

Chuyên đề 3: Ước số nguyên và ứng dụng

Ban Toán học – Tổ chức The Gifted Battlefield nhiệm kỳ 2025-2026

Xuất bản vào Ngày 28 tháng 1 năm 2026

Tóm tắt nội dung

Chuyên đề **Ước số nguyên và ứng dụng** tập trung giải quyết các dạng toán về ước số nguyên thuộc phân môn *Số học*. Không chỉ là chìa khóa quan trọng để giải quyết các bài toán số học thuần túy, việc nắm vững lý thuyết và ứng dụng của ước số nguyên còn có thể được ứng dụng vào các bài toán tổ hợp. Các bài toán về ước số nguyên đã luôn là một phần kinh điển không thể thiếu trong các bài thi chuyên, HSG và Olympic.

Với mục tiêu tổng hợp kiến thức số học căn bản và nâng cao cần có để giải quyết các bài toán chuyên, tài liệu phù hợp với các bạn học sinh có niềm đam mê với toán học và muốn nắm vững căn bản, bắt đầu với những thử thách số học thuần túy nâng cao.

Chuyên đề này sẽ trình bày nội dung trọng tâm: phép chia hết và hợp số, số nguyên tố. Để sử dụng tài liệu chuyên đề hiệu quả nhất, chúng mình đề xuất bạn đọc sử dụng theo trình tự chuyên đề, tham khảo các cách viết lời giải cho các bài toán số học và dành nhiều thời gian vào việc luyện tập các bài tập tự luyện.

Mục lục

1	Phép chia hết	2
1.1	Lý thuyết	2
1.2	Các ví dụ	3
2	Hợp số và số nguyên tố	4
2.1	Lý thuyết	4
2.2	Các ví dụ	4
3	Bài tập	5
3.1	Bài tập vận dụng có lời giải	5
3.2	Bài tập tự luyện	6
4	Hướng dẫn giải bài tập	6
5	Lời kết	9
	Tài liệu tham khảo	9

1 Phép chia hết

1.1 Lý thuyết

Định nghĩa 1.1

Số nguyên a chia hết cho số nguyên $b \neq 0$ nếu tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $a = bk$. Kí hiệu $b \mid a$, đọc là “ b chia hết a ” (b divides a) hoặc ký hiệu $a : b$, đọc là “ a chia hết cho b ” (a is divisible by b).

Sau đây là một số tính chất cơ bản; xét các số nguyên a, b, c, d , giả sử các phép chia đều có nghĩa.

- $a : a$ (Tính chất phản xạ)
- $a : b$ và $b : c$ thì $a : c$ (Tính chất bắc cầu)
- $a : b$ thì $ma : b$ với mọi số nguyên m
- $a : c$ và $b : c$ thì $ma + nb : c$ với mọi số nguyên m, n
- $b : c$ và $ma + b : c$ thì $a : c$ với mọi m nguyên tố cùng nhau với c (sẽ được giải thích ở phần sau)
- $a : b$ và $c : d$ thì $ac : bd$
- $ac : bc$ thì $a : b$
- $a : b$ thì $|a| \geq |b|$ nếu $a \neq 0$
- $a : b$ và $b : a$ thì $|a| = |b|$
- $a : b$ thì $a^n : b^n$

Định nghĩa 1.2

Cho hai số nguyên không âm a và số nguyên dương b . Nếu $b \mid a$ thì ta gọi b là ước của a và a là bội của b .

Định nghĩa 1.3

Ước chung lớn nhất (GCD) của a, b (không đồng thời bằng 0) là số dương lớn nhất chia hết cho cả a và b . Kí hiệu $\gcd(a, b)$ hoặc (a, b) .

- $\gcd(a, b) = \gcd(a, b - a)$.
- Nếu $\gcd(a, b) = d$ thì tồn tại a_1, b_1 sao cho $a = da_1$, $b = db_1$ và $\gcd(a_1, b_1) = 1$.
- $\gcd(ka, kb) = k \cdot \gcd(a, b)$ với $k > 0$.
- (a, b) chia hết cho mọi ước chung của a và b .

Hai số nguyên tố cùng nhau: a, b nguyên tố cùng nhau khi $\gcd(a, b) = 1$.

Định nghĩa 1.4

Bội chung nhỏ nhất (LCM) của $a, b \neq 0$ là số dương nhỏ nhất chia hết cho cả a và b . Kí hiệu $\text{lcm}(a, b)$.

- $\text{lcm}(a, b) = \frac{|ab|}{\gcd(a, b)}$.
- Nếu $\gcd(a, b) = 1$ thì $\text{lcm}(a, b) = |ab|$.

1.2 Các ví dụ

Ví dụ 1.1

Cho $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng $(ab, a + b) = 1$.

 **LỜI GIẢI.** Gọi $d = (ab, a + b)$. Giả sử $d \neq 1$. Khi đó gọi p là một ước nguyên tố của d . Khi đó ta có:

$$\begin{cases} ab : p \\ a + b : p \end{cases} \implies a : p \text{ và } b : p \implies \gcd(a, b) : p \implies 1 : p.$$

Ta có điều mâu thuẫn. Vậy $d = 1$ hay $(ab, a + b) = 1$ ■

Ví dụ 1.2

Cho số nguyên a, b, k , chứng minh rằng $(a, b) = (a, a - kb)$.

 **LỜI GIẢI.** Trước tiên, ta chứng minh $(a, b) \mid (a, a - kb)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{cases} (a, b) \mid a \\ (a, b) \mid b \end{cases} \implies \begin{cases} (a, b) \mid a \\ (a, b) \mid b + a - (k + 1)b \end{cases} \implies \begin{cases} (a, b) \mid a \\ (a, b) \mid a - kb \end{cases}$$

Do đó (a, b) là ước của $(a, a - kb)$ hay $(a, b) \mid (a, a - kb)$. Cũng lập luận tương tự ta được $(a, a - kb) \mid (a, b)$. Suy ra $(a, b) = (a, a - kb)$. ■

Nhận xét

Trong dạng chứng minh này, có một tính chất là (a, b) chia hết cho mọi ước chung của a và b , vì vậy dẫn đến hướng tiếp cận của ta ở đây là chứng minh $(a, b) \mid (a, a - kb)$ và $(a, a - kb) \mid (a, b)$.

Ví dụ 1.3

Cho n là số nguyên dương. Tìm $(n^2 + n + 1, (n + 1)^2)$.

 **LỜI GIẢI.** Dựa vào tính chất ở Ví dụ 1.2 ta được:

$$(n^2 + n + 1, (n + 1)^2) = (n^2 + n + 1, n^2 + 2n + 1 - n^2 - n - 1) = (n^2 + n + 1, n) = (n^2 + n + 1 - n^2 - n, n) = (1, n)$$

Do đó $(n^2 + n + 1, (n + 1)^2)$ là ước của 1 và n , hay $(n^2 + n + 1, (n + 1)^2) = 1$ ■

Ví dụ 1.4

(Huy, 2024) Nếu a và b là các số nguyên tố cùng nhau và n là một số nguyên, hãy chứng minh rằng ước chung lớn nhất của $a^2 + b^2 - nab$ và $a + b$ là ước của $n + 2$.

 **LỜI GIẢI.** Ta có:

$$(a^2 + b^2 - nab, a + b) = (a^2 + b^2 - nab - (a + b)^2, a + b) = (-nab - 2ab, a + b) = (ab(n + 2), a + b)$$

Lại có: $(ab, a + b) = 1$ nên $(ab(n + 2), a + b) = (n + 2, a + b)$.

Suy ra: $(a^2 + b^2 - nab, a + b) = (n + 2, a + b)$.

Vậy ước chung lớn nhất của $a^2 + b^2 - nab$ và $a + b$ là ước của $n + 2$. ■

2 Hợp số và số nguyên tố

2.1 Lý thuyết

Định nghĩa 2.1

Số nguyên $p > 1$ được gọi là số nguyên tố nếu ước số nguyên dương của nó chỉ gồm 1 và chính nó. Nếu số nguyên dương $n > 1$ không là số nguyên tố, hoặc tồn tại các số nguyên dương a và b lớn hơn 1 sao cho $n = ab$, thì n được gọi là hợp số.

Định lý 2.1

Với mọi số nguyên dương n đều có thể phân tích thành các thừa số nguyên tố, có dạng:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$$

Tính chất:

- 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất, mọi số nguyên tố $p > 2$ đều là số lẻ.
- Nếu $p \mid ab$ thì $p \mid a$ hoặc $p \mid b$ với p là số nguyên tố và mọi số nguyên a, b .
- Nếu $p \mid a^n$ thì $p \mid a$ và $p^n \mid a^n$ với p là số nguyên tố và mọi số nguyên a, b .

2.2 Các ví dụ

Ví dụ 2.1

Tìm tất cả số nguyên tố p để $8p^2 + 1$ là số nguyên tố.

 **LỜI GIẢI.** Xét $p = 3 \implies 8 \cdot 3^2 + 1 = 73$ (Thỏa mãn).

Xét $p = 2 \implies 8 \cdot 2^2 + 1 = 33$ (Không thỏa mãn).

Xét $p > 3$, khi đó $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

$$\implies 8p^2 + 1 \equiv 8 \cdot 1 + 1 = 9 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Mà $8p^2 + 1 > 3$, nên $8p^2 + 1$ là hợp số.

Vậy $p = 3$ là giá trị duy nhất cần tìm. ■

Nhận xét

Trong dạng bài này, ta thử những trường hợp đầu thì nhận thấy p chỉ đúng với 3, từ đó ta có thể liên hệ hướng giải rằng ta chứng minh các số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng $3k + 1$, $3k + 2$ không thỏa.

Ví dụ 2.2

Cho a, p, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng:

- Nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố thì n là số nguyên tố (Nguyên tố Mersenne).
- Nếu $a^p - 1$ là số nguyên tố thì $a = 2$ hoặc $p = 1$.

 **LỜI GIẢI.** a) Giả sử n là hợp số, khi đó $n = ab$ với $a, b > 1$.

$$\text{Ta có: } 2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1^b : 2^a - 1.$$

Mà $1 < 2^a - 1 < 2^n - 1$ (do $1 < a < n$), suy ra $2^n - 1$ là hợp số (Mâu thuẫn).

Vậy n phải là số nguyên tố.

b) Giả sử $a > 2$ và $p > 1$. Khi đó, ta có thể phân tích biểu thức như sau:

$$a^p - 1^p = (a - 1)(a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots + a + 1)$$

Vì $a > 2 \Rightarrow a - 1 > 1$.

Đồng thời, vì $a > 2$ và $p > 1$, ta có:

$$a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1 \geq a + 1 > 3 > 1$$

Như vậy, $a^p - 1$ là tích của hai số tự nhiên đều lớn hơn 1.

$$\Rightarrow a^p - 1 \text{ là hợp số.}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $a^p - 1$ là số nguyên tố.

Do đó, giả sử ban đầu là sai. Ta phải có:

$$\begin{cases} a - 1 = 1 \\ a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1 = 1 \end{cases}$$

- Nếu $a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$.
- Nếu $a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1 = 1$. Vì a là số tự nhiên ($a \geq 1$), điều này chỉ xảy ra khi $p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1$.

Vậy nếu $a^p - 1$ là số nguyên tố thì $a = 2$ hoặc $p = 1$. ■

Ví dụ 2.3

(Anh Vinh Lê, 2019) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $a^n + b^n + c^n + d^n$ là một hợp số.

 **LỜI GIẢI.** Giả sử phản chứng, rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho $p = a^m + b^m + c^m + d^m$ là một số nguyên tố. Không mất tính tổng quát, giả sử $c \leq d$. Do $ab = cd$ nên $a^m b^m = (ab)^n = (cd)^n = c^n d^n$. Khi đó

$$\begin{aligned} pa^n &= a^m(a^m + b^m + c^m + d^m) = a^{2m} + a^m b^m + a^m c^m + a^m d^m \\ &= (a^m b^m + a^m d^m) + (a^{2m} + a^m c^m) = (c^m d^m + a^m d^m) + (a^{2m} + a^m c^m) \\ &= d^m(a^m + c^m) + a^m(a^m + c^m) = (a^m + c^m)(a^m + d^m). \end{aligned}$$

Suy ra $(a^m + c^m)(a^m + d^m) : p$, dẫn đến $(a^m + c^m) : p$ hoặc $a^m + d^m : p$. Tuy nhiên

$$0 < a^m + c^m \leq a^m + d^m < a^m + b^m + c^m + d^m = p.$$

Ta có điều mâu thuẫn. Do đó giả sử sai, hay $a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số với mọi số nguyên dương n . ■

3 Bài tập

3.1 Bài tập vận dụng có lời giải

Bài toán 1. (Trường Phổ thông Năng khiếu, 2025) Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn:

$$m^2 + m + n^2 : mn \quad (1)$$

- Chứng minh không tồn tại m, n thỏa mãn (1) khi $n = 3$.
- Tìm m, n thỏa mãn (1) biết m chia hết cho n .
- Ký hiệu d là ước chung lớn nhất của m và n . Chứng minh nếu m, n thỏa mãn (1) thì $m = d^2$.

Bài toán 2. (Trường Phổ thông Năng khiếu, 2021)

- a) Tìm tất cả số nguyên dương n để $(2n+1)^3 + 1$ chia hết cho 2^{2021} .
- b) Cho số tự nhiên n và số nguyên tố p sao cho $a = \frac{2n+2}{p}$ và $b = \frac{4n^2+2n+1}{p}$ đều là các số nguyên. Chứng minh rằng với n và p tìm được thì cả a và b đều không đồng thời là số chính phương.

Bài toán 3. (Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Phước, 2024) Tìm các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $\frac{a^3b-1}{a+1}$ và $\frac{b^3a+1}{b-1}$ đều là các số nguyên.

3.2 Bài tập tự luyện

Bài toán 4. Cho p là số nguyên tố và ba số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x < y < z < p$. Giả sử rằng x^3, y^3, z^3 có cùng số dư khi chia cho p .

- a) Chứng minh rằng $x + y + z \vdots p$.
- b) Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \vdots x + y + z$.

Bài toán 5. Cho m là số nguyên dương thỏa mãn $m+1 \vdots 24$. Chứng minh rằng tổng các ước dương của m cũng chia hết cho 24.

Bài toán 6. Số nguyên dương n được gọi là số "đẹp" nếu tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ để $n = a^2 + 7b^2$.

- a) Tìm hai số đẹp chia hết cho 11.
- b) Chứng minh nếu n là số đẹp chia hết cho 11 thì $\frac{n}{11}$ cũng là số đẹp.

Bài toán 7. Giả sử ta có quy tắc $*$ mà với mỗi cặp số nguyên dương $(a; b)$, ta luôn xác định được chỉ một số nguyên dương tương ứng kí hiệu là $a * b$, sao cho ba điều kiện sau được thỏa mãn:

- i) $a * a = a$ với mọi số nguyên dương a ;
- ii) $a * b = b * a$ với mọi số nguyên dương a và b ;
- iii) $a * b = (a - b) * b$ với mọi số nguyên dương a và b mà $a > b$.
- a) Tính giá trị của $16 * 2024$.
- b) Hãy chỉ ra một quy tắc $*$ thỏa mãn ba điều kiện trên.

4 Hướng dẫn giải bài tập

Bài 1. (Trường Phổ thông Năng khiếu, 2025) Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn:

$$m^2 + m + n^2 \vdots mn \quad (1)$$

- a) Chứng minh không tồn tại m, n thỏa mãn (1) khi $n = 3$.
- b) Tìm m, n thỏa mãn (1) biết m chia hết cho n .
- c) Ký hiệu d là ước chung lớn nhất của m và n . Chứng minh nếu m, n thỏa mãn (1) thì $m = d^2$.

 **LỜI GIẢI.** a) Thế $n = 3$ vào (1), ta có:

$$3m \mid m^2 + m + 9 \implies m \mid m^2 + m + 9$$

Vì $m \mid m^2 + m$, suy ra:

$$m \mid m^2 + m + 9 - (m^2 + m) \implies m \mid 9$$

Vậy $m \in \{1, 3, 9\}$.

- Với $m = 1$: $1^2 + 1 + 3^2 = 11$, không chia hết cho $1 \cdot 3 = 3$.
- Với $m = 3$: $3^2 + 3 + 3^2 = 21$, không chia hết cho $3 \cdot 3 = 9$.
- Với $m = 9$: $9^2 + 9 + 3^2 = 99$, không chia hết cho $9 \cdot 3 = 27$.

Vậy nhận thấy không tồn tại số m, n thỏa mãn (1) khi $n = 3$.

b) Do $n \mid m$ nên tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $m = nk$. Thế vào (1) ta được:

$$n^2k \mid (nk)^2 + nk + n^2 \quad (1)$$

$$\implies nk \mid nk^2 + k + n$$

Vì $nk \mid nk^2$, suy ra $nk \mid k + n$. Do đó $n \mid n + k$ hoặc $k \mid n + k$, dẫn đến $n \mid k$ hoặc $k \mid n$.

Vì $n, k > 0$ nên $n = k$. Thay ngược lại vào (1) với $m = n^2$:

$$n^3 \mid n^4 + 2n^2 \implies n^3 \mid 2n^2$$

$$\implies n \mid 2 \implies n \in \{1, 2\}.$$

Với $n = 1$ ta được $m = 1^2 = 1$. Với $n = 2$ ta được $m = 2^2 = 4$.

Thử lại, ta thu được các cặp nghiệm (m, n) thỏa mãn là: $\{(1, 1); (4, 2)\}$.

c) Đặt $d = \gcd(m, n)$, khi đó tồn tại $m_1, n_1 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m = dm_1$, $n = dn_1$ và $\gcd(m_1, n_1) = 1$. Thay vào điều kiện (1) ta có:

$$d^2m_1n_1 \mid (dm_1)^2 + dm_1 + (dn_1)^2$$

$$\iff d^2m_1n_1 \mid d^2m_1^2 + dm_1 + d^2n_1^2$$

$$\iff dm_1n_1 \mid dm_1^2 + m_1 + dn_1^2 \quad (2)$$

Từ (2), ta có: Vì $m_1 \mid dm_1n_1$, suy ra $m_1 \mid dm_1^2 + m_1 + dn_1^2$. Do $m_1 \mid dm_1^2$ và $m_1 \mid m_1$, bắt buộc $m_1 \mid dn_1^2$. Mà $\gcd(m_1, n_1) = 1$ nên $\gcd(m_1, n_1^2) = 1$, từ đó ta có:

$$m_1 \mid d \quad (*)$$

Mặt khác, từ (2) ta cũng có $d \mid d^2m_1n_1$, suy ra: $d \mid d^2m_1^2 + m_1 + d^2n_1^2$.

Vì $d \mid d^2m_1^2$ và $d \mid d^2n_1^2$, bắt buộc ta phải có:

$$d \mid m_1 \quad (**)$$

Từ (*) và (**), kết hợp với việc m_1, d là các số nguyên dương, ta suy ra:

$$m_1 = d$$

Thay vào công thức đặt ban đầu: $m = dm_1 = d \cdot d = d^2$.

Thử lại bộ $(m, n) = (d^2, da)$, trong đó d và a là các số nguyên dương bất kì, ta thấy thỏa mãn. ■

Nhận xét

Câu a, b tương đối đơn giản. Ở câu a thế $n = 3$ vào đề và vận dụng các tính chất cơ bản của phép chia hết để tìm ra các giá trị m và thử lại. Câu b bằng cách biểu diễn n theo m và tìm mối quan hệ của chúng thì ta cũng dễ dàng làm ra bài toán. Ở câu c ta cần vận dụng thêm tính chất của GCD nữa thì mới làm ra bài toán.

Bài 2. (Trường Phổ thông Năng khiếu, 2025) Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn:

$$m^2 + m + n^2 : mn \quad (1)$$

- a) Chứng minh không tồn tại m, n thỏa mãn (1) khi $n = 3$.
- b) Tìm m, n thỏa mãn (1) biết m chia hết cho n .
- c) Ký hiệu d là ước chung lớn nhất của m và n . Chứng minh nếu m, n thỏa mãn (1) thì $m = d^2$.

LỜI GIẢI. a) Ta nhận xét: $(2n + 1)^3 + 1 = 2(n + 1)(4n^2 + 2n + 1)$ và $4n^2 + 2n + 1$ là số lẻ. Do đó, $(2n + 1)^3 + 1$ chia hết cho 2^{2021} khi và chỉ khi $n + 1$ chia hết cho 2^{2020} .

Suy ra $n + 1 = 2^{2020}k$ với k nguyên dương, tức $n = 2^{2020}k - 1$.

Vậy, tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu đề bài là $n = 2^{2020}k - 1$ với k là số nguyên dương.

b) Giả sử: a và b đều là số chính phương, khi đó tích ab cũng là số chính phương.

Suy ra, tồn tại số nguyên dương x sao cho $(2n + 2)(4n^2 + 2n + 1) = p^2x^2$, hay

$$(2n + 1)^3 + 1 = p^2x^2 \iff (2n + 1)^3 = (px - 1)(px + 1).$$

Rõ ràng $px - 1$ và $px + 1$ là hai số nguyên dương lẻ liên tiếp nên chúng nguyên tố cùng nhau. Mà tích của hai số này lại là một số lập phương nên cả hai số phải đều là số lập phương.

Suy ra, tồn tại hai số nguyên dương y, z sao cho $px - 1 = y^3$ và $px + 1 = z^3$. Từ đây, ta có:

$$2 = z^3 - y^3 = (z - y)(z^2 + zy + y^2).$$

Suy ra $z^2 + zy + y^2$ là ước của 2, mâu thuẫn vì $z^2 + zy + y^2 > 2$.

Vậy hai số a, b không thể đồng thời là số chính phương. ■

Nhận xét

Câu a tương đối đơn giản. Để ý đến hằng đẳng thức và tính chẵn lẻ thì dễ dàng làm ra bài toán. Câu b sử dụng thêm kỹ thuật phản chứng, chia hết và số chính phương để giải bài toán này.

Bài 3. (Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Phước, 2024) Tìm các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $\frac{a^3b - 1}{a + 1}$ và $\frac{b^3a + 1}{b - 1}$ đều là các số nguyên.

LỜI GIẢI. Viết lại điều kiện:

$$\begin{cases} a + 1 \mid a^3b - 1 \\ b - 1 \mid ab^3 + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a + 1 \mid a^3b + b - b - 1 \\ b - 1 \mid ab^3 - a + a + 1 \end{cases}$$

Do

$$\begin{cases} a + 1 \mid a^3 + 1 \\ b - 1 \mid b^3 - 1 \end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} a+1 \mid b+1 \\ b-1 \mid a+1 \end{cases}$$

Nhận xét: Đến đây ta thấy có hai đại lượng giống nhau $\implies$ tính chất bắc cầu.

$$\begin{aligned} &\implies b-1 \mid b+1 \implies b-1 \mid 2 \\ &\implies b-1=1 \text{ hoặc } b-1=2 \implies b=2 \text{ hoặc } b=3 \\ &\implies a+1 \mid 3 \text{ hoặc } a+1 \mid 4 \\ &\implies \begin{cases} a+1=1 \text{ hoặc } a+1=3 \\ b=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a+1=1 \text{ hoặc } a+1=2 \text{ hoặc } a+1=4 \\ b=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Giải phương trình trên, thế lại ta tìm được các cặp (a, b) nguyên dương là $(2; 2); (1; 3)$. ■

Nhận xét

Bài này xuất hiện khá nhiều quan hệ chia hết, chúng ta sẽ phải sử dụng triệt để các phép chia hết này, mục tiêu là để tìm ra được $a \mid m$ hoặc $b \mid m$ với m là một số nguyên cụ thể nào đó.

Có thể thấy mấu chốt của bài toán trên là việc thêm bớt sao cho hạ được mũ 3 rồi rằm ở kia. Nhờ định lý $a-b \mid a^n - b^n$, ta giải quyết từ một điều kiện bậc 4 ta chỉ còn bậc 1.

5 Lời kết

Qua chuyên đề "Ước số nguyên và ứng dụng", ta đã cùng tìm hiểu các tính chất và định lý của ước số nguyên, một khái niệm cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong số học. Việc biết cách quan sát để tìm ra hướng tư duy và ứng dụng được những kết quả này sẽ giúp ta xử lý những bài tập cao cấp hơn. Sau chuyên đề này, chúng mình mong bạn hãy tiếp tục khám phá sự tinh tế trong ước số nguyên nói riêng và vẻ đẹp của số học nói chung, như Carl Friedrich Gauss (von Waltershausen, 1856) từng nói:

“TOÁN HỌC LÀ NỮ HOÀNG CỦA KHOA HỌC; SỐ HỌC LÀ NỮ HOÀNG CỦA TOÁN HỌC.”

Tài liệu tham khảo

Anh Vinh Lê, P. L. L. H. P., Đỗ Kiên Hoàng. (2019). *Định hướng Bồi dưỡng học sinh năng khiếu Toán – Tập 3, Số học*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

Huy, N. N. (2024). *Một số chủ đề số học*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Phước. (2024). *Đề thi chính thức môn Toán (chuyên) Năm 2024*.

Trường Phổ thông Năng khiếu. (2021). *Đề thi chính thức môn Toán (chuyên) Năm 2021*.

Trường Phổ thông Năng khiếu. (2025). *Đề thi chính thức môn Toán (chuyên) Năm 2025*.

von Waltershausen, W. S. (1856). *Gauss zum Gedächtniss*. S. Hirzel.