

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

Đề thi thử

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)

Ngày làm bài thi: **19/4/2026**

Hướng dẫn chấm thi gồm 06 trang

I. Hướng dẫn chung

- Giám khảo chấm đúng theo Hướng dẫn chấm của Dự án Chicken Minds – Tổ chức The Gifted Battlefield.
- Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
- Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. Đáp án và biểu điểm

Bài 1. (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình sau trên tập số thực: $x - 7 + 2\sqrt{3x - 17} = (x - 5)^2$.
- b) Cho a là số thực dương thỏa mãn $a^4 = 3(9a^2 - 2a + 12)$. Chứng minh rằng phương trình $3x^2 + 2ax + 3a^2 - 72 = 0$ không có nghiệm thực.

Câu	Hướng dẫn	Điểm
a	Giải phương trình sau trên tập số thực: $x - 7 + 2\sqrt{3x - 17} = (x - 5)^2$.	1,0
	Điều kiện xác định: $x \geq \frac{17}{3}$.	0,25
	Cách 1. Phương trình ban đầu tương đương $2\sqrt{3x - 17} = x^2 - 11x + 32.$ Bình phương hai vế, ta thu được $4(3x - 17) = (x^2 - 11x + 32)^2 \iff x^4 - 22x^3 + 185x^2 - 716x + 1092 = 0$ $\iff (x - 6)(x - 7)(x^2 - 9x + 26) = 0.$	0,25
	Phương trình $x^2 - 9x + 26 = 0$ không có nghiệm thực vì $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 26 < 0$. Do đó $x = 6$ hoặc $x = 7$.	0,25
	Cách 2. Phương trình ban đầu tương đương $(x - 5)^2 - (3x - 17) + 2(x - 5 - \sqrt{3x - 17}) = 0.$ Đặt $a = x - 5$, $b = \sqrt{3x - 17}$. Khi đó $a^2 - b^2 + 2(a - b) = 0 \iff (a - b)(a + b + 2) = 0.$ Do đó $a = b$ hoặc $a + b + 2 = 0$.	0,25

	- Trường hợp 1: $a = b$. Khi đó $x - 5 = \sqrt{3x - 17}$, suy ra $x^2 - 13x + 42 = 0 \iff (x - 6)(x - 7) = 0$. Do đó $x = 6$ hoặc $x = 7$. - Trường hợp 2: $a + b + 2 = 0$. Khi đó $x + 3 + \sqrt{3x - 17} = 0$. Vì $x \geq \frac{17}{3}$ nên vế trái của phương trình lớn hơn 0, mâu thuẫn. Vì vậy phương trình thu được ở trường hợp này vô nghiệm.	0,25
	Thử lại, đây là các nghiệm của phương trình. Do đó phương trình có tập nghiệm $\{6, 7\}$.	0,25
b	Cho a là số thực dương thỏa mãn $a^4 = 3(9a^2 - 2a + 12)$. Chứng minh rằng phương trình $3x^2 + 2ax + 3a^2 - 72 = 0$ không có nghiệm thực.	1,0
	Giả sử $a \leq 3\sqrt{3} < 6$. Khi đó $a^2 < 27$.	0,25
	Mặt khác $a^4 \leq 27a^2 \iff 27a^2 - 6a + 36 \leq 27a^2 \iff a \geq 6 \quad (\text{vô lí}).$ Mâu thuẫn cho ta $a > 3\sqrt{3}$.	0,25
	Suy ra $\Delta = (2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (3a^2 - 72) = -32(a^2 - 27) < 0.$ Thành thử, phương trình không có nghiệm thực.	0,5

Bài 2. (2,0 điểm)

- a) Một trang trại chuyên canh sầu riêng xuất khẩu xác định sản lượng thu hoạch mỗi tháng là x (tấn). Tổng chi phí sản xuất và vận chuyển được tính bằng công thức $C(x) = 100 + 2x$ (triệu đồng). Khi cung ứng x tấn sản phẩm ra thị trường, đơn giá bán mỗi tấn sầu riêng được ấn định ở mức $P(x) = 50 - x$ (triệu đồng/tấn). Hãy xác định giá trị của x để lợi nhuận thu được hàng tháng đạt mức tối đa.

- b) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2$$

Câu	Hướng dẫn	Điểm
a	Một trang trại chuyên canh sầu riêng xuất khẩu xác định sản lượng thu hoạch mỗi tháng là x (tấn). Tổng chi phí sản xuất và vận chuyển được tính bằng công thức $C(x) = 100 + 2x$ (triệu đồng). Khi cung ứng x tấn sản phẩm ra thị trường, đơn giá bán mỗi tấn sầu riêng được ấn định ở mức $P(x) = 50 - x$ (triệu đồng/tấn). Hãy xác định giá trị của x để lợi nhuận thu được hàng tháng đạt mức tối đa.	1,0
	Doanh thu hàng tháng của trang trại được tính theo công thức $R(x) = x \cdot P(x) = x(50 - x) = -x^2 + 50x$.	0,25
	Khi đó, hàm lợi nhuận $L(x)$ được xác định bằng hiệu giữa doanh thu và chi phí sản xuất: $L(x) = R(x) - C(x) = (-x^2 + 50x) - (100 + 2x) = -x^2 + 48x - 100$ $L(x) = -(x - 24)^2 + 476 \leq 476$	0,5
	Khi đó, giá trị lợi nhuận cực đại đạt được là $L(24) = -(24)^2 + 48(24) - 100 = 476$ (triệu đồng). Vậy để đạt được lợi nhuận cao nhất, trang trại cần duy trì sản lượng thu hoạch ở mức 24 tấn mỗi tháng.	0,25
b	Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2$	1,0
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có: $(a + b + c)^2 \leq (a^2 + 2) \left[1 + \frac{(b + c)^2}{2} \right]$	0,5
	Ta cần chứng minh: $(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3 + \frac{3}{2}(b + c)^2$ $\Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2b^2c^2 + 2 \geq 6bc$ $\Leftrightarrow (b - c)^2 + 2(bc - 1)^2 \geq 0$ Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.	0,5

Bài 3. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp $(O; R)$. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa cung BC nhỏ và cung BC lớn. Gọi P là trung điểm BC . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- a) Chứng minh $MI^2 = MP \cdot MN$.
- b) Qua N , kẻ đường thẳng vuông với AI cắt BC tại H ; kẻ đường thẳng vuông góc với IH cắt AI tại K . Chứng minh rằng M là trung điểm IK .



Câu	Hướng dẫn	Điểm
a	Chứng minh $MI^2 = MP \cdot MN$.	1,5
	Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác góc BAC . Lại có M là điểm chính giữa cung nhỏ BC , do đó AM cũng là phân giác góc BAC . Suy ra A, I, M thẳng hàng.	0,5
	Ta có biến đổi góc $\angle MBI = \angle MBC + \angle IBC = \angle MAC + \angle IBA = \angle BAI + \angle IBA = \angle BIM.$ Suy ra tam giác BMI cân tại M và $MB = MI$.	0,5
	Ta có $\angle BPM = \angle MBN = 90^\circ$, và $\angle MBP = \angle MNC = \angle MNB$. Do đó $\triangle MBP \sim \triangle MNB$, suy ra $MI^2 = MB^2 = MP \cdot MN$.	0,5
b	Qua N, kẻ đường thẳng vuông với AI cắt BC tại H; kẻ đường thẳng vuông góc với IH cắt AI tại K. Chứng minh rằng M là trung điểm IK.	1,5
	Gọi K' là điểm đối xứng với I qua M . Gọi L là hình chiếu của H lên NK' . Dễ thấy H, A, N thẳng hàng. $NHPL$ và $HALK'$ là các tứ giác nội tiếp.	0,5
	Suy ra $\angle NML = \angle NHL = \angle NK'M$. Nên $MPK'L$ cũng là tứ giác nội tiếp. Kéo theo $\angle MPK' = \angle MLK'$. Mà $MK'^2 = MI^2 = MP \cdot MN$, nên $\triangle MPK' \sim \triangle MK'N$ (c - g - c). Kéo theo $MPK' = MK'N$.	0,5
	Vậy $\angle MLK' = \angle MK'L$, nên $ML = MK'$, suy ra L thuộc đường tròn đường kính IK' nên L cũng là hình chiếu của I lên NK' . Tức H, I, L thẳng hàng. Vậy NK, NK' cùng vuông góc với HI , nên K trùng K' , thu được điều phải chứng minh.	0,5

Bài 4. (1,5 điểm)

Với mỗi số nguyên dương n , xét phương trình $x^n + (x + 2)^n + (2 - x)^n = 0$. (*)

- a) Giả sử tồn tại số nguyên dương n và số nguyên x sao cho phương trình (*) đúng. Chứng minh rằng n lẻ và $x < 0$.
- b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn (*).

Câu	Hướng dẫn	Điểm
a	Giả sử tồn tại số nguyên dương n và số nguyên x sao cho phương trình (*) đúng. Chứng minh rằng n lẻ và $x < 0$.	0,5
	Dễ thấy $x = -4$ là nghiệm đầu tiên của (*) khi ta thay $n = 1$. Với n chẵn, suy ra $x = x + 2 = 2 - x = 0$ (vô lí). Từ đó, dẫn đến n lẻ.	0,25
	Giả sử n lẻ và n lớn hơn 1. Nếu x nguyên dương, ta dễ dàng chứng minh được $x + 2 > 2 - x$, suy ra $(x + 2)^n > (2 - x)^n$ hay (*) > 0 (mâu thuẫn). Từ đây ta có được x là số nguyên không dương.	0,25
b	Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn (*).	1,0
	Tuy vậy khi thay $x = 0$ và $x = -1$ thì ta được 2 phương trình tương ứng là $2^{n+1} = 0$ và $(-1)^n + 1^n + 3^n = 3^n = 0$ đều vô nghiệm. Như vậy, $x < -1$. Đặt $y = -x > 1$ và biến (*) thành: $(y + 2)^n - (y - 2)^n = y^n \Rightarrow (y + 2 - y + 2) = 4 y^n \quad (1)$ $\Rightarrow y^n$ chia hết cho 4 hay y chia hết cho 2.	0,25
	Đặt $y = 2t$. Từ đây lại có: $(2t + 2)^n - (2t - 2)^n = (2t)^n \Rightarrow (t + 1)^n - (t - 1)^n = t^n \quad (2)$ Đặt $a = t + 1$ và $b = t - 1$. Phương trình trên sẽ trở thành: $a^n - b^n = t^n \Rightarrow (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = t^n \quad (3)$ hay $2(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = t^n \Rightarrow 2 t \quad (4)$ $\Rightarrow t + 1$ và $t - 1$ là các số lẻ.	0,5
	Mặt khác: $(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ có n số hạng mà mỗi số hạng đều là các số lẻ (do a và b đều là số lẻ) dẫn đến tổng này lẻ. Tuy vậy, t chia hết cho 2 và $n > 2$ nên t^n chia hết cho 4, suy ra $(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ chia hết cho 2 (mâu thuẫn). Vậy điều giả sử sai hay $(x, n) = (-4, 1)$ là nghiệm duy nhất của (*).	0,25

Bài 5. (1,5 điểm)

- a) Cho S là tập hợp các số nguyên m thỏa mãn $|m| \leq 50$. Chọn ngẫu nhiên một số m thuộc S . Tính xác suất để phương trình $x^2 - (m+3)x + m^2 - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm nguyên.
- b) Một bộ số (a, b, c, d, e) gồm 5 số nguyên dương được gọi là bộ *tổng hiệu* của số tự nhiên n nếu với mọi số nguyên k ($1 \leq k \leq n$), ta có thể biểu diễn k dưới dạng $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c + \varepsilon_4 d + \varepsilon_5 e$, trong đó $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ ($1 \leq i \leq 5$). Hãy tìm một bộ số để n đạt giá trị lớn nhất.

Câu	Hướng dẫn	Điểm
a	Cho S là tập hợp các số nguyên m thỏa mãn $m \leq 50$. Chọn ngẫu nhiên một số m thuộc S. Tính xác suất để phương trình $x^2 - (m+3)x + m^2 - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm nguyên.	1,0
	Trước hết, tập hợp S các số nguyên m thỏa mãn $ m \leq 50$ bao gồm các số từ -50 đến 50 . Do đó, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 50 - (-50) + 1 = 101$.	0,25
	Tiếp theo, xét phương trình bậc hai $x^2 - (m+3)x + m^2 - 3 = 0$ với ẩn x và tham số m . Để phương trình này có ít nhất một nghiệm nguyên, điều kiện cần và đủ là biệt thức Δ phải là một số chính phương (đặt là k^2 với $k \in \mathbb{N}$). Ta có: $\Delta = [-(m+3)]^2 - 4(1)(m^2 - 3) = m^2 + 6m + 9 - 4m^2 + 12 = -3m^2 + 6m + 21$ Điều kiện để tồn tại nghiệm thực là $\Delta \geq 0$, tương đương với $-3m^2 + 6m + 21 \geq 0$. Chia cả hai vế cho -3 (và đổi chiều bất phương trình), ta được $m^2 - 2m - 7 \leq 0$.	0,25
	Giải bất phương trình bậc hai này, ta tìm được nghiệm xấp xỉ là $1 - 2\sqrt{2} \leq m \leq 1 + 2\sqrt{2}$, hay $-1,82 \leq m \leq 3,82$. Vì m phải là số nguyên, các giá trị khả thi duy nhất của m chỉ có thể nằm trong tập $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Ta tiến hành thử trực tiếp từng giá trị: Với $m = -1$, $\Delta = -3(-1)^2 + 6(-1) + 21 = 12$ (không là số chính phương). Với $m = 0$, $\Delta = 21$ (không là số chính phương). Với $m = 1$, $\Delta = 24$ (không là số chính phương). Với $m = 2$, $\Delta = 21$ (không là số chính phương). Với $m = 3$, $\Delta = 12$ (không là số chính phương). Vì không có giá trị nào của m làm cho Δ trở thành số chính phương, phương trình ban đầu không bao giờ có nghiệm nguyên với mọi $m \in S$. Vậy số kết quả thuận lợi là 0, dẫn đến xác suất cần tìm là $P = \frac{0}{101} = 0$.	0,5
b	Một bộ số (a, b, c, d, e) gồm 5 số nguyên dương được gọi là bộ tổng hiệu của số tự nhiên n nếu với mọi số nguyên k ($1 \leq k \leq n$), ta có thể biểu diễn k dưới dạng $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c + \varepsilon_4 d + \varepsilon_5 e$, trong đó $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ ($1 \leq i \leq 5$). Hãy tìm một bộ số để n đạt giá trị lớn nhất.	0,5
	Xét các bộ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) \in \{-1, 0, 1\}^5$. Ta có tổng cộng $3^5 = 243$ bộ số khác nhau. Tuy nhiên bộ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ không thỏa. Do đó, chúng ta còn có 242 bộ. Với mỗi bộ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ trong các bộ thỏa mãn, ta ghép với $(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3, -\varepsilon_4, -\varepsilon_5)$. Lúc này có 121 cặp như vậy, tuy nhiên chỉ có tối đa 1 trong 2 số $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c + \varepsilon_4 d + \varepsilon_5 e$ và $-\varepsilon_1 a - \varepsilon_2 b - \varepsilon_3 c - \varepsilon_4 d - \varepsilon_5 e$ là số nguyên dương. Vì các cặp số (ε_i) sinh các số nguyên dương từ 1 đến n , nên $n \leq 121$.	0,25
	Xét $(a, b, c, d, e) = (1, 3, 9, 27, 81)$. Do 1, 3, 9 lập được tất cả số từ 1 đến 13 nên 1, 3, 9, 27 lập được tất cả số từ 1 đến 40 (do 27 +- các số lập từ 1, 3, 9). Tương tự 1, 3, 9, 27, 81 lập được tất cả các số từ 1 đến 121. Vậy $(a, b, c, d, e) = (1, 3, 9, 27, 81)$ thỏa điều kiện đề bài.	0,25

– HẾT –