CHUYÊN ĐỀ

02

Đếm bằng TRUY HỒI

Nhóm Toán
Ban Chuyên môn

I Sơ lược về tìm CTTQ của dãy số

Cấp số cộng

(u_n) là một cấp số cộng $\Leftrightarrow$ Tồn tại số thực d để $u_{n+1} - u_n = d$.
Số thực d được gọi là công sai của cấp số cộng.
Từ đó, nếu $u_1 = a$, ta xác định được:

$$u_n = a + d(n-1)$$

Cấp số nhân

(u_n) là một cấp số nhân $\Leftrightarrow$ Tồn tại số thực q để $u_{n+1} = qu_n$.
Số thực q được gọi là công bội của cấp số nhân.
Từ đó, nếu $u_1 = a$, ta xác định được:

$$u_n = a.q^{n-1}$$

Dãy truy hồi tuyến tính

Bạn đọc có thể tham khảo phương pháp tại bit.ly/tgb_truyhoi (từ trang 1 đến trang 15)

II Thiết lập hệ thức truy hồi trong bài toán đếm

Phần này xin trình bày cho bạn đọc một phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi để giải một số bài toán đếm.
Phương pháp này thường được sử dụng khi việc đếm trực tiếp gặp nhiều khó khăn, nhưng lại trở nên dễ dàng hơn thông qua các đại lượng nhỏ hơn hoặc lớn hơn và qua các mối liên hệ của chúng.

Đối với một số bài toán đơn giản, tư duy truy hồi chủ yếu là
- Gọi (u_n) là số cách xếp n phần tử.
- Quan sát từ số cách xếp $n-1$ phần tử là u_{n-1} cách. Từ 1 trong u_{n-1} cách đó, xét một cách xếp bất kì, ta xếp thêm phần tử thứ n vào và tìm ra quan hệ giữa u_n và u_{n-1}.

Tương tự, đối với những bài toán cần thiết lập nhiều dãy, ta cũng tìm mối quan hệ giữa các dãy với nhau. Từ đó ta tìm được công thức tổng quát của dãy cần đếm.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm số cách để leo n bậc thang sao cho mỗi lượt chỉ được leo 1 hoặc 2 bước.

Ví dụ 2: Cho số nguyên dương n. Đếm số lượng số nguyên dương có n chữ số, được tạo thành từ các chữ số trong $\{1, 2, 3, 4\}$ và chứa 1 số chẵn chữ số 1.

II Thiết lập hệ thức truy hồi trong bài toán đếm

Ví dụ 1

Xét a_n, ta sẽ tìm mối liên hệ với các a_i trước đó:

+) Lượt di chuyển cuối cùng leo 1 bậc thang: Rõ ràng số cách để leo $n-1$ bậc thang trước ở đây là a_{n-1} (do bỏ lượt di chuyển đó đi thì ta còn lại $n-1$ bậc thang đầu tiên).

+) Lượt di chuyển cuối cùng leo 2 bậc thang: Ta thấy rằng số cách thỏa mãn cũng là a_{n-2} (do bỏ lượt di chuyển đó đi thì ta còn lại $n-2$ bậc thang đầu tiên).

⇒ Ta có hệ thức truy hồi sau: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \forall\, n \geq 3$.

Mặt khác ta có $a_1 = 1, a_2 = 2$.

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], \forall\, n \geq 1.$$

Vậy ta có tất cả $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$ cách thỏa mãn đề bài.

II Thiết lập hệ thức truy hồi trong bài toán đếm

Ví dụ 2

Gọi a_n là số lượng số nguyên dương có n chữ số, được tạo thành từ các chữ số trong $\{1, 2, 3, 4\}$ và chứa một số chẵn chữ số 1.

Gọi b_n là số lượng số nguyên dương có n chữ số, được tạo thành từ các chữ số trong $\{1, 2, 3, 4\}$ và chứa một số lẻ chữ số 1.

Ta có: $a_n + b_n = 4^n$ (vì số lượng số nguyên dương có n chữ số, được tạo thành từ các chữ số trong $\{1, 2, 3, 4\}$ là 4^n).

Xét số nguyên dương có n chữ số thỏa đề bài, nếu:

+ Số cuối là $2, 3, 4$: rõ ràng $n - 1$ số trước đó có chẵn chữ số 1 $\Longrightarrow$ có a_{n-1} cách chọn số như vậy, mà số cuối có 3 cách chọn là $2, 3, 4$ $\Longrightarrow$ có $3.a_{n-1}$.

+ Số cuối là 1 $\Longrightarrow$ $n - 1$ số trước đó có lẻ chữ số 1 $\Longrightarrow$ có b_{n-1} cách chọn số như vậy $\Rightarrow a_n = 3.a_{n-1} + b_{n-1} = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$.

Từ đó, kết hợp với $a_1 = 1 \Longrightarrow a_n = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$.

Nhận xét

Xét một số có n chữ số thì ta thấy rằng nếu thêm chữ số 1 vào cuối thì tính chẵn lẻ của số số 1 thay đổi, còn nếu thêm các chữ số còn lại là $2, 3, 4$ thì tính chẵn lẻ của số số 1 không thay đổi. Từ đó ta nghĩ đến việc đặt 2 dãy khác nhau cho số lượng số 1 là chẵn và lẻ.

II Thiết lập hệ thức truy hồi trong bài toán đếm

Bài tập

Bài 1: Cho bảng ô vuông $2 \times n$, với n là một số nguyên dương, tìm số cách phủ các quân domino 1×2 và 2×1 lên bảng sao cho tất cả các ô của bảng đều được phủ và không có ô vuông nào được phủ bởi nhiều hơn 1 quân domino.

Bài 2: Cho n là một số nguyên dương. Điền vào mỗi ô của bảng $1 \times n$ một trong hai số 0 hoặc 1. Hỏi có bao nhiêu cách điền số sao cho không có hai ô kề nhau nào cùng chứa số 1?

Bài 3 (Romania 2002): Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số được lập từ các chữ số thuộc tập $\{2, 3, 7, 9\}$ và chia hết cho 3?

Bài 4: Cho tập $S = \{1, 2, \dots, n\}$ với $n > 2$. Tìm số tập hợp con của S sao cho trong một tập con có ít nhất hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.

Bài 5: Tìm số ánh xạ $f: \{1,2, \dots 2n\} \to \{p_1, p_2, p_3\}$ thỏa mãn $T_n = f(1). f(2) \dots f(2n)$ là số chính phương với p_1, p_2, p_3 là các số nguyên tố phân biệt. (n *là số* nguyên dương)

Bài 6: Cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ với $n \geq 2$ theo thứ tự đó nằm trên một đường thẳng. Người ta tô màu tất cả các điểm này bằng 5 màu: xanh, đỏ, vàng, cam, tím thỏa mãn hai điều kiện:

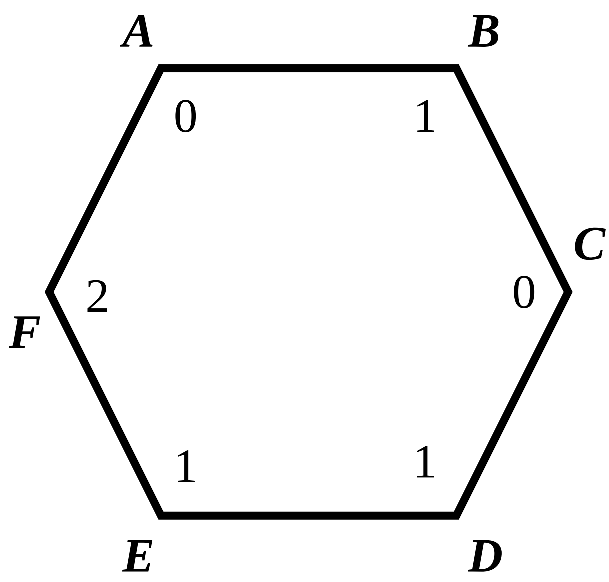
Mỗi điểm tô một màu.

Hai điểm A_i, A_{i+1} $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ hoặc luôn được tô cùng màu hoặc một trong hai điểm được tô màu xanh.

Hỏi có bao nhiêu cách tô?

II Thiết lập hệ thức truy hồi trong bài toán đếm

Bài 7: Xét lục giác đều $ABCDEF$ có độ dài cạnh là 1 và được điền số như hình bên. Một con ếch xuất phát từ đỉnh A và nhảy đến các đỉnh sao cho mỗi bước nhảy đều có độ dài nguyên. Hành trình của ếch là dãy các tên đỉnh ếch đã nhảy qua và hai hành trình được coi là khác nhau nếu ở một lần thứ k nào đó, đỉnh mà ếch nhảy đến ở hai hành trình là khác nhau. Gọi m là số hành trình ếch nhảy sao cho tổng các số mà nó nhảy qua bằng 2020. Chứng minh m không phải số chính phương.



Bài 8 (IMO 2011): Cho n là một số nguyên dương. Ta xét cách đặt n quả cân có khối lượng từ $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ lên bàn cân bằng n bước. Với mỗi bước, ta đặt 1 trong các quả cân chưa được đặt lên 1 trong 2 bên của bàn cân, sao cho bàn cân bên trái không bao giờ nhẹ hơn bàn cân bên phải. Tính số cách đặt thỏa mãn đề bài.

Bài 9: Cho n là một số nguyên dương. Tìm số số tự nhiên có n chữ số được lập thành từ các số $\{3, 5, 7, 8\}$ thỏa mãn các số lập thành là một bội của 3.

Bài 10: Cho bảng ô vuông $4 \times 3n$ với n nguyên dương, ta phủ bảng ô vuông bằng các quân tromino 1×3 sao cho tất cả các ô vuông đều được phủ và mỗi ô vuông chỉ được phủ bởi duy nhất một quân tromino.

Bài 11 (IMO 1979): Cho A và E là 2 đỉnh đối tâm của một hình bát giác đều. Một con ếch bắt đầu nhảy từ A. Tại bất cứ đỉnh nào trừ E, con ếch có thể tới một trong 2 đỉnh kề. Nếu ếch nhảy tới E thì nó dừng lại. Tính số cách để ếch nhảy từ A đến E mất đúng n bước với $n > 4$?

II Thiết lập hệ thức truy hồi trong bài toán đếm

Bài 12: Cho n nguyên dương. Tìm số lượng số tự nhiên có n chữ số, sao cho các chữ số đều lớn hơn 1, và hai chữ số bất kỳ đứng kề nhau thì không cùng nhỏ hơn 7.

Bài 13 (Hoán vị không có điểm bất động): Cho $n \geq 2$ nguyên dương. Tìm số hoán vị không có điểm bất động D_n của $X = \{1;\ 2; \dots;\ n\}$. Trong đó, một điểm x_i gọi là bất động khi và chỉ khi x_i bằng i.

Bài 14 (AIME 1996): Có 2^n cái tủ trong hành lang được đánh số từ 1 đến 2^n, ban đầu các tủ đều đóng. Một anh học sinh A đến mở tủ 1, và luân phiên bỏ qua và mở các tủ đang đóng tiếp theo (bỏ 2, mở 3, bỏ 4,…). Khi anh ấy đụng đến cái tủ cuối cùng (tủ 2^n) thì anh ấy quay đầu lại và tiếp tục luân phiên bỏ qua và mở các tủ đang đóng tiếp theo (bắt đầu từ tủ đang đóng đầu tiên mà A gặp). Cứ tiếp tục di chuyển tới lui hành lang như vậy đến khi tất cả tủ được mở. Hỏi tủ cuối cùng mà anh đóng có số thứ tự là bao nhiêu?

Bài 15: Cho n nguyên dương. Đếm số hoán vị $(a_1, a_2, \dots a_{2n+1})$ của $2n + 1$ số nguyên dương đầu tiên thỏa mãn đồng thời 2 tính chất sau:

(i) $a_{i+1} \leq a_i + 1\ \forall i \in \overline{1,2n}$.

(ii) Có đúng 1 chỉ số $i \in \overline{1,2n}$ sao cho $a_i = i$.

Bài 16 (PTNK 2009): Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu số chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc $\{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

Bài 17: Tìm số các dãy n phần tử $x_1, x_2, \dots, xn$ với $x_i \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$ sao cho số phần tử 1 trong mỗi dãy đó là một bội số của 3.

II Thiết lập hệ thức truy hồi trong bài toán đếm

Bài 18 (AMO 2020): Một miếng tetromino là một hình được tạo bởi 4 hình vuông đơn vị liền cạnh. Với mỗi số nguyên dương n, xét phòng tắm có sàn có dạng hình chữ nhật $2 \times 2n$. Gọi T_n là số cách lát hoàn chỉnh sàn phòng tắm này chỉ bằng các miếng tetromino. Chứng minh T_n là số chính phương với mọi n nguyên dương.

Bài 19: Từ các số $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số và chia hết cho 3?

Bài 20: Xét một phép biến đổi f sao với một chuỗi nhị phân A, mỗi chữ số 0 trong A biến thành 10; mỗi chữ số 1 biến thành 01. Ví dụ:

$$f(1001) = (01101001)$$

Tìm số cặp chữ số 0 liên tiếp trong $f^{(n)}((1))$ với $f^{(1)}(A) = f(A)$ và $f^{(k+1)}(A) = f(f^{(k)}(A))$.

Bài 21: Tìm số dãy số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho các số trong dãy đều không lớn hơn 1 và $\sum_{i=1}^{k} a_i$ không âm với mọi k chạy từ 1 đến n.

Bài 22 (West German Olympiad 1982): Tổng của tất cả các ước dương lẻ lớn nhất của các số nguyên dương $1, 2, 3, \dots, 2^n$ là bao nhiêu ($n \in \mathbb{N}$)?

Bài 23: Có bao nhiêu số nguyên dương có n chữ số thỏa mãn đồng thời:
i) Tất cả các chữ số của n đều lẻ.
ii) Hiệu của 2 chữ số liên tiếp bằng 2.

Bài 24 (China MO 1989): Có thể nào chia được 1989 điểm thành 30 nhóm có cỡ của các nhóm đó không bằng nhau để cho số các tập hợp gồm 3 điểm mà mỗi điểm được chọn từ 3 nhóm khác nhau là lớn nhất.

Bài 25: Từ các số $1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số sao cho trong mỗi số đó đều chứa một số lẻ các chữ số 1 và một số chẵn các chữ số 2 (n là một số nguyên dương cho trước).

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 1: Cho bảng ô vuông $2 \times n$, với n là một số nguyên dương, tìm số cách phủ các quân domino 1×2 và 2×1 lên bảng sao cho tất cả các ô của bảng đều được phủ và không có ô vuông nào được phủ bởi nhiều hơn 1 quân domino.

Gọi (u_n) là dãy số cách phủ các quân domino của bảng ô vuông $2 \times n$. Ta xét cách phủ ô đâu tiên trên cùng góc trái, ô này chỉ có thể được phủ bởi 1 quân domino 1×2 hoặc 2×1.

- *Trường hợp 1:* Ô vuông này được phủ bởi 1 quân domino 2×1 (domino dọc), thì phần còn lại sẽ là một bảng ô vuông $2 \times (n-1)$, dễ thấy số cách phủ trong trường hợp này là u_{n-1}.
- *Trường hợp 2:* Ô vuông này được phủ bởi 1 quân domino 1×2 (domino ngang), thì 2 ô ngay bên dưới quân domino đó cũng sẽ được phủ bởi 1 quân domino 1×2, vậy phần còn lại là một bảng ô vuông $2 \times (n-2)$, trong trường hợp này số cách phủ là u_{n-2}.

Vậy $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
Với $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, bạn đọc tự giải để có được kết quả:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Nhận xét

Bài toán trên là một bài toán phủ domino cơ bản trong loạt bài toán phủ domino, tuy đơn giản nhưng tư duy giải quyết của bài toán này lại là một yếu tố quan trọng trong việc xác định các hệ thức truy hồi trong các bài toán sau: ý tưởng ***chia trường hợp*** *(mà trong bài toán này là xét xem quân domino nằm ngang hay dọc).*

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 2: Cho n là một số nguyên dương. Điền vào mỗi ô của bảng $1 \times n$ một trong hai số 0 hoặc 1. Hỏi có bao nhiêu cách điền số sao cho không có hai ô kề nhau nào cùng chứa số 1?

Gọi u_n là số cách điền thoả đề cho bảng $1 \times n$ mà số ở ô thứ n là số 0 và v_n là số cách điền thoả đề cho bảng $1 \times n$ mà số ở ô thứ n là số 1
$\Rightarrow u_1 = 1$ và $v_1 = 1$.
Bảng $1 \times (n-1)$ có số 0 ở ô thứ $n-1$ thì có 1 cách thêm tạo thành bảng $1 \times n$ sao cho có số 0 ở ô thứ $n \Rightarrow$ Có u_{n-1} cách điền.
Bảng $1 \times (n-1)$ có số 1 ở ô thứ $n-1$ thì có 1 cách thêm tạo thành bảng $1 \times n$ sao cho có số 0 ở ô thứ $n \Rightarrow$ Có v_{n-1} cách điền.

$$\Rightarrow u_n = u_{n-1} + v_{n-1}$$

Bảng $1 \times (n-1)$ có số 0 ở ô thứ $n-1$ thì có 1 cách thêm tạo thành bảng $1 \times n$ sao cho có số 1 ở ô thứ $n \Rightarrow$ Có u_{n-1} cách điền.
Bảng $1 \times (n-1)$ có số 1 ở ô thứ $n-1$ thì có 0 cách thêm tạo thành bảng $1 \times n$ sao cho có số 1 ở ô thứ $n \Rightarrow$ Có 0 cách điền.

$$\Rightarrow v_n = u_{n-1}$$

Vậy ta có: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
Kết hợp với $u_1 = 1$ ta có công thức tổng quát:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow v_n = u_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

Vậy số cách điền số sao cho không có hai ô kề nhau nào cùng chứa số 1 là:

$$u_n + v_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 3 (Romania 2002): Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số được lập từ các chữ số thuộc tập $\{2, 3, 7, 9\}$ và chia hết cho 3?

Gọi a_n là số các số có n chữ số thỏa đề.
Gọi b_n là số các số có n chữ số được lập từ các chữ số thuộc tập {2, 3, 7, 9} mà không chia hết cho 3.
Với số có n chữ số đã chia hết cho 3 thì có 2 cách thêm một chữ số để cho số $n+1$ chữ số chia hết cho 3 là thêm chữ số 3 hoặc 9.
Với số có n chữ số không chia hết cho 3 thì chỉ có đúng một chữ số có thể thêm vào phù hợp để tạo ra số có $n+1$ chữ số và chia hết cho 3.
Vậy, ta có:

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n$$

Lập luận tương tự ta được: $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$
Đáp án cần tìm là a_n.
Ta có $a_1 = 2$; $a_2 = 6$ và

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n = 2a_n + 2a_{n-1} + 3b_{n-1}$$
$$= 2a_n + 2a_{n-1} + 3(a_n - 2a_{n-1}) = 5a_n - 4a_{n-1}$$

Vậy, công thức tổng quát và đáp án đề là $a_n = \frac{4^n+2}{3}$.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 4: Cho tập $S = \{1, 2, \dots, n\}$ với $n > 2$. Tìm số tập hợp con của S sao cho trong một tập con có ít nhất hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.

Gọi a_n là số tập hợp con không có hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp và có phần tử n trong đó.

b_n là số tập hợp con không có hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp và không có phần tử n trong đó.

Theo đề, ta có:

$$a_{n+1} = b_n$$
$$b_{n+1} = a_n + b_n$$

Khi đó, số tập hợp con có thể có trong $\{1, 2, \dots, n\}$ thỏa không có hai phần tử là số nguyên liên tiếp: $a_n + b_n \ (= b_{n+1})$

Ta có:

$$b_{n+1} = a_n + b_n = b_{n-1} + b_n$$

và $b_3 = 3; b_4 = 5$

Vậy công thức tổng quát là

$$a_n + b_n = b_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+2}}{2^{n+2}} + \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+2}}{2^{n+2}}\right)$$

Số tập con có thể tạo ra từ S: 2^n (vì khi xét một tập con, một phần tử chỉ có thể ở một trong hai trạng thái: hoặc là trong tập con đang xét hoặc không ở trong tập con đang xét)

Vậy, đáp án đề là

$$2^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+2}}{2^{n+2}} + \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+2}}{2^{n+2}}\right)$$

Nhận xét

Thay vì tìm số tập con của S thỏa mỗi tập con có ít nhất hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp, ta có thể tìm số tập con của S thỏa mỗi tập con không có hai phần tử là hai số nguyên tiếp và lấy số tập con cố thể có từ S trừ đi (quy tắc phần bù).

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 5: Tìm số ánh xạ $f:\{1,2,...2n\} \to \{p_1,p_2,p_3\}$ thỏa mãn $T_n = f(1).f(2)...f(2n)$ là số chính phương với p_1,p_2,p_3 là các số nguyên tố phân biệt. (n *là số nguyên dương*)

Gọi a_n là số ánh xạ $f:\{1,2,...2n\} \to \{p_1,p_2,p_3\}$: T_n là số chính phương.
Gọi b_n là số ánh xạ $f:\{1,2,...2n\} \to \{p_1,p_2,p_3\}$: T_n không là số chính phương.
Rõ ràng tổng số ánh xạ là $a_n + b_n = 3^{2n}$ (do mỗi số $i \in \overline{1,2n}$ ứng với 1 trong 3 giá trị p_1,p_2,p_3)
Ta xây dựng a_{n+1} từ a_n, b_n như sau:

Từ a_n: Với T_n là số chính phương thì T_{n+1} là số chính phương khi và chỉ khi $f(2n+1) = f(2n+2) \in \{p_1,p_2,p_3\}$
$\Rightarrow$ có 3 cách chọn với mỗi cách trong a_n.

Từ b_n: Với T_n không là số chính phương thì $T_n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}.p_3^{a_3}$ trong đó có 2 số a_i lẻ, 1 số chẵn (do $a_1 + a_2 + a_3 = 2n$ chẵn). Ứng với mỗi trường hợp số chẵn: giả sử là a_1 thì T_{n+1} là số chính phương khi và chỉ khi $f(2n+1) \neq f(2n+2) \in \{p_2,p_3\}$
$\Rightarrow$ Có 2 cách chọn với mỗi cách trong b_n
Như vậy: $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n = 3a_n + 2(3^{2n} - a_n) = a_n + 2.3^{2n}$
Từ đây, kết hợp với $a_1 = 3$ ta tìm được công thức tổng quát của a_n:

$$a_n = \frac{9^n + 3}{4}$$

Nhận xét

1. *Ý tưởng truy hồi khá tự nhiên.*
2. *Nhiều bạn có thể nhầm khi xây dựng a_{n+1} là chỉ xây được từ a_n dẫn đến làm sai bài toán nên phải cẩn thận thêm b_n để lời giải thêm tường minh, chính xác.*

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 6: Cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ với $n \geq 2$ theo thứ tự đó nằm trên một đường thẳng. Người ta tô màu tất cả các điểm này bằng 5 màu: xanh, đỏ, vàng, cam, tím thỏa mãn hai điều kiện:
Mỗi điểm tô một màu.
Hai điểm A_i, A_{i+1} $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ hoặc luôn được tô cùng màu hoặc một trong hai điểm được tô màu xanh.
Hỏi có bao nhiêu cách tô?

Gọi dãy x_n và y_n lần lượt là số dãy n điểm thỏa đề với điểm cuối cùng lần lượt là màu xanh và không phải màu xanh.
Theo đề, ta có: $x_{n+1} = x_n + y_n$
(do nếu điểm A_n màu xanh thì điểm A_{n+1} cũng có thể là màu xanh và nếu điểm A_n khác màu xanh thì bắt buộc điểm A_{n+1} màu xanh)

$$y_{n+1} = 4x_n + y_n$$

(do nếu điểm A_n màu xanh thì điểm A_{n+1} có thể là bốn màu còn lại khác màu xanh và nếu điểm A_n khác màu xanh thì điểm A_{n+1} phải cùng màu)
Đáp án bài là $x_n + y_n$ $(= x_{n+1})$
Ta có:

$$x_{n+1} = x_n + y_n = x_n + (4x_{n-1} + y_{n-1}) = x_n + 4x_{n-1} + x_n - x_{n-1}$$
$$= 2x_n + 3x_{n-1}$$

và $x_2 = 5; x_3 = 13$.
Vậy, công thức tổng quát và đáp án của bài là

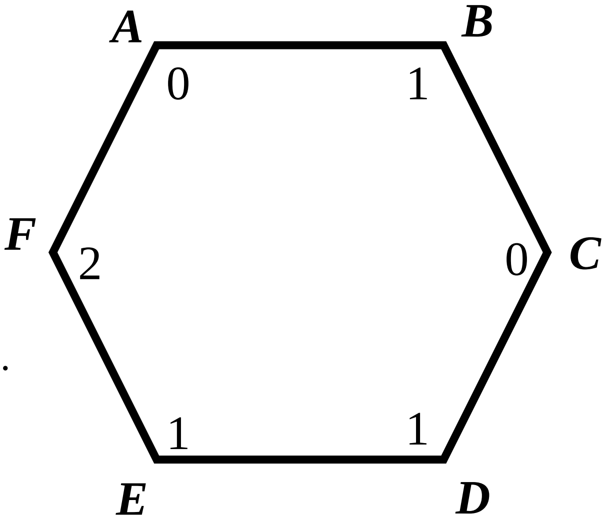
$$x_n + y_n = x_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} + 3^{n+1}}{2}$$

Nhận xét

Ta để ý rằng màu của 1 điểm sẽ phụ thuộc vào màu của điểm trước. Ví dụ: Nếu màu của A_{n-1} là xanh thì màu của A_n tùy ý. Ngược lại, nếu màu của A_{n-1} không phải màu xanh thì A_n hoặc cùng màu với A_{n-1} hoặc phải là màu xanh.
⇒ Suy nghĩ ngược lại, A_n phụ thuộc A_{n-1}; A_{n-1} phụ thuộc A_{n-2}; ...; A_2 phụ thuộc A_1
⇒ Có thể giải bài theo hướng truy hồi.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 7: Xét lục giác đều $ABCDEF$ có độ dài cạnh là 1 và được điền số như hình bên. Một con ếch xuất phát từ đỉnh A và nhảy đến các đỉnh sao cho mỗi bước nhảy đều có độ dài nguyên. Hành trình của ếch là dãy các tên đỉnh ếch đã nhảy qua và hai hành trình được coi là khác nhau nếu ở một lần thứ k nào đó, đỉnh mà ếch nhảy đến ở hai hành trình là khác nhau. Gọi m là số hành trình ếch nhảy sao cho tổng các số mà nó nhảy qua bằng 2020. Chứng minh m không phải số chính phương.



Ta thấy ở hai bước liên tiếp, con ếch không thể nhảy chỉ trong các đỉnh tam giác đều ACE hoặc tam giác đều BDF (do độ dài mỗi cạnh tam giác đều này là $\sqrt{3}$)

$\Rightarrow$ Con ếch sẽ nhảy từ đỉnh tam giác này qua đỉnh tam giác kia và ngược lại.

Ta có bộ (A, C, E) tương ứng $(0, 0, 1)$ và (B, D, F) tương ứng $(1, 1, 2)$.

Để ý rằng

$$\{x + y\,;\, x \in (A, C, E)\,;\; y \in (B, D, F)\,\} = \{\,1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3\,\}$$

$\Rightarrow$ Tổng các số trên hai bước liên tiếp có thể là 1, 2, 3 trong đó có bốn cách tạo ra tổng là 1, bốn cách tạo ra tổng là 2 và một cách tạo ra tổng là 3.

Gọi a_n là số hành trình của ếch có tổng là n với số chẵn bước nhảy.

b_n là số hành trình của ếch có tổng là n với số lẻ bước nhảy.

Theo đề, ta có:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + 4a_{n-2} + a_{n-3} \\ b_n = 4b_{n-1} + 4b_{n-2} + b_{n-3} \end{cases}$$

Ta thấy hai phương trình giống nhau nên đặt $u_n = a_n + b_n$

Ta có $u_0 = 1; u_1 = 6; u_2 = 28$ và $u_n = 4u_{n-1} + 4u_{n-2} + u_{n-3}$

$\Rightarrow\; m = u_{2020} \equiv u_1 \equiv 2\ (mod\ 4) \Rightarrow$ m không phải số chính phương.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 8 (IMO 2011): Cho n là một số nguyên dương. Ta xét cách đặt n quả cân có khối lượng từ $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ lên bàn cân bằng n bước. Với mỗi bước, ta đặt 1 trong các quả cân chưa được đặt lên 1 trong 2 bên của bàn cân, sao cho bàn cân bên trái không bao giờ nhẹ hơn bàn cân bên phải. Tính số cách đặt thỏa mãn đề bài.

Gọi (un) là dãy các cách đặt thỏa mãn đề bài của n quả cân $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$.

- Trước tiên ta tạm thời không quan tâm đến vị trí và bên đặt của quả cân 2^0. Ta xét cách đặt của $n-1$ quả cân còn lại. Ta thấy tất cả những quả cân còn lại đều có thể được giản ước bởi 2, nên số cách đặt thỏa đề của các quả cân $2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ cũng là số cách đặt thỏa đề của các quả cân $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-2}$, vậy số cách đặt các quả cân $2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ thỏa đề là u_{n-1}.
- Bây giờ ta xét vị trí và cách đặt của quả cân 2^0, ta có n vị trí để chèn quả cân 2^0 vào giữa thao tác đặt của các quả cân $2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$. Nếu được đặt ở vị trí đầu, thì chỉ có duy nhất 1 cách đặt đó là đặt vào bàn cân bên trái, còn ở các vị trí còn lại thì số cách đặt luôn là 2, vì hiệu khối lượng của bàn cân bên trái và khối lượng bàn cân bên phải luôn nhiều hơn 1. Vậy tổng cộng có $2n-1$ vị trí và cách đặt của quả cân 2^0.

✧Từ đó ta được $u_n = (2n-1)u_{n-1}$.

Đến đây bạn đọc tự giải, kết quả của bài toán là $\frac{(2n)!}{2^n.n!}$.

Nhận xét

Bài toán là một bài trong đề thi quốc tế nhưng lại không quá khó và kĩ thuật cũng không mấy phức tạp. Tuy nhiên, bài toán vẫn yêu cầu sự nhạy bén nhất định trong việc tìm ra mối quan hệ giữa trường hợp n và $n-1$ để từ đó tìm ra cách thiết lập hệ thức truy hồi.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 9: Cho n là một số nguyên dương. Tìm số số tự nhiên có n chữ số được lập thành từ các số $\{3, 5, 7, 8\}$ thỏa mãn các số lập thành là một bội của 3.

Gọi (un) là dãy số số tự nhiên có n chữ số được lập thành thỏa mãn đề bài.

Xét các chữ số tận cùng của các số có n chữ số thỏa đề bài, ta có toàn bộ chữ số tận cùng có thể là $3, 5, 7, 8$.

Ta chia các số thỏa đề độ dài n làm 3 nhóm, nhóm A gồm những số có tận cùng là 3, nhóm B gồm những số có tận cùng là 5 hoặc 8, nhóm C là những nhóm có tận cùng là 7. Ta có $u_n = |A| + |B| + |C|$.

- Xét các số thuộc nhóm A, ta thấy nếu bỏ đi chữ số tận cùng của số này (số 3) thì số có độ dài $n - 1$ kia cũng phải là một số chia hết cho 3, tức là một số thỏa đề độ dài $n - 1$, vậy $|A| = u_{n-1}$.
- Xét các số thuộc nhóm B, ta có khi bỏ đi chữ số tận cùng (5 hoặc 8) thì số còn lại sẽ là một số chia 3 dư 1 và có độ dài $n - 1$. Ta gọi dãy (vn) là dãy số các số tự nhiên được lập thành từ các số $3, 5, 7, 8$ có n chữ số và chia 3 dư 1. Khi đó ta có $|B| = 2v_{n-1}$ (số 2 là số cách chọn của chữ số tận cùng (5 hoặc 8) để xóa đi/thêm vào)
- Xét các số thuộc nhóm C, ta có khi bỏ đi chữ số tận cùng (số 7), thì số còn lại là 1 số chia 3 dư 2 vào có độ dài là $n - 1$. Ta gọi dãy (tn) là dãy số các số tự nhiên được lập thành từ các số $3, 5, 7, 8$ có n chữ số và chia 3 dư 2. Khi đó ta có $|C| = t_{n-1}$.

Vậy $u_n = |A| + |B| + |C| = u_{n-1} + 2v_{n-1} + t_{n-1}$.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bằng cách làm tương tự, ta cũng sẽ thiết lập được hệ thức truy hồi của v_n, và t_n, vậy ta có hệ:

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1} + t_{n-1} \\ v_n = v_{n-1} + 2t_{n-1} + u_{n-1} \\ t_n = t_{n-1} + 2u_{n-1} + v_{n-1} \end{cases}$$

Mà ta có do u_n là các số chia hết cho 3, v_n là các số chia 3 dư 1, t_n là các số chia 3 dư 2 nên $u_n + v_n + t_n$ sẽ là các số có thể lập được từ $3, 5, 7, 8$.
Vậy $u_n + v_n + t_n = 4^n$.
Từ đó, ta sẽ có:

$$u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1} + t_{n-1} = 4^n + v_{n-1} = 4^n + 4^{n-1} + t_{n-2}$$
$$= 4^n + 4^{n-1} + 4^{n-2} + u_{n-3}$$

Đến đây bạn đọc tự giải để có

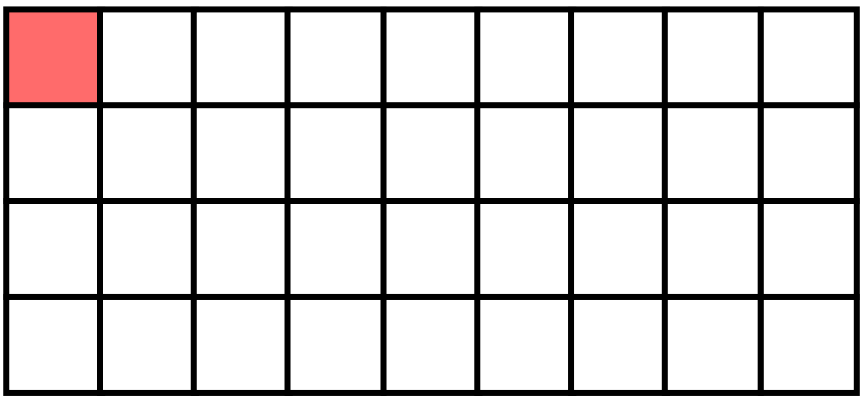
$$u_n = \frac{4^{n+1}-1}{3} + 1 \text{ nếu } n \text{ chia hết cho } 3$$
$$u_n = \frac{4^{n+1}-1}{3} - 16 \text{ nếu } n \text{ chia 3 dư } 2$$
$$u_n = \frac{4^{n+1}-1}{3} - 20 \text{ nếu } n \text{ chia 3 dư } 1$$

III Lời giải tham khảo và nhận xét

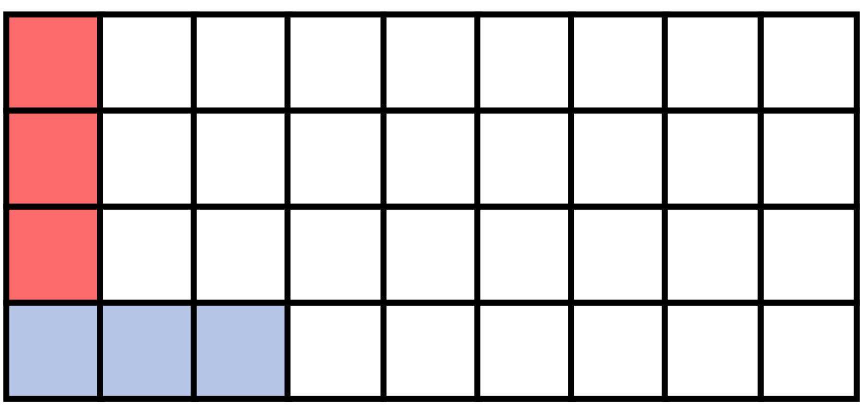
Bài 10: Cho bảng ô vuông $4 \times 3n$ với n nguyên dương, ta phủ bảng ô vuông bằng các quân tromino 1×3 sao cho tất cả các ô vuông đều được phủ và mỗi ô vuông chỉ được phủ bởi duy nhất một quân tromino.

Gọi (u_n) là dãy số cách phủ thỏa đề của bảng ô vuông $4 \times 3n$.

Xét cách phủ ô đầu tiên của bảng ô vuông (ô được tô đỏ)



- ***Trường hợp 1:*** Nếu nó được phủ bởi tromino nằm dọc (đỏ) thì ô ngày dưới đó phải được phủ bằng tromino nằm ngang (xanh). Khi đó, phần còn lại (trắng) sẽ có dạng A như sau:

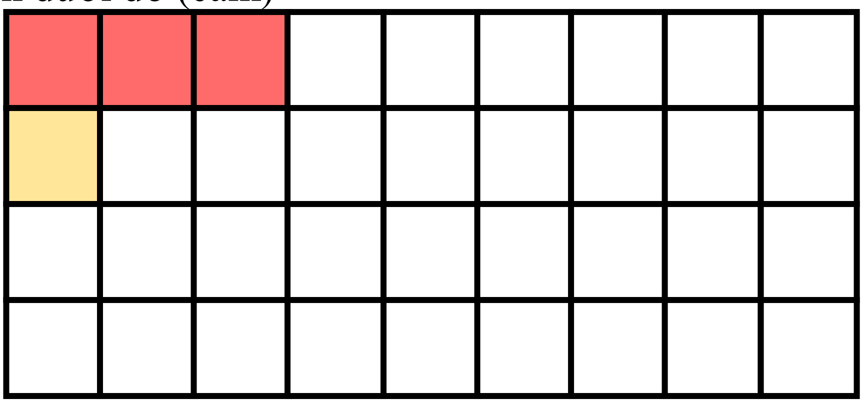


Ta gọi dãy (v_n) là dãy số cách phủ các hình có dạng A và có $4 \times 3n - 6$ ô vuông.

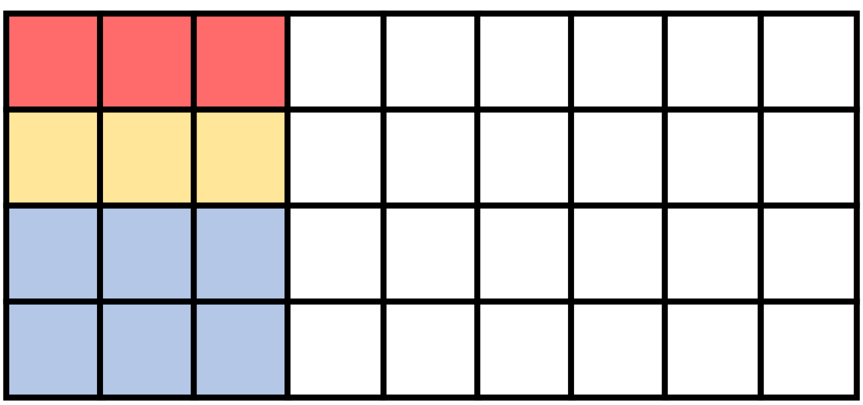
$\Rightarrow$ Số cách phủ trong trường hợp 1 là v_n.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

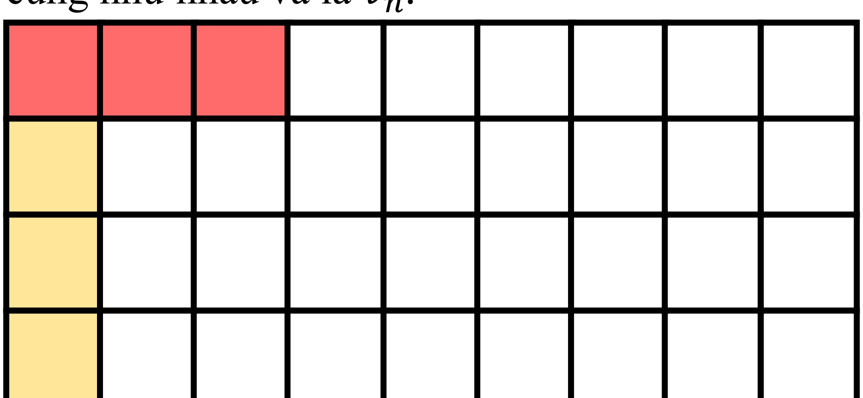
- ***Trường hợp 2:*** Nếu nó được phủ bởi tromino nằm ngang (đỏ) thì ta xét ô ngày bên dưới đó (cam)



    - *Trường hợp 2.1:* Nếu nó được phủ bởi một ô ngang (cam) thì hai ô ngay dưới đó cũng phải được phủ bằng các ô ngang (xanh). Khi đó, số cách phủ của trường hợp này là u_{n-1}.



    - *Trường hợp 2.2:* Nếu nó được phủ bởi một ô dọc (cam) thì phần còn lại (trắng) cũng có dạng đối xứng trục của hình A nên số cách phủ cũng như nhau và là v_n.



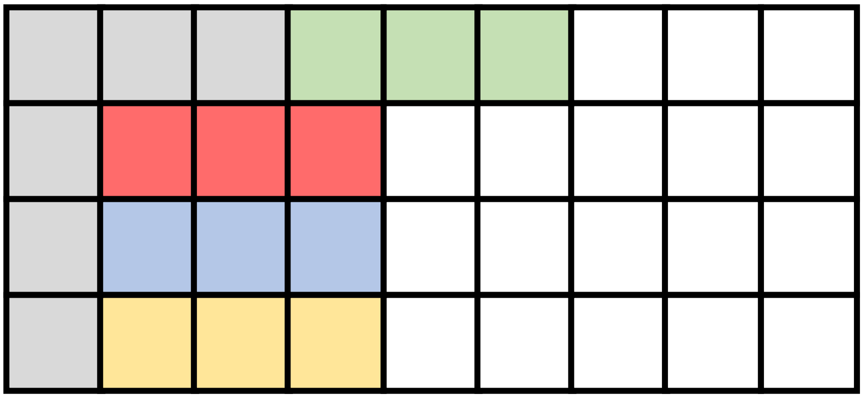
III Lời giải tham khảo và nhận xét

Từ các trường hợp trên, ta có: $u_n = u_{n-1} + 2v_n$.

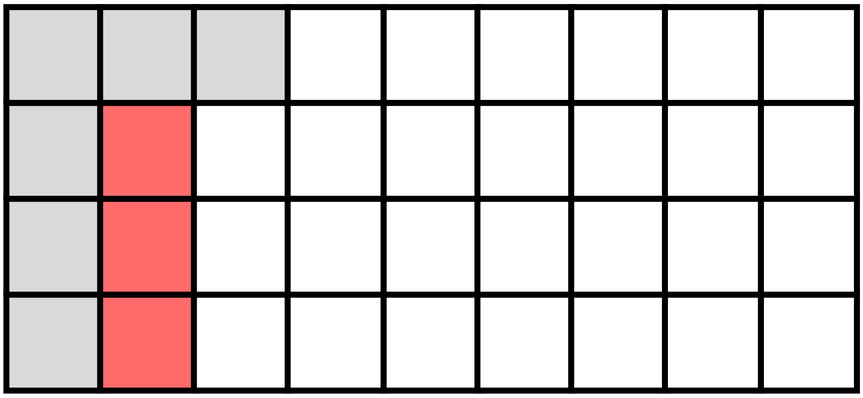
Bây giờ ta sẽ xét hệ thức truy hồi của (v_n).

Ta sẽ xét cách phủ ô đỏ trong hình A.

- ***Trường hợp 1:*** Nếu ô này được phủ bởi ô ngang (đỏ) thì ta phải phủ thêm 3 ô ngang như hình. Phần còn lại vẫn có dạng A nên số cách phủ trong trường hợp này là v_{n-1}.



- ***Trường hợp 2:*** Nếu ô này được phủ bởi ô dọc (đỏ) thì phần còn lại là hình dạng B. Ta gọi (t_n) là dãy cho cách phủ cho hình B với số ô vuông là $4 \times 3n - 9$. Vậy trong trường hợp này số cách phủ là t_n.



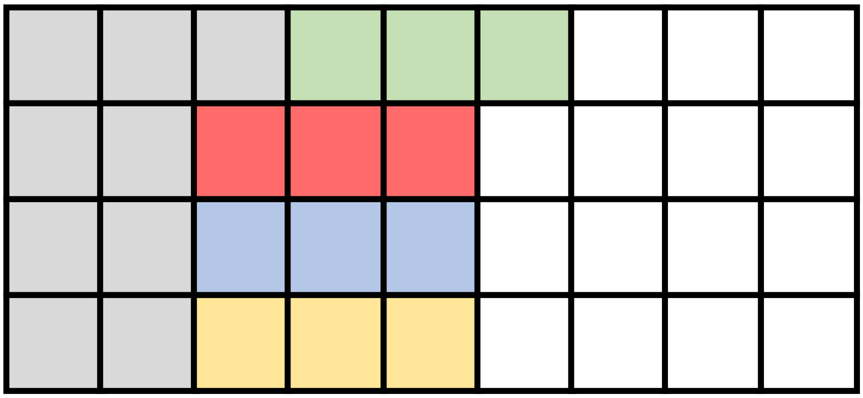
Vậy ta có: $v_n = v_{n-1} + t_n$.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

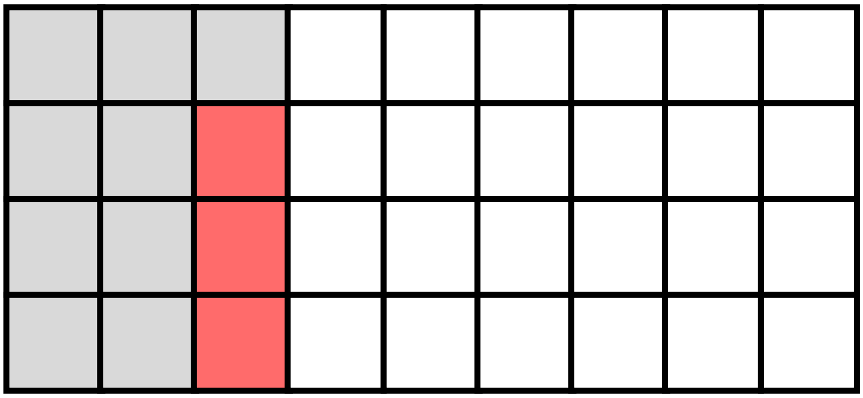
Bây giờ ta sẽ xét hệ thức truy hồi của (t_n).

Ta sẽ xét cách phủ ô đỏ trong hình B.

- ***Trường hợp 1:*** Nếu ô này được phủ bởi ô ngang (đỏ) thì ta phải phủ thêm 3 ô ngang như hình. Phần còn lại vẫn có dạng B nên số cách phủ trong trường hợp này là t_{n-1}.



- ***Trường hợp 2:*** Nếu ô này được phủ bởi ô dọc (đỏ) thì phần còn lại là hình $4 \times 3(n-1)$. Vậy trong trường hợp này số cách phủ là u_{n-1}.



Vậy ta có $t_n = t_{n-1} + u_{n-1}$.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

⇒Từ đó, ta có một hệ các hệ thức truy hồi:

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + 2v_n \\ v_n = v_{n-1} + t_n \\ t_n = t_{n-1} + u_{n-1} \end{cases}$$

Bạn đọc tự giải để đưa về $u_{n+3} = 5u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$.

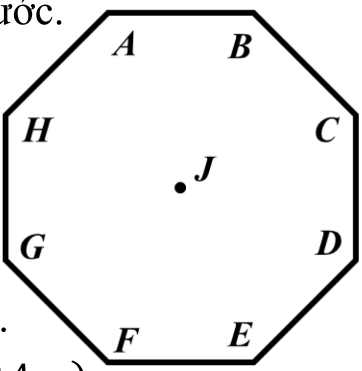
Nhận xét

Bài toán trên là một bài phủ domino ở mức độ phức tạp hơn bài trước đó khá nhiều, đòi hỏi sự khéo léo, tinh ý trong xử lý chia trường hợp và lập luận chặt chẽ, cẩn thận để thiết lập được hệ thức truy hồi.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 11 (IMO 1979): Cho A và E là 2 đỉnh đối tâm của một hình bát giác đều. Một con ếch bắt đầu nhảy từ A. Tại bất cứ đỉnh nào trừ E, con ếch có thể tới một trong 2 đỉnh kề. Nếu ếch nhảy tới E thì nó dừng lại. Tính số cách để ếch nhảy từ A đến E mất đúng n bước với $n > 4$?

Gọi hình bát giác đều đang xét là $ABCDEFGH$ có tâm J như hình vẽ.
Gọi A_n là số cách để ếch nhảy từ A đến E mất đúng n bước.



Nếu n lẻ, vì ếch khi nhảy từ A đến E mất một số chẵn bước nên $A_n = 0$.
Nếu n chẵn, đặt $n = 2k, k > 2, k \in N^*$.
Nhận xét rằng sau 2 bước, A chỉ có thể trở về vị trí cũ hoặc đi đến điểm C hoặc đi đến điểm G, gọi B_n là số cách để ếch nhảy từ C (hoặc G) đến E mất đúng n bước.
Do đó: $A_{2k} = 2A_{2k-2} + 2B_{2k-2} \Rightarrow B_{2k} = \frac{1}{2}(A_{2k+2} - 2A_{2k})$.
Vì $n > 4$ nên từ C và G không thể đến E sau 2 bước đi, do đó từ C (hoặc G) chỉ có thể quay về chính nó hoặc đi đến điểm A sau 2 bước
Kéo theo: $B_{2k} = 2B_{2k} - 2 + A_{2k} - 2$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(A_{2k+2} - 2A_{2k}) = A_{2k} - 2A_{2k-2} + A_{2k-2}$$
$$\Rightarrow A_{2k+2} - 4A_{2k} + 2A_{2k-2} = 0$$

Với $A_6 = 8, A_8 = 28$, ta thu được :

$$A_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^{k-1} - \left(2-\sqrt{2}\right)^{k-1}\right]$$

Vậy với n lẻ, không có cách nào để ếch nhảy được từ A đến E; với n chẵn, số cách để ếch nhảy từ A đến E mất đúng n bước là:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} - \left(2-\sqrt{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\right]$$

Nhận xét

Để tiếp cận những bài toán như trên, việc xét các đối tượng trung gian là 1 điều dễ nghĩ đến. Xây dựng dãy truy hồi từ các đối tượng trung gian cũng là các để ta suy biến về công thức truy hồi của dãy ta cần tìm.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 12: Cho n nguyên dương. Tìm số lượng số tự nhiên có n chữ số, sao cho các chữ số đều lớn hơn 1, và hai chữ số bất kỳ đứng kề nhau thì không cùng nhỏ hơn 7.

Từ đề bài thì số được tạo thành từ các chữ số $2, 3, \dots, 9$.
Gọi u_n là số số kết thúc bởi $2, 3, 4, 5, 6$ có n chữ số, gọi là thoả tính chất U_n.
Và v_n là số số kết thúc bởi $7, 8, 9$ có n chữ số, gọi là thoả tính chất V_n.
Xét $n \geq 2$.
Xét một số thoả tính chất U_{n+1} khi bỏ chữ số tận cùng ra, phải là 1 số thoả tính chất V_n và từ một số thoả V_n có 5 cách tạo ra một số thoả U_{n+1} (thêm $2/3/4/5/6$ vào cuối số cũ)
Suy ra $u_{n+1} = 5v_n$.
Xét 1 số thoả tính chất V_{n+1}.
TH$_1$: Kết thúc bởi $\overline{yx}$ (trong đó y thuộc $\{2; 3; 4; 5; 6\}$ và x thuộc $\{7; 8; 9\}$).
Với mỗi x, có u_n số thoả (vì phần còn lại là một số thoả U_n). Mà x có 3 giá trị nên TH này có $3un$ số.
TH$_2$: Kết thúc bởi $\overline{yx}$ (y, x thuộc $\{7; 8; 9\}$).
Với mỗi x, thì phần còn lại là một số thoả V_n, nên có v_n số thoả. Ngược lại có 3 giá trị của x nên TH này có $3vn$ số.
Suy ra $v_{n+1} = 3un + 3vn$.
Gọi $s_n = un + vn$ thì cần tìm s_n. Bạn đọc có thể tính được:

$$s_n = \frac{\frac{23+\sqrt{69}}{46}\left(\frac{3+\sqrt{69}}{2}\right)^{n+1} + \frac{23-\sqrt{69}}{46}\left(\frac{3-\sqrt{69}}{2}\right)^{n+1}}{3}$$

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 13 (Hoán vị không có điểm bất động): Cho $n \geq 2$ nguyên dương. Tìm số hoán vị không có điểm bất động D_n của $X = \{1;\ 2; \dots;\ n\}$. Trong đó, một điểm x_i gọi là bất động khi và chỉ khi x_i bằng i.

Ta sẽ ký hiệu $L_{i,n}$ là số hoán vị của tập $\{1; 2; \dots; n\}$ có n điểm bất động (i không vượt quá n và i, n là các số tự nhiên).
Cho $D_n = L_{0,n}$.
Dễ tính được là $L_{n,n} = 1$ (vì mọi điểm chỉ có 1 lựa chọn vị trí).
Và $L_{n-1,n} = 0$ (Giả sử điểm di động là 1 ở vị trí i, khi đó i không thể giữ được vị trí ban đầu tức là có ít nhất 2 điểm không bất động).
Ta chứng minh: $L_{k,n} = C_n^k.D_{n-k}$ (với k là số nguyên dương, k không vượt quá n).
Số hoán vị 1 tập n phần tử là $n!$.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} L_{k,n} = n! \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} D_k.C_k^{n-k} = n! \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{D_k}{k!.(n-k)!} = 1$$

Đặt $C_n = \frac{D_n}{n!}$ thì ta có $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{(n-k)!} = 1.$
Xét hàm sinh ($|x| < 1$)

$$f(x) \Leftrightarrow < C_0;\ C_1; \dots >$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1!} f(x) \Leftrightarrow < 0; \frac{C_0}{1!}; \frac{C_1}{1!}; \dots >$$

và $\frac{x^2}{2!} f(x) \Leftrightarrow < 0; 0; \frac{C_0}{2!}; \frac{C_1}{2!}; \dots >$

…

III Lời giải tham khảo và nhận xét

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right) \Leftrightarrow < 1; 1; 1\ldots > \Leftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow f(x).e^x = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow f(x) \Leftrightarrow < C_0;\ C_1; \ldots >$$

$$\Rightarrow f(x) \Leftrightarrow < 1;\ 1; \ldots >.e^{-x}$$

$$\Rightarrow f(x) \Leftrightarrow < 1;\ 1; \ldots >.< 1; \frac{-1}{1!}; \frac{1}{2!}; \ldots >$$

$$\Rightarrow f(x) \Leftrightarrow < 1; 1 + \frac{-1}{1!}; 1 + \frac{-1}{1!} + \frac{1}{2!}; \ldots >$$

$$\Rightarrow C_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{D_n}{n!}$$

$$\Rightarrow D_n = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right).n!$$

Nhận xét

Ngoài ra, bài toán còn có có thể được xử lý bằng cách ít phức tạp hơn là sử dụng nguyên lý bao hàm loại trừ.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 14 (AIME 1996): Có 2^n cái tủ trong hành lang được đánh số từ 1 đến 2^n, ban đầu các tủ đều đóng. Một anh học sinh A đến mở tủ 1, và luân phiên bỏ qua và mở các tủ đang đóng tiếp theo (bỏ 2, mở 3, bỏ 4,…). Khi anh ấy đụng đến cái tủ cuối cùng (tủ 2^n) thì anh ấy quay đầu lại và tiếp tục luân phiên bỏ qua và mở các tủ đang đóng tiếp theo (bắt đầu từ tủ đang đóng đầu tiên mà A gặp). Cứ tiếp tục di chuyển tới lui hành lang như vậy đến khi tất cả tủ được mở. Hỏi tủ cuối cùng mà anh đóng có số thứ tự là bao nhiêu?

Gọi L_n là số thứ tự tủ cuối cùng mà anh đóng với 2^n tủ đang đóng ban đầu.
Sau lượt đi đầu tiên, còn lại đúng 2^{n-1} tủ đang đóng.
Số thứ tự của các tủ này lần lượt là $2^n, 2^n-2, \dots, 4, 2$ đúng thứ tự theo vị trí A đang đứng.
Đánh số lại thành $1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}$ thì số thứ tự tủ được mở cuối là L_{n-1}.
Mà số thứ tự cũ m ứng với số thứ tự mới là $2^{n-1}+1-\frac{m}{2}$ (có thể chứng minh bằng quy nạp)

$$\Rightarrow L_{n-1} = 2^{n-1}+1-\frac{L_n}{2}$$
$$\Rightarrow L_n = 2^n+2-2L_{n-1}$$
$$\Rightarrow L_n = 2^n+2-2(2^{n-1}+2-2L_{n-2}) = 4L_{n-2}-2$$

Tính được $L_0 = 1, L_1 = 2$ từ đó dễ dàng suy ra được công thức tổng quát của L_n:

$$L_n = \frac{1}{3}\left(4^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}+2\right)$$

Nhận xét

Các dạng toán áp dụng dãy thuật toán lặp lại như trên thường sử dụng phương pháp bất biến, đơn biến để xử lí nên hướng đi truy hồi không thật sự rõ ràng từ đầu. Nhưng khi xét vài trường hợp n nhỏ, ta có thể thấy L_n *thay đổi liên tục với quy luật khó xác định nên bất biến và đơn biến rất khó xử lí được bài toán. Sau lần đi đầu còn lại* 2^{n-1} *tủ đang đóng, con số gợi cho ta về truy hồi. Một khi thử truy hồi thì phần còn lại không quá khó, chỉ đơn giản là kĩ thuật xử lí, tính toán.*

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 15: Cho n nguyên dương. Đếm số hoán vị $(a_1, a_2, \dots a_{2n+1})$ của $2n+1$ số nguyên dương đầu tiên thỏa mãn đồng thời 2 tính chất sau:

(i) $a_{i+1} \le a_i + 1 \ \forall i \in \overline{1,2n}$.

(ii) Có đúng 1 chỉ số $i \in \overline{1,2n}$ sao cho $a_i = i$.

Ta xử lí trước giả thiết (i) của đề bài:

Gọi s_n là số hoán vị $(a_1, a_2, \dots a_n)$ của n số nguyên dương đầu tiên thỏa mãn $a_{i+1} \le a_i + 1 \quad \forall i \in \overline{1, n} \qquad (i)$

Giả sử $a_k = n$ thì $a_{k-1} \ge n - 1 \Rightarrow a_{k-1} = n - 1$.

Lập luận tương tự, bằng quy nạp ta chứng minh được là $a_i = n - k + i$ với $i = \overline{1, k}$.

Các số còn lại phía sau là $1, 2, \dots, n - k$ lập thành một hoán vị thỏa (i) với $n - k$ số nguyên dương đầu tiên nên có s_{n-k} hoán vị như thế. (chú ý khi $k = n$ thì có đúng 1 hoán vị là $(1, \dots, n)$)

Lấy tổng ta được:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} s_k + 1$$

Ngoài ra ta có $s_1 = 1, s_2 = 2$ nên không khó để tìm ra được là $s_n = 2^{n-1}$.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Trở lại bài toán, kết hợp với (ii).

Giả sử $a_i = i$ là số duy nhất thỏa (ii).

Khi đó: $a_{i+1} \leq i + 1$ mà $a_{i+1} \notin \{i, i + 1\}$ nên $a_{i+1} \leq i - 1$

Lập luận tương tự, ta được tất cả $2n - i + 1$ số a_k với $k \geq i + 1$ đều có giá trị $\leq i - 1$

$\Rightarrow 2n - i + 1 \leq i - 1$ (do |tập giá trị| $\geq$ |tập nguồn|) hay $n \leq i - 1$

Mặt khác, $a_{i-1} \geq a_i - 1 = i - 1$ mà $a_{i-1} \notin \{i, i - 1\}$ nên $a_{i-1} \geq i + 1$

Chứng minh tương tự ở trên, ta được $i - 1 \leq 2n - i + 1$ hay $n \geq i - 1$

Như vậy: $i = n + 1$. Khi đó có $(a_1, a_2, \dots a_n)$ là hoán vị của $(n + 2, n + 3, \dots, 2n + 1)$ thỏa mãn (i) và $(a_{n+2}, a_{n+3}, \dots a_{2n+1})$ của $(1, 2, \dots, n)$ thỏa mãn (i).

Vậy số hoán vị cần tìm là:

$$s_n . s_n = 2^{2n-2}$$

Nhận xét

1. *Đây là 1 bài toán khó, có kết hợp nhiều giả thiết dễ gây rối cho người làm.*
2. *Ta phải xử lí trước giả thiết (i) rồi mới kết hợp (ii) để làm bài toán rõ ràng và đơn giản hơn. Ý xử lí (ii) có thể tìm ra qua việc thử vài trường hợp nhỏ để thấy quy luật. Còn ý xử lí (i): $s_n = 2^{n-1}$ còn có thể tính trực tiếp bằng nguyên lí nhân.*

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 16 (PTNK 2009): Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu số chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc $\{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

Gọi a_n, bn, cn lần lượt là số các số có n chữ số thoả đề chia 3 dư $0, 1, 2$

$\Rightarrow a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 1.$

+) 1 số có $n - 1$ chữ số chia 3 dư 0 thì có 2 cách thêm để tạo thành 1 số có n chữ số chia 3 dư 0 $\Rightarrow$ Có $2a_{n-1}$ cách.

+) 1 số có $n - 1$ chữ số chia 3 dư 1 thì có 1 cách thêm để tạo thành 1 số có n chữ số chia 3 dư 0 $\Rightarrow$ Có b_{n-1} cách.

+) 1 số có $n - 1$ chữ số chia 3 dư 2 thì có 1 cách thêm để tạo thành 1 số có n chữ số chia 3 dư 0 $\Rightarrow$ Có c_{n-1} cách.

$\Rightarrow a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}.$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow \begin{cases} b_n = 2b_{n-1} + c_{n-1} + a_{n-1} \\ c_n = 2c_{n-1} + a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n - b_n = a_{n-1} - b_{n-1} \\ b_n - c_n = b_{n-1} - c_{n-1} \\ c_n - a_n = c_{n-1} - a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n - b_n = a_1 - b_1 = 1 \\ b_n - c_n = b_1 - c_1 = 0 \\ c_n - a_n = c_1 - a_1 = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_n = 4a_{n-1} - 2$. Kết hợp với $a_1 = 2$ ta có công thức tổng quát:

$$a_n = \frac{4^n + 2}{3}$$

Vậy có $\frac{4^n+2}{3}$ số chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số thuộc $\{3, 4, 5, 6\}$.

Nhận xét

Do các chữ số đã cho trong bài này không có số 0 nên ý tưởng truy hồi khá tự nhiên. Bài này có thể có nhiều cách khác, nhưng phương pháp đếm bằng truy hồi có lẽ sẽ giúp truyền đạt ý tưởng một cách tốt nhất. Đặc biệt, sau khi tính được a_n, b_n, c_n theo a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, ta có thể lấy biểu thức tính a_n trừ biểu thức tính b_n và tương tự để dễ dàng tìm ra công thức tổng quát cho a_n hơn.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 17: Tìm số các dãy n phần tử $x_1, x_2, \dots, xn$ với $x_i \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$ sao cho số phần tử 1 trong mỗi dãy đó là một bội số của 3.

Gọi a_n, b_n, c_n lần lượt là số các dãy n phần tử thoả đề sao cho số phần tử 1 trong mỗi dãy đó chia 3 dư 0, 1, 2 $\Rightarrow a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 0$.
+) 1 dãy $n-1$ phần tử có số phần tử 1 chia 3 dư 0 thì có 2 cách thêm để tạo thành dãy n phần tử có số phần tử 1 chia 3 dư 0 $\Rightarrow$ Có $2a_{n-1}$ cách.
+) 1 dãy $n-1$ phần tử có số phần tử 1 chia 3 dư 1 thì có 0 cách thêm để tạo thành dãy n phần tử có số phần tử 1 chia 3 dư 0 $\Rightarrow$ Có 0 cách.
+) 1 dãy $n-1$ phần tử có số phần tử 1 chia 3 dư 2 thì có 1 cách thêm để tạo thành dãy n phần tử có số phần tử 1 chia 3 dư 0 $\Rightarrow$ Có c_{n-1}cách.

$$\Rightarrow a_n = 2a_{n-1} + c_{n-1}.$$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow \begin{cases} b_n = 2b_{n-1} + a_{n-1} \\ c_n = 2c_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-2} + 2c_{n-2} \\ &= 2a_{n-1} + 2a_{n-1} - 4a_{n-2} + a_{n-3} + 2b_{n-3} \\ &= 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + a_{n-3} + 2c_{n-3} - 4c_{n-3} \\ &= 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + a_{n-3} + 2a_{n-1} - 4a_{n-2} - 4a_{n-2} + 8a_{n-3} \\ &= 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 9a_{n-3} \end{aligned}$$

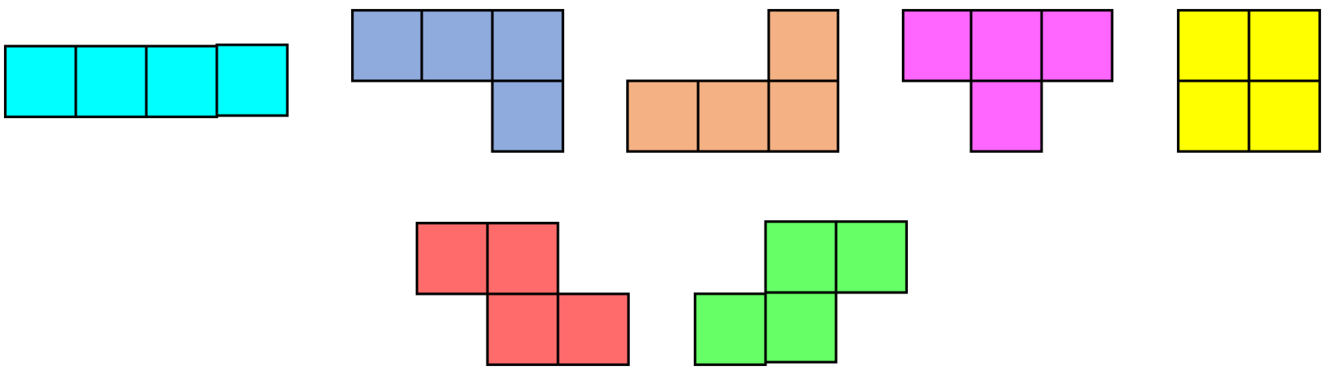
$a_2 = 2a_1 + c_1 = 4$; $a_3 = 2a_2 + b_1 + 2c_1 = 9$; kết hợp với $a_1 = 2$ ta có công thức tổng quát: $a_n = 3^{n-1} + \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \times 2\left(\sqrt{3}\right)^{n-2}$

Vậy có $3^{n-1} + \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \times 2\left(\sqrt{3}\right)^{n-2}$ dãy n phân tử thoả đề.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 18 (AMO 2020): Một miếng tetromino là một hình được tạo bởi 4 hình vuông đơn vị liền cạnh. Với mỗi số nguyên dương n, xét phòng tắm có sàn có dạng hình chữ nhật $2 \times 2n$. Gọi T_n là số cách lát hoàn chỉnh sàn phòng tắm này chỉ bằng các miếng tetromino. Chứng minh T_n là số chính phương với mọi n nguyên dương.

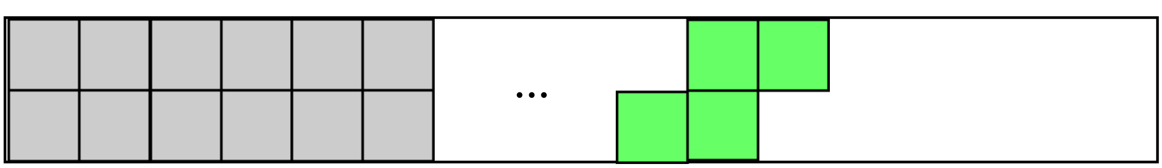
Ta xét các miếng tetromino như sau:



(Từ trái sang phải là các quận chữ I, J, L, T, O, Z, S)

Trước hết, ta chứng minh mọi cách lát đều không thể dùng miếng dạng S hay Z.

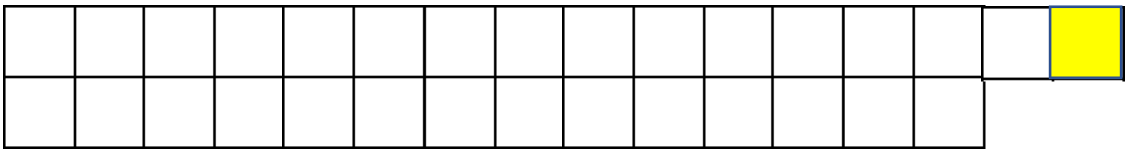
Giả sử ngược lại. Lúc này ta xét miếng S hoặc Z nằm gần bên phải nhất (giả sử là Z, với miếng S có thể lập luận tương tự).



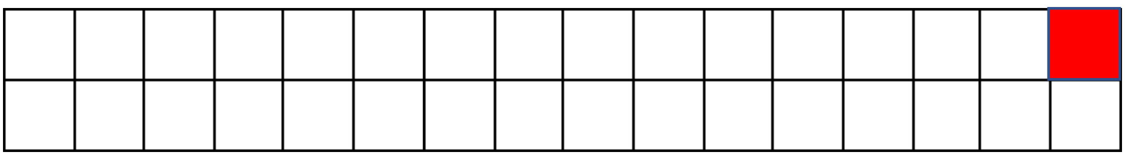
Lúc này, phần còn lại bên phải hình chữ nhật có kích thước hai dòng với số ô còn lại trên mỗi dòng lệch nhau 1 đơn vị, là số lẻ. Nhưng phần còn lại phải được lát bởi các miếng I, L, J, T và O. Mà những miếng này đều có hiệu số ô giữa 2 dòng là số chẵn nên không thể lát được.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bây giờ ta đặt thêm dãy U_n là số cách lát cho hình có dạng sau (gọi là hình X) có số ô trên hai dòng là $2n+1$ và $2n-1$ (và hình đối xứng của nó)



Xét miếng lát ô góc phải trên của bảng $2 \times 2n$ (đỏ):



+) Miếng chữ I: Trong trường hợp này 4 ô ngày dưới đó cũng phải là một miếng chữ I. Bảng còn lại là $2 \times 2(n-2)$ nên số cách lát là T_{n-2}.

+) Miếng chữ O: Bảng còn lại là $2 \times (n-1)$ nên số cách lát là T_{n-1}.

+) Miếng chữ L hoặc J: Bảng còn lại có dạng X (hoặc đối xứng của X). Số cách lát trong 2 trường hợp này là bằng nhau và bằng U_{n-1}.

Từ trên suy ra: $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + 2U_{n-1}$. $\quad (*)$

Xét miếng lát ô còn lại ở góc phải của hình X (vàng):

+) Miếng chữ I: Có U_{n-1} cách.

+) Một trong 2 miếng L hoặc J: Có T_{n-2} cách.

Từ trên suy ra: $U_n = U_{n-1} + T_{n-1}$.

Từ $(*)$ ta có: $2(U_n - U_{n-1}) = T_{n+1} - 2T_n + T_{n-2}$.

Kết hợp lại ta có: $T_{n+1} - 2T_n - 2T_{n-1} + T_{n-2} = 0$.

Ta có: $T_1 = 1, T_2 = 4, T_3 = 9$, quy nạp chứng minh được $T_n = (F_{n+1})^2$ với F_n là số Fibonacci thứ n. Do đó, ta có điều phải chứng minh.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 19: Từ các số $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số và chia hết cho 3?

Gọi A_n, Bn, Cn lần lượt là số số tự nhiên có n chữ số lập được từ các số $\{0;\ 1;\ 2\}$ và khi chia cho 3 có số dư theo thứ tự lần lượt là $0;\ 1;\ 2$.
Tiến hành tính giá trị của A_n, ta phân hoạch các số tự nhiên có n chữ số lập từ các số $\{0; 1; 2\}$, chia cho 3 dư 0 làm 3 loại :
+) Các số tự nhiên có tận cùng là 0, khi đó số tạo bởi $n - 1$ chữ số còn lại phải chia hết cho 3, do đó số số tự nhiên có tận cùng là 0 là A_{n-1}.
+) Các số tự nhiên có tận cùng là 1, khi đó số tạo bởi $n - 1$ chữ số còn lại phải chia cho 3 dư 2, do đó số số tự nhiên có tận cùng là 1 là C_{n-1}.
+) Các số tự nhiên có tận cùng là 2, khi đó số tạo bởi $n - 1$ chữ số còn lại phải chia cho 3 dư 1, do đó số số tự nhiên có tận cùng là 2 là B_{n-1}.
Từ việc phân hoạch trên, ta thu được: $A_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}, n \geq 2$.
Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\mathrm{B_n} = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}, n \geq 2$$
$$C_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}, n \geq 2$$
$$\Rightarrow A_n = B_n = C_n$$

Mà số số tự nhiên có n chữ số lập từ $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$ là 2.3^{n-1} nên:

$$A_n + B_n + C_n = 2.3^{n-1}$$

Do vậy, $A_n = 2.3^{n-2}, n \geq 2$.
Còn với $n = 1$, ta có thể lập được 1 số duy nhất là số 0.

Nhận xét

Với những bài mà số tự nhiên có n chữ số như vậy, việc tiếp cận bằng truy hồi giúp ta tiếp cận bài toán dễ dàng hơn. Hướng xét nhiều dãy truy hồi trong nhiều bài toán giúp người làm "giảm gánh nặng" thay vì tập trung tìm công thức tường minh cho một dãy cố định.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 20: Xét một phép biến đổi f sao với một chuỗi nhị phân A, mỗi chữ số 0 trong A biến thành 10; mỗi chữ số 1 biến thành 01. Ví dụ:

$$f(1001) = (01101001)$$

Tìm số cặp chữ số 0 liên tiếp trong $f^{(n)}((1))$ với $f^{(1)}(A) = f(A)$ và $f^{(k+1)}(A) = f(f^{(k)}(A))$.

Đặt $\mathrm{A_n} = f^{(n)}((1))$, b_n là số cặp 00 trong A_n; c_n là số cặp 01 trong A_n. Dễ thấy chữ số cuối cùng trong A_n luôn là 1 nên $b_n + c_n$ là số số 0 trong A_n, cũng tức là 2^{n-1}. Do cách duy nhất để tạo nên cặp 00 liên tiếp trong A_n là trong A_{n-1} phải có cặp 01 liên tiếp, và mỗi cặp 01 liên tiếp trong A_{n-1} ứng với duy nhất 1 cặp 00 liên tiếp trong A_n nên $b_n = c_{n-1}$. Kết hợp với bên trên ta có:

$$b_n + b_{n+1} = 2^{n-1}$$

Mà ta có $b_1 = 0$ nên quy nạp chứng minh được

$b_n = \frac{1}{3}[2^{n-1} + (-1)^n]$, cũng chính là đáp số bài toán.

Nhận xét

Do cách xây dựng dãy A_n cũng như cách xuất hiện cặp 00 liên tiếp nên ta sẽ nghĩ ngay đến việc sử dụng truy hồi, và dãy b_n xuất hiện rất tự nhiên. Nếu bạn đọc không nghĩ được việc xây dựng và xử lý dãy c_n thì cũng có thể lập 4 dãy tương ứng với các cặp 00, 01, 10, 11 vẫn có thể xử lý được mặc dù có phần tốn thời gian hơn.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 21: Tìm số dãy số nguyên $a_1, a_2, \dots, an$ sao cho các số trong dãy đều không lớn hơn 1 và $\sum_{i=1}^{k} a_i$ không âm với mọi k chạy từ 1 đến n.

Đặt $A(m,n)$ là số dãy thỏa đề bài với n phần tử và có tổng của chúng là m.
Dễ thấy $n \leq m$ và $A(n,n) = 1, A(0,0) = 1, A(0,1) = 1$.
Ta có công thức truy hồi sau :

$$A(k,n) = A(k-1,n-1) + A(k,n-1) + \dots + A(n-1,n-1)$$

Giải thích: Với mỗi dãy có n phần tử có tổng là k, xét a_n
Với $a_n = 1$, phần còn lại có $A(k-1,n-1)$ dãy thỏa.
Với $a_n = 0$, phần còn lại có $A(k,n-1)$ dãy thỏa.
Lặp lại với các a_n âm rồi cộng lại, ta có công thức trên.
Ta có thể viết lại công thức là $A(m-1,n) = A(m,n) + A(m-2,n-1)$.
Từ công thức truy hồi ta có thể tính được

$$A(m,n) = C_{2n-m}^{n} - C_{2n-m}^{n+1}$$

Đáp số ta cần tìm chính là

$$\sum_{i=0}^{n} A(i,n) = A(0,n+1) = C_{2n+2}^{n+1} - C_{2n+2}^{n+2} = \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{n+2}$$

Nhận xét

Với việc tổng thành phần luôn không âm thì ta có thể nghĩ đến việc lập dãy truy hồi, tuy nhiên do phần tử cuối a_n không bị chặn nên ta phải tạo thêm một yếu tố về tổng của dãy nhằm cố định a_n lại. Công thức tổng quát như trên được gợi ý bởi hệ thức: $C_{m+1}^{n+1} = mC_{m}^{n+1}$ nhưng cũng khá khó tìm.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 22 (West German Olympiad 1982): Tổng của tất cả các ước dương lẻ lớn nhất của các số nguyên dương $1, 2, 3, \dots, 2^n$ là bao nhiêu ($n \in \mathbb{N}$)?

Gọi a_n là tổng thỏa mãn đề bài. Ta quan sát rằng các số $m < 2^n$ có thể viết dưới dạng $m = 2^l(2k - 1)$ (với $0 \le l \le n - 1$ và $1 \le k \le 2^{n-1-l}$). Ta thấy rằng ước dương lẻ lớn nhất của 2^n chính là 1 nên ta có:

$$a_n = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^{n-1-l}} (2k - 1)$$

$\Rightarrow$ Với mọi $n > 1$, ta có:

$$a_n = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^{n-1-l}} (2k - 1) = 1 + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^{n-1-l}} (2k - 1) + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2k - 1)$$

$$= 1 + \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=1}^{2^{n-2-j}} (2k - 1) + (2^{n-1})^2 = a_{n-1} + 4^{n-1}$$

Kết hợp với $a_0 = 1$, ta có:

$$a_n = \frac{4^n + 2}{3}, \forall n \ge 0.$$

Vậy tổng ban đầu thỏa mãn đề bài là $\frac{4^n + 2}{3}$.

Nhận xét

1. *Bài toán trên là hệ quả của việc ta đánh giá tất cả các ước dương lẻ lớn nhất từ 1 đến 2^n sau đó ta biến đổi đại số và truy hồi theo 4^{n-1}.*
2. *Ta không thể truy hồi trực tiếp bằng việc xét TH do ta phải xét thêm 2^n số mới sinh ra và ta chưa biết hết cấu trúc ước lẻ của tất cả các số đó.*

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 23: Có bao nhiêu số nguyên dương có n chữ số thỏa mãn đồng thời:
i) Tất cả các chữ số của n đều lẻ.
ii) Hiệu của 2 chữ số liên tiếp bằng 2.

Gọi A_n, Bn, Cn, Dn, En lần lượt là số số nguyên dương có n chữ số thỏa mãn 2 điều kiện trên và có tận cùng lần lượt là $1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9$.
Theo điều kiện ii), ta sẽ thu được các đẳng thức sau:
+) $A_n = B_{n-1}$ +) $B_n = A_{n-1} + C_{n-1}$
+) $C_n = B_{n-1} + D_{n-1}$ +) $D_n = C_{n-1} + E_{n-1}$
+) $E_n = D_{n-1}$
Ta có nhận xét khá thú vị: Nếu $|a_i - a_j| = 2$ thì

$$\left|(10 - a_i) - (10 - a_j)\right| = 2 \qquad (*)$$

Do vậy: $A_n = E_n$ và $B_n = D_n$.
Do đó: $C_n = B_{n-1} + D_{n-1} = A_n + E_n = 2A_n$, kéo theo $C_{n-1} = 2A_{n-1}$, do đó: $B_n = 3A_{n-1}$.
Số số tự nhiên có n chữ số thỏa 2 yêu cầu của đề là:

$$A_n + B_n + C_n + D_n + E_n = 4A_n + 2B_n = 4A_n + 6A_{n-1}$$

Với $A_n = B_{n-1} = 3A_{n-2}, n \geq 3$.
Đồng thời: $A_3 = 2$, ta thu được:

$$A_n = 2.3^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}$$

($[x]$ là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x).
Do đó. số số tự nhiên có n chữ số thỏa 2 yêu cầu của đề là:

$$8.3^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} + 6.3^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}, n \geq 3$$

Với $n = 2$, có 8 số thỏa yêu cầu đề bài.
Với $n = 1$, có 5 số thỏa yêu cầu đề bài.

Nhận xét

Bài toán trên vẫn được giải quyết trên tinh thần của truy hồi nhiều dãy, tuy nhiên, điểm thú vị của bài toán chính là nhận xét (*), trong nhiều bài toán truy hồi, nên có những nhân xét như vậy để tránh bị nhầm lẫn khi giải nhiều dãy cùng lúc.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 24 (China MO 1989): Có thể nào chia được 1989 điểm thành 30 nhóm có cỡ của các nhóm đó không bằng nhau để cho số các tập hợp gồm 3 điểm mà mỗi điểm được chọn từ 3 nhóm khác nhau là lớn nhất.

Giả sử các cỡ của 30 nhóm là: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{30}$.

Ta sẽ gọi nhóm có cỡ a_k vắn tắt là nhóm k.

Giả sử $a_k < a_{k+1} - 3$.

Khi đó xét việc thay a_k bởi a_{k+1} và a_{k+1} bởi $a_{k+1} - 1$ ta vẫn còn được các nhóm có cỡ không bằng nhau. Số tất cả các bộ ba mà không có phần tử nào thuộc nhóm k hoặc $k + 1$ thì không bị ảnh hưởng, chỉ có các bộ ba có đúng một phần tử thuộc nhóm k hoặc $k + 1$ bị. Nhưng số các bộ ba có đúng một phần tử thuộc nhóm k và một phần tử thuộc nhóm $k + 1$ tăng lên, bởi vì $a_k.a_{k+1} < (a_k + 1)(a_{k-1} - 1)$

Như thế khoảng trống lớn nhất là 2.

Giả sử có hai khoảng trống độ dài là 2. Ta giả sử $a_j + 1 < a_{j+1} < a_k < a_{k+1} - 1$.

Bây giờ ta có thể thay a_j và a_{k+1} bởi $a_{j+1} + 1$ và $a_{k+1} - 1$.

Lập luận giống như trước số các bộ ba cũng tăng lên. Vậy có nhiều lắm là hai khoảng trống độ dài 2. Điều này chỉ đủ cho ta xác định các cỡ. Giả sử các cỡ tạo thành một dãy đơn giản có tất cả các khoảng trống bằng 1. Nếu thành phần đầu tiên là n thì thành phần sau cùng là $n + 29$ và tổng là $\frac{30(2n + 29)}{2}$.

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Nhưng tổng này không thể bằng 1989 vì 1989 không là bội của 5.

Do đó ta giả sử các cỡ tạo thành một dãy đơn giản có tất cả các khoảng trống bằng 1. ngoại trừ một thành phần bị bỏ qua, để có một khoảng trống bằng 2. Nếu thành phần đầu tiên là v và thành phần bị bỏ qua là m thì ta có:

$$\frac{30(2n + 29)}{2} - m = 1989$$

Nếu $n \leq 50$ thì $m \leq 2015 - 1989 = 26$, số này quá nhỏ vì ta phải có m giữa n và $n + 30$.

Nếu $n \geq 52$ thì $m \geq 2077 - 1989 = 88$, số này quá lớn.

Vậy $n = 51$ và $m = 57$.

Suy ra các cỡ là: $51, 52, 56, 58, 59, 60, \ldots 81$.

Nhận xét

Bài toán này tương đối lạ và khó so với các bài truy hồi trước, chúng ta đánh giá về khoảng cách của các nhóm. Nhưng ta thấy bản chất bài toán là ***thay đổi vài phần tử nhưng các phần tử còn lại vẫn giữ tính chất ban đầu****, đó là bản chất của việc truy hồi, xét riêng lẻ vài phần tử và dùng các kết quả trước đó để xử lí bài toán.*

III Lời giải tham khảo và nhận xét

Bài 25: Từ các số $1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số sao cho trong mỗi số đó đều chứa một số lẻ các chữ số 1 và một số chẵn các chữ số 2 (n là một số nguyên dương cho trước).

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu M_n là tập tất cả các số tự nhiên có n chữ số được lập từ các số $1, 2, 3, 4, 5$, và A_n; Bn; Cn; D_n là tập các số tự nhiên có n chữ số được lập từ các số $1, 2, 3, 4, 5$ theo tứ tự chứa một số lẻ các chữ số 1 và chẵn các chữ số 2, chứa một số lẻ các chữ số 1 và lẻ các chữ số 2, chứa một số chẵn các chữ số 1 và chẵn các chữ số 2, chứa một số chẵn các chữ số 1 và lẻ các chữ số 2.

Dễ thấy A_n; Bn; Cn; D_n đôi một rời nhau; $M_n = A_n \cup B_n \cup C_n \cup D_n$.

$|Mn| = |An| + |Bn| + |Cn| + |Dn| = 5^n$ và $|An| = |Dn|$.

Lấy một phần tử của M_{n+1}, bỏ đi phần tử cuối ta được một phần tử của M_n, ngược lại ta xét cách thêm 1 số vào M_n:

Nếu dãy là A_n thì có 3 (3, 4, 5) cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của A_{n+1}.

Nếu dãy là B_n thì có 1 (2) cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của A_{n+1}.

Nếu dãy là C_n thì có 1 (1) cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của A_{n+1}.

Nếu dãy là D_n thì có không có cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của A_{n+1}.

Vậy $|A_{n+1}| = 3|An| + |Bn| + |Cn| = 2|An| + |Bn| + |Cn| + |Dn| = |An| + 5^n$

Mà $|A_1| = 1$

Nên $|An| = \frac{5^n - 1}{4}$.

Nhận xét

Bài toán chỉ ở tầm trung, không mấy khó khăn khi tìm ra dãy truy hồi nhưng mấu chốt bài toán là nhận ra $|An| = |Dn|$.

IV Tài liệu tham khảo

[1] *Yao Zhang*, Mathematical Olympiad Series Vol. 4: Combinatorial Problems and Mathematical Competition.

[2] Thầy *Lê Anh Vinh*, Định hướng bồi dưỡng học sinh năng khiếu toán (Tập 4: Tổ hợp)

[3] https://mathltv.violet.vn/entry/show/entry_id/10264938

[4] https://artofproblemsolving.com/

[5] Tham khảo tài liệu của một số thầy cô khác.

[6] bit.ly/tgb_truyhoi

Các bạn bấm vào link này để nhận một phần quà từ Ban Toán – TGB nhé!

https://forms.gle/ypohRev7g1qtZhLj7