + 2^{2k} = 2^{3z} \cdot 253^z. \quad (3.1)$$

Giả sử $x \neq k$. Khi đó $2^{\min\{2x; 2k\}} \mid VT(3.1)$; nhưng ta nhận thấy rằng $2^{\min\{2x; 2k\}+1} \nmid VT(3.1)$. Nói cách khác, nếu ta đặt $VT(3.1) = 2^{\min\{2x; 2k\}} \cdot A$ thì A là số lẻ. Từ đó

$$\begin{cases} 2^{\min\{2x; 2k\}} = 2^{3z} \\ A = 253^z \end{cases} \implies \min\{2x; 2k\} = 3z.$$

Suy ra $2 \mid z$, vô lí do $z \equiv 1 \pmod{2}$. Vì vậy $x = k$. Phương trình trở thành

$$2020^x + 4^x = 2024^z \iff 2^{2x} \cdot (505^x + 1) = 2^{3z} \cdot 253^z. \quad (3.2)$$

Ta thấy rằng $2 \mid 505^x + 1$ nhưng $4 \nmid 505^x + 1$. Do đó, $VT(3.2) = 2^{2x+1} \cdot \frac{505^x+1}{2}$, với $\frac{505^x+1}{2}$ là số lẻ. Từ đó

$$\begin{cases} 2^{2x+1} = 2^{3z} \\ 505^x + 1 = 2 \cdot 253^z \end{cases} \implies 2x + 1 = 3z.$$

Suy ra $x \equiv 1 \pmod{3}$. Đặt $x = 3t + 1$. Khi đó $z = 2t + 1$. Thay vào phương trình $505^x + 1 = 2 \cdot 253^z$:

$$505^{3t+1} + 1 = 2 \cdot 253^{2t+1}. \quad (3.3)$$

Xét $t \geq 1$. Khi đó

$$VT(3.3) = 505^{3t+1} + 1 > 505^{3t+1} = (505^3)^t \cdot 505 > (506^2)^t \cdot 253 > 253^{2t+1} \cdot 2 = VP(3.3).$$

Do đó với mọi $t \geq 1$ thì phương trình vô nghiệm. Với $t = 0$, ta thu được $x = z = 1$ và $y = 2x = 2$. Thử lại với các nghiệm trên, phương trình thỏa mãn. Vậy $(x, y, z) = (1, 2, 1)$.

4 Lời kết

Qua chuyên đề, ta đã cùng tìm hiểu các phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên với ẩn ở mũ. Đó là sự kết hợp của những ý tưởng đơn sơ và cấu trúc Số học hết sức tinh vi. Hãy không ngừng khám phá vẻ đẹp tinh tế của các phương trình nghiệm nguyên và Số học nói chung, như Kronecker đã từng nói:

“CHÚA TẠO RA SỐ NGUYÊN, TẤT CẢ NHỮNG VIỆC CÒN LẠI LÀ CỦA CON NGƯỜI.”

Tài liệu tham khảo

Andreescu, T., & Andrica, D. (2009). *Number Theory – Structures, Examples and Problems*. Springer.

Gauss, C. F. (1801). *Disquisitiones Arithmeticae*. Gauss.

Ngô, H. D. (2019). *Định lý Fermat nhỏ và một số bài toán ứng dụng*. Retrieved from <http://chuyen-vonguyengiaph.edu.vn/tin-tuc-thong-bao/to-chuyen-mon/toan/dinh-ly-fermat-nho-va-mot-so-bai-toan-ung-dung.html>

Phạm, Q. T. (2014). *Phương trình nghiệm nguyên chứa ẩn ở số mũ*. Retrieved from <https://phamquangtoan.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/02/ptnn-somu.pdf>

Tešić, O. (2024). *JBMO 2024 Official Problems*. Retrieved from https://jbmo2024.tubitak.gov.tr/assets/files/JBMO_2024_Official_Version.pdf

Van, D. C. (2016, tháng 9 ngày 4). *100 bài tập sử dụng định lý Fermat nhỏ và định lý Euler có lời giải*. Retrieved from <https://vanducchin.wordpress.com/2016/09/04/bai-tap-ung-dung-cua-dinh-ly-euler-va-dinh-ly-fermat/>