Chuyên đề

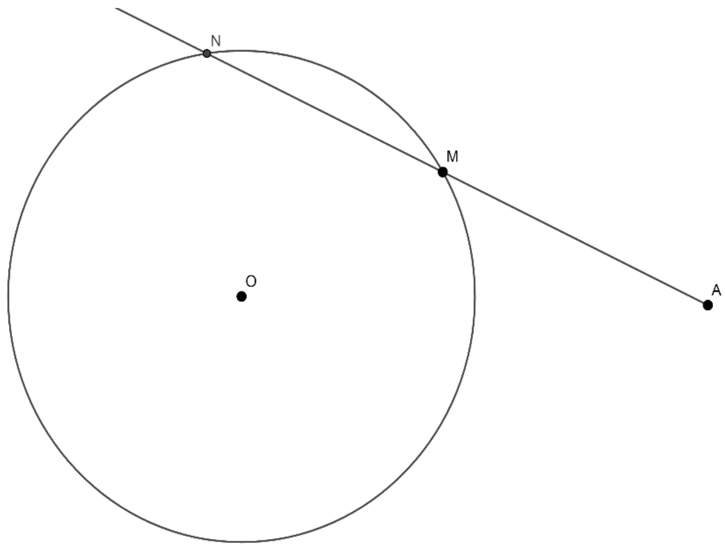
Phương tích
Trục đẳng phương
Tâm đẳng phương

Nhóm Toán - Ban Chuyên môn
The Gifted Battlefield

CHUYÊN ĐỀ

PHƯƠNG TÍCH – TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG – TÂM ĐẲNG PHƯƠNG

1. Phương tích



- Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định. Đặt $OA = d$. Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại M, N. Khi đó: $\overline{AM}.\overline{AN} = d^2 - R^2$ được gọi là phương tích của điểm A đối với đường tròn $(O;R)$, kí hiệu là $P_{A/(O)}$.

Tính chất 1: *Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm ngoài (O). Từ P kẻ một cát tuyến PDE bất kì và tiếp tuyến PT tới (O) thì $P_{P/(O)} = \overline{PD}.\overline{PE} = PT^2$.*

Tính chất 2: *Cho hai đường thẳng AB và CD không trùng nhau và cắt nhau tại P thì 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$.*

Tính chất 3: *Cho AB là một đường kính bất kì của đường tròn (O), điểm P tùy ý. Khi đó: $P_{P/(O)} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$.*

Bổ đề cơ bản: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại AB. Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (O'). Khi đó, AB qua trung điểm CD. (Chứng minh dành cho bạn đọc)

Ghi chú: Để chứng minh hai điểm cách đều tâm của 1 đường tròn, ta có thể chứng minh phương tích của 2 điểm đó đến đường tròn bằng nhau.

Ví dụ 1: ***(IMO 2009)*** Cho ABC là một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp O. Các điểm P, Q nằm trên các cạnh AB, AC tương ứng. Gọi K, L, M lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BP, CQ, PQ và (T) là đường tròn đi qua ba điểm K, L, M. Chứng minh rằng nếu PQ là tiếp tuyến của đường tròn (T) thì $OP = OQ$.

Ví dụ 2: ***(Iran 2010)*** Cho đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại D, P. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài AB của (O) và (O') (A thuộc (O) và B thuộc (O'), D gần AB hơn so với P). AD cắt (O') tại C và M là trung điểm BC. Chứng minh: $\angle DPM = \angle BDC$.

Bài tập có lời giải:

Bài 1: ***(Hệ thức Ơ-le)*** Cho tam giác ABC nội tiếp (O, R) ngoại tiếp (I, r). Chứng minh rằng: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Bài 2: Cho tam giác ABC có BC cố định, A di động, trực tâm H, AH cắt (O) tại S, đường tròn đường kính AH cắt (O) tại E, AE cắt BC tại L. Cm: (ALS) đi qua điểm cố định.

Bài 3: Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. OT cắt (O) tại K, N phân biệt (N nằm ở cung BAC). BC cắt AK, AT tại D, X. NX cắt (O) tại Y khác N. YD cắt (O) tại A' khác Y. Chứng minh $AA' \parallel BC$.

Bài 4: ***(IMO 2012)*** Cho tam giác ABC vuông tại C và D là hình chiếu của C lên AB. X là một điểm trên đoạn CD và K, L nằm trên AX, BX sao cho $BK = BC$ và $AL = AC$. Gọi M là giao điểm của AL và BK. Chứng minh rằng $MK = ML$.

Bài tập rèn luyện:

Bài 1: Cho tam giác ABC cân tại B nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại D. Gọi E là giao của CD và (O). Chứng minh rằng: AE qua trung điểm BD.

Bài 2: ***(Balkan Shortlist 2003)*** Cho đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ tiếp xúc ngoài nhau $(R_2 > R_1)$. Tiếp tuyến chung ngoài d_1 của (O_1) và (O_2) tiếp xúc (O_1) tại A và (O_2) tại D. Một tiếp tuyến d_2 của (O_1) song song với d_1 cắt (O_2) tại E, F. Một đường thẳng bất kì qua D cắt EF tại B và (O_2) tại C. Chứng minh rằng: d_1 tiếp xúc với (ABC).

Ghi chú: Ta có thể áp dụng **Định lý Bốn Điểm** để chứng minh hai đường thẳng vuông góc. Phát biểu như sau: $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$. Định lý bốn điểm là một định lý mạnh thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi, Olympic… Thông thường, có hai cách để sử dụng định lý bốn điểm.

Cách 1: Biến đổi bình phương, kết hợp với định lý Pytago.

Cách 2: Kết hợp với phương tích: $P_{P/(O)} = OP^2 - R^2$.

Ngoài ra, chúng tôi muốn đề cập tới một bổ đề và công cụ khá mạnh và đẹp, nhưng trong chuyên đề này thì chúng tôi sẽ không đi sâu vào chúng. Phát biểu như sau:

Định lý Carnot: *Cho ΔABC và 3 điểm D, E, F bất kì. Gọi $d(X, YZ)$ là đường thẳng qua X vuông góc YZ. Khi đó: $d(D, BC), d(E, AC), d(F, AB)$ đồng quy $\Leftrightarrow DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$.*

Bổ đề về cực trực giao: *Cho ΔABC và một đường thẳng d bất kỳ. Gọi D, E, F là 3 chân đường cao của A, B, C lên đường thẳng d. Khi đó, $d(D, BC), d(E, AC), d(F, AB)$ đồng quy tại một điểm được gọi là cực trực giao của đường thẳng d đối với ΔABC.*

(Bạn đọc có thể chứng minh dựa trên định lý vừa nêu)

Ví dụ 3: Cho tứ giác lồi $ABCD$ thỏa $AB = AD$ và $\angle ABC = \angle CDA = 90^0$. Điểm F và E nằm trên đường thẳng BC và CD tương ứng sao cho DF vuông góc với AE. Chứng minh rằng AF vuông góc với BE.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Điểm P trên phân giác góc BAC. Các đường tròn $(PAB), (PAC)$ cắt CA, BA tại E, F khác A. Chứng minh PO vuông góc EF.

Bài tập có lời giải:

Bài 1: Cho tam giác ABC có trực tâm H. Điểm P nằm trong tam giác ABC. L, M, N là chân đường vuông góc kẻ từ H xuống PA, PB, PC. X, Y, Z là giao điểm của HL, HM, HN với BC, CA, AB. Chứng minh X, Y, Z thẳng hàng.

Bài 2: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). AD cắt BC tại P, AC cắt BD tại Q. Chứng minh rằng $P_{P/(O)} + P_{Q/(O)} = PQ^2$.

Bài 3: ***(USA 2016)*** Cho tam giác nhọn ABC. Gọi I_B, I_C, O lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, Gọi E, Y lần lượt là chân đường cao, chân đường phân giác trong đỉnh B của tam giác ABC. Gọi F, X lần lượt là chân đường cao, chân đường phân giác trong đỉnh C của tam giác ABC. Đường thẳng I_BF cắt đường thẳng I_CE tại P. Chứng minh OP vuông góc XY.

Bài 4: ***(MTC 2021)*** Cho ΔABC nội tiếp (O) và điểm J trên cạnh BC. Đường tròn $(J; JA)$ cắt BC tại S_1, S_2. Đường thẳng qua S_1, S_2 vuông góc AS_1, AS_2 cắt AB, AC tại N_1, P_1 và N_2, P_2. Gọi S là giao điểm của (AN_1P_1) và (AN_2P_2). Chứng minh rằng trung điểm D của AS thuộc (BOC).

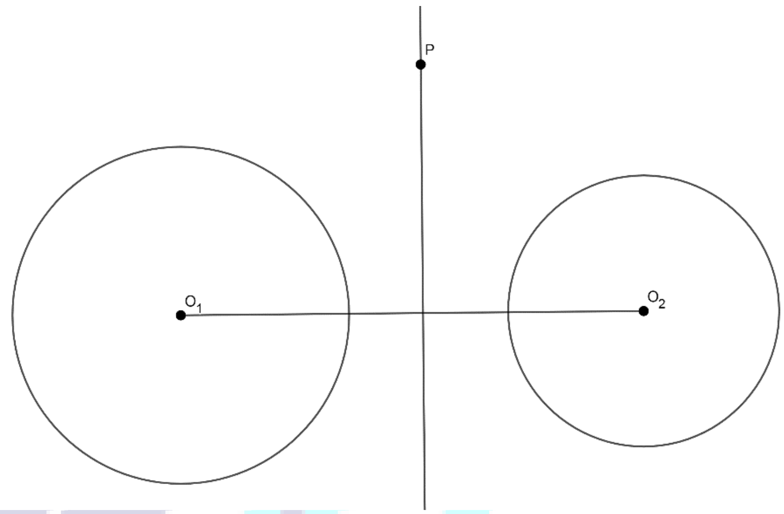
Bài tập rèn luyện:

Bài 1: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), đường kính BK. Trên các tia đối của tia BA, BC lấy M, N sao cho $AM = CN = p$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh $KI \perp MN$.

Bài 2: ***(China 2001)*** Cho ΔABC nhọn, O là tâm (ABC) và ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của ED với AB và FD với AC. Chứng minh rằng $OB \perp DF, OC \perp DE$ và $OH \perp MN$.

II. Trục đẳng phương

Cho hai đường tròn không đồng tâm (O_1) và (O_2). Tập hợp các điểm P có phương tích đối với hai đường tròn bằng nhau là một đường thẳng, đường thẳng này được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1) và (O_2).



<u>Phương pháp xác định trục đẳng phương của hai đường tròn:</u>

+) Hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó, AB là trục đẳng phương của hai đường tròn.

+) Hai đường tròn tiếp xúc nhau tại T. Khi đó, tiếp tuyến chung tại T chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

+) Hai đường tròn không có điểm chung. Dựng đường tròn (O_3) cắt cả hai đường tròn (O_1, O_2, O_3 không thẳng hàng). Trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O_1) và (O_3); (O_2) và (O_3) cắt nhau tại K. Đường thẳng qua K vuông góc O_1O_2 là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) (K còn được gọi là tâm đẳng phương của ba đường tròn).

+) $R_2 = 0$. Nếu O_2 nằm ngoài (O_1), kẻ tiếp tuyến O_2A và O_2B đến (O_1). Khi đó, đường trung bình tam giác O_2AB là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) (Đường tròn (O_2) được gọi là đường tròn điểm). Nếu O_2 nằm trong (O_1), kẻ đường thẳng qua O_2 vuông góc O_1O_2 cắt (O_1) tại M, N. Tiếp tuyến tại M, N của (O_1) cắt nhau tại B. Khi đó, trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) là đường thẳng nối trung điểm BM và BN.

Tính chất 1: *Trục đẳng phương của hai đường tròn vuông góc với đường nối tâm của hai đường tròn đó.*

Tính chất 2: *Trục đẳng phương của $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt O_1O_2 tại H; I là trung điểm O_1O_2. Khi đó:*

$$\overline{IH} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\overline{O_1O_2}}$$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có trực tâm H và trọng tâm G. BH cắt AC tại E, CH cắt AB tại F, BG cắt AC tại M, CG cắt AB tại N, EF cắt MN tại D. Chứng minh $AD \perp HG$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC nhọn, M là trung điểm đoạn thẳng BC và E, F lần lượt là chân đường cao từ B và C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của ME, MF. Gọi T là điểm trên KL sao cho $TA \parallel BC$. Chứng minh rằng $TA = TM$.

Bài tập có lời giải:

Bài 1: Cho ΔABC nội tiếp (O), các đường cao AA', BB', CC' giao nhau tại H. E là trung điểm OH. $A'B'$ cắt CH tại X, $A'C'$ giao BH tại Y. Chứng minh rằng $AE \perp XY$.

Bài 2: Cho ΔABC nội tiếp (O), có AD là đường cao, M là trung điểm BC. OD cắt AM tại P. Chứng minh rằng P thuộc trục đẳng phương của đường tròn Euler ΔABC và (OBC).

Bài 3: Cho ΔABC với K là 1 điểm nằm trên trung trực BC. (K)đi qua A cắt CA, AB tại E, F khác A. Gọi M là trung điểm BC. ME, MF cắt (K) tại Q, P khác E, F. Chứng minh PQ, BC và tiếp tuyến tại A của (K) đồng quy.

Bài 4: Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle A = \angle B = \angle C$. Chứng minh D nằm trên đường thẳng Euler của ΔABC.

Bài 5: ***(Ngô Quang Dương)*** Cho ΔABC nội tiếp (O), và l là một đường thẳng bất kì. D, E, F là chân đường vuông góc kẻ từ A, B, C xuống l. l_a là trục đẳng phương của (ABE), (ACF), l_b là trục đẳng phương của $(BAD), (BCF)$, và l_c là trục đẳng phương của $(CBE), (CAD)$. Chứng minh rằng l_a, l_b, l_c đồng quy.

Bài 6: ***(China MO 2009)*** Cho ΔABC và $D \in BC$ sao cho $\angle CAD = \angle ABC$. (O) là một đường tròn bất kì cắt đoạn AB, AD tại E, F. Gọi $G = BF \cap DE$, M là trung điểm AG. Chứng minh rằng $CM \perp AO$.

Bài 7: ***(IGO 2020)*** Cho tam giác ABC. Đường tròn bất kỳ tâm J đi qua B, C cắt cạnh AC, AB lần lượt tại E, F. Gọi X là điểm sao cho $\Delta XBF \sim \Delta JCE$ (X, C cùng phía so với AB), gọi Y là điểm sao cho $\Delta JBF \sim \Delta YCE$ (Y, B cùng phía so với AC). Chứng minh rằng đường thẳng XY luôn đi qua trực tâm tam giác ABC.

Bài 8: Cho tam giác ABC có trực tâm H và trọng tâm G. BH cắt AC tại E, CH cắt AB tại F, BG cắt AC tại M, CG cắt AB tại N, EF cắt MN tại D. Chứng minh $AD \perp HG$.

Bài 9: Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC. Đường thẳng qua M vuông góc với phân giác trong $\angle BAC$ cắt AB tại K. Tính AK theo AB, AC.

Bài 10: Cho ΔABC có trực tâm H. Đường tròn đi qua B, C cắt AB, AC tại D, E. Gọi F là trực tâm tam giác ADE và I là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng I, H, F thẳng hàng.

Bài 11: ***(PTNK 2015)*** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn tâm I qua B, C lần lượt cắt AB, AC tại E, F.

a) Giả sử hai tia BF, CE cắt nhau tại D, T là tâm (AEF). Chứng minh rằng $OT \parallel ID$.

b) Trên BF, CE lần lượt lấy G, H sao cho $AG \perp CE$ và $AH \perp BF$. Các đường tròn $(ABF), (ACE)$ cắt BC tại M, N khác B, C và cắt EF tại P, Q khác E, F. K là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh $DK \perp GH$.

Bài 12: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. K là một điểm tùy ý trên cạnh BC sao cho $K \neq B, C$. Kẻ đường kính KP của đường tròn ngoại tiếp tam giác KBF và đường kính KQ của đường tròn ngoại tiếp tam giác KCE. Chứng minh rằng P, H, Q thẳng hàng.

Bài 13: ***(VMO 2014)*** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), trong đó B, C cố định và A thay đổi trên (O). Trên tia AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $MA = MC$ và $NA = NB$. Các đường tròn (AMN) và (ABC) cắt nhau tại P $(P \neq A)$. Đường thẳng MN cắt đường BC thẳng tại Q.

a) Chứng minh rằng A, P, Q thẳng hàng.

b) D là trung điểm BC. Các đường tròn $(M, MA), (N, NA)$ cắt nhau tại $K (K \neq A)$. Đường thẳng qua A vuông góc với AK cắt BC tại E. Đường tròn (ADE) cắt (O) tại $F (F \neq A)$. Chứng minh rằng đường thẳng AF đi qua một điểm cố định.

Bài 14: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), D là trung điểm BC, AD cắt (O) tại E. Tiếp tuyến tại E của (O) cắt đường thẳng qua D và vuông góc với AO tại X. Y, Z được xác định tương tự. Chứng minh X, Y, Z thẳng hàng.

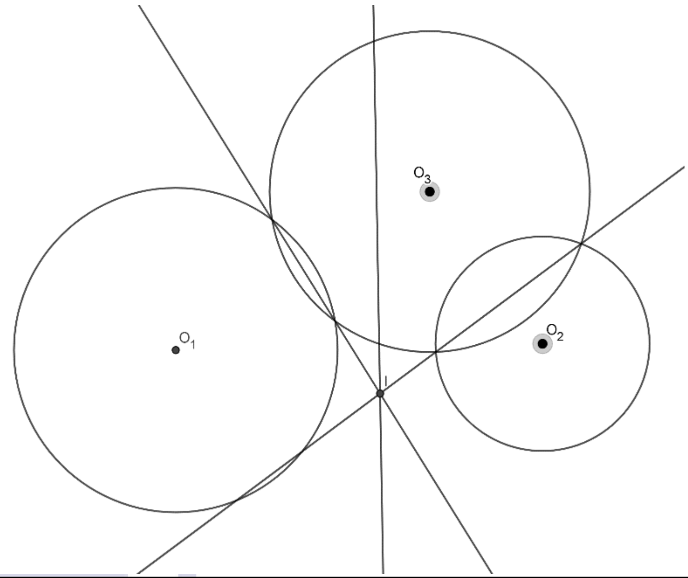
Bài 15: Cho ΔABC và $D, E, F \in BC, CA, AB$. Gọi $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ lần lượt là các đường tròn $(AEF), (BDF), (CDE)$. Đoạn AD cắt $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ lần lượt tại X, Y, Z. Chứng minh rằng $\frac{XY}{XZ} = \frac{BD}{CD}$

Bài 16: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có H là trực tâm, M là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại P, Q là ảnh đối xứng của H qua P, chứng minh $\angle QAM = 90^0$.

Bài 17: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với P là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. AP giao (O) tại D khác A; DE, AF là các đường kính của (O). EP, FP lần lượt cắt (O) tại G, H khác E, F. AH giao DG tại K. L là hình chiếu của K lên đường thẳng OP. Chứng minh A, L, K, D đồng viên.

III. Tâm đẳng phương:

Cho 3 đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$. Khi đó, nếu ba đường tròn này có tâm không thẳng hàng thì trục đẳng phương của từng cặp hai trong ba đường tròn đồng quy tại một điểm. Điểm này được gọi là tâm đẳng phương của ba đường tròn nói trên.



Tính chất 1: *Nếu ba trục đẳng phương song song hoặc trùng nhau thì tâm ba đường tròn thẳng hàng.*

Tính chất 2: *Nếu ba đường tròn cùng đi qua một điểm và có các tâm thẳng hàng thì các trục đẳng phương trùng nhau.*

Tính chất 3: *Ba đường tròn có các trục đẳng phương trùng nhau được gọi là ba đường tròn đồng trục.*

Ví dụ 7: ***(APMO 2020)*** Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có D nằm trên cạnh BC. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng qua D song song AB tại E. Đường thẳng CE cắt (O) tại F. Giả sử B, D, F, E đồng viên. Chứng minh AC, BF, DE đồng quy.

Bài tập có lời giải:

Bài 1: Cho tam giác ABC có I là tâm nội tiếp. Một đường tròn đi qua B, C cắt IC, IB lần lượt tại E, F. Gọi P, Q lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác ABF, ACE. Chứng minh $PQ \parallel EF$.

Bài 2: ***(Canada 2015)*** Cho ω_1, ω_2 là hai đường tròn ngoài nhau. A, C trên ω_1 và B, D trên ω_2 thỏa AB, CD lần lượt là tiếp tuyến chung ngoài và trong của hai đường tròn. AC cắt BD tại E. F là điểm trên ω_1. Tiếp tuyến tại F của ω_1 cắt đường trung trực EF tại M. MG là tiếp tuyến ω_2 tại G. Chứng minh $MF = MG$.

Bài 3: ***(IMO Shortlist 2014)*** Cho tam giác ABC $(AB > BC)$ có O là tâm ngoại tiếp. Phân giác $\angle ABC$ cắt (O) tại điểm thứ hai là M. Đường tròn đường kính BM (ký hiệu (BM)) giao phân giác của hai góc ∠AOB và ∠BOC lần lượt tại P, Q. R thuộc đường thẳng PQ thỏa $BR = MR$. Chứng minh $BR \parallel AC$.

Bài 4: ***(IMO Shortlist 2009)*** Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (D) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC theo thứ tự tại Z và Y. Gọi G là giao điểm của các đường thẳng BY

và CZ; R và S là các điểm sao cho hai tứ giác $BCYR$ và $BCSZ$ là các hình bình hành. Chứng minh rằng $GR = GS$.

Bài 5: ***(IMO 2008)*** Cho ΔABC có trực tâm H. Lấy các điểm M_1, M_2, M_3 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. $(M_1; M_1H)$ cắt BC tại A_1, A_2, (M_2, M_2H) cắt CA tại B_1, B_2; (M_3, M_3H) cắt AB tại C_1, C_2. Chứng minh $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ đồng viên.

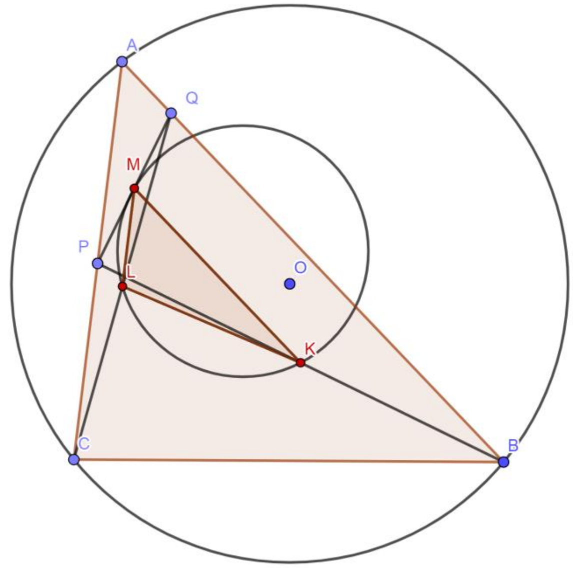
Bài 6: Cho ΔABC với ba cạnh có độ dài phân biệt và có các đường cao AD, BE, CF và tâm ngoại tiếp O. Chứng minh rằng các đường tròn $(AOD), (BOE), (COF)$ đồng quy tại điểm X khác O.

Bài 7: ***(China 2008)*** Lấy AB là dây cung của đường tròn tâm O, M là điểm chính giữa cung AB và C là điểm nằm ngoài đường tròn (O). Từ C vẽ 2 tiếp tuyến đến (O) tại tiếp điểm S và T. Gọi E là giao điểm của MS và AB, F là giao điểm của MT và AB. Từ E, F vẽ các đường thẳng vuông góc với AB, cắt OS và OT lần lượt tại X và Y. Một đường thẳng qua C cắt (O) tại P và Q, MP cắt AB tại R. Chứng minh XY đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPQR

Bài 8: Cho tam giác ABC có (I) nội tiếp, có (O) ngoại tiếp. (I) lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh tâm đẳng phương của $(A, AD), (B, BE), (C, CF)$ là trực tâm tam giác DEF.

Bài 9: Cho tam giác ABC không cân có 3 đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H, ba trung tuyến là AM, BN, CP. X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của H lên EF, FD, DE. Lần lượt gọi ảnh đối xứng của X, Y, Z qua M, N, P là T, U, V. Chứng minh tâm đẳng phương của $(T, TM), (U, UN)$ và (V, VP) nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

V. Lời giải tham khảo của nhóm.



Ví dụ 1:

Ta có: $\angle MKL = \angle PML = \angle QPA$

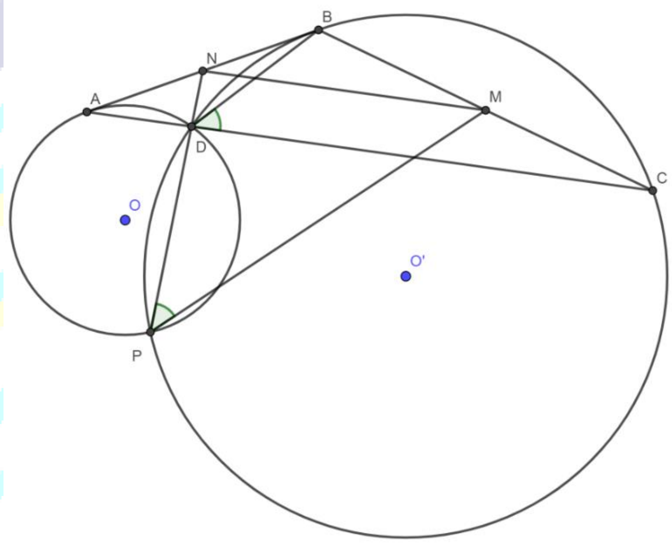
Tương tự: $\angle MLK = \angle QMK = \angle APQ$

$\Rightarrow\ \Delta MLK \sim \Delta AQP$

$\Rightarrow \frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} = \frac{PC}{QB} \Rightarrow\ AQ.QB\ =\ AP.PC$

$\Rightarrow R^2 - OP^2 = R^2 - OQ^2$

$\Rightarrow OP\ =\ OQ.$



Ví dụ 2:

Lấy N là giao của DP và $AB \Rightarrow\ N$ là trung điểm A.

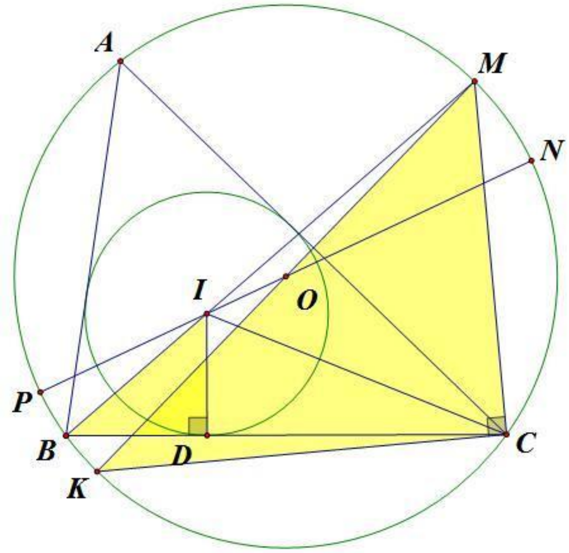
$\Rightarrow \angle BPD = \angle BCD = \angle BMN$

$\Rightarrow$ BMPN nội tiếp.

$\Rightarrow\ \angle NPM\ =\ 180°\ -\ \angle NBM$

$=\ \angle BAC\ +\ \angle BCA\ =\ \angle BDC$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

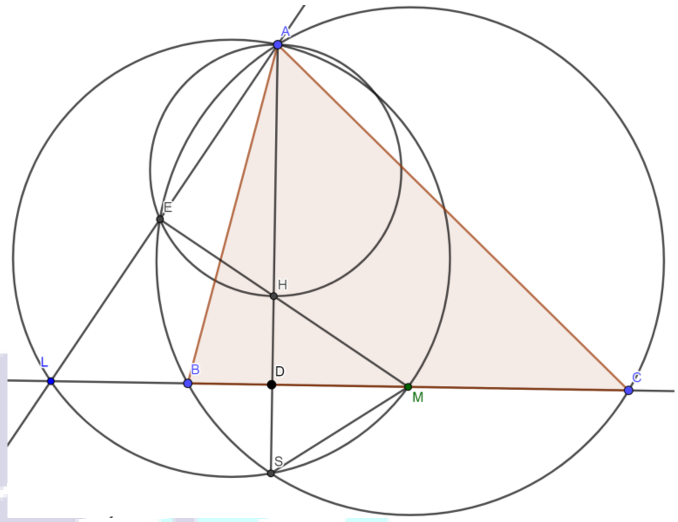


Bài 1:

Gọi M là giao của phân giác góc B với (O).
Kẻ đường kính qua O, I cắt (O) tại 2 điểm là N, P.
Ta có $R^2 - OI^2 = IN.IP = BI.IM$ (1)

Tam giác ICM cân tại $M \Rightarrow MC\ =\ MI.$
Kẻ đường kính MK của (O)và kẻ $ID\ \perp\ BC.$
$\Rightarrow \Delta\, IDB \sim \Delta\, MCK$
$\Rightarrow MK.ID\ =\ IB.MC\ =\ IB.MI$
$\Rightarrow 2Rr\ =\ IB.IM$ (2)
Từ (1) và (2), ta có điều phải chứng minh.

Bài 2:



Ta chứng minh (ALS) luôn đi qua điểm M là trung điểm BC:

Thật vậy: Gọi D là giao của BC và AS

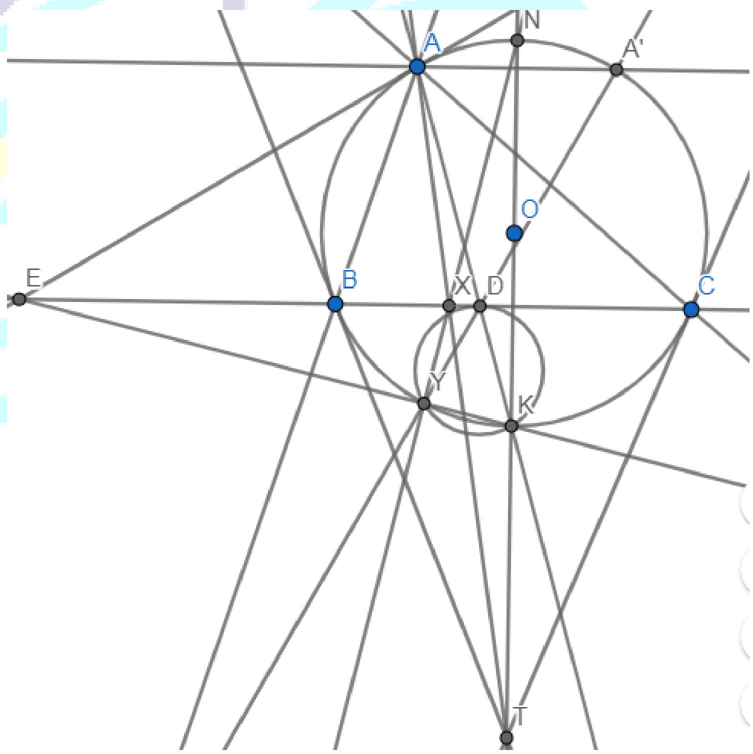
Bài toán quen thuộc $\Rightarrow M, H, E$ thẳng hàng và ME vuông góc AL

$\Rightarrow AEDM$ nội tiếp $\Rightarrow\ LE.LA\ =\ LD.LM$

Mà $LE.LA\ =\ LB.LC \Rightarrow LD.LM = LB.LC$

$\Rightarrow \frac{LD}{LB} = \frac{LC}{LM} \Rightarrow \frac{LD}{BD} = \frac{LC}{CM} = \frac{LC-LD}{CM-BD} = \frac{CD}{MD}$

Bài 3:



Vẽ tiếp tuyến tại A cắt BC tại E, KY cắt BC tại E', ta có:

AT là đường đối trung tam giác $ABC \Rightarrow \frac{XB}{XC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

N là điểm chính giữa cung $BAC \Rightarrow YN$ là phân giác trong $\angle BYC \Rightarrow \frac{YB}{YC} = \frac{XB}{XC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

K là chính giữa cung $BYC \Rightarrow YE'$ là phân giác ngoài $\angle BYC \Rightarrow \frac{E'B}{E'C} = \frac{YB}{YC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

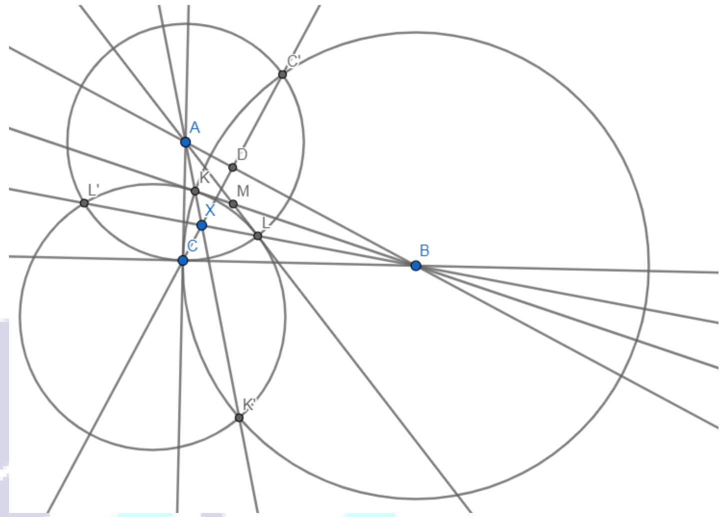
Xét ΔEAB và ΔECA, ta có:

$\angle EAB = \angle ECA \Rightarrow \Delta EAB \sim \Delta ECA \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{EB.EA}{EA.EC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{E'B}{E'C} \Rightarrow E\ \equiv\ E'$.

K là chính giữa cung nhỏ $BC \Rightarrow AK$ là phân giác trong $\angle BAC \Rightarrow \angle DAE = \angle BAD + \angle BAE = \angle CAD + \angle ACB = \angle ADE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại $E \Rightarrow ED^2 = EA^2 = P_{E/(O)} = \overline{EY}.\overline{EK} \Rightarrow BC$ tiếp xúc (DKY) tại $D \Rightarrow sđ\widehat{KA'} = 2\angle KYA' = 2\angle CDK = sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{CK} = sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{BK} = sđ\widehat{KA} \Rightarrow$ $KO\ \perp\ AA'$.

Mà $KO\ \perp\ BC \Rightarrow AA'\ \parallel\ BC$ (đpcm)

Bài 4:



Vẽ C' đối xứng C qua D, AK cắt $(B;\ BK)$ tại K' khác K, BL cắt $(A;\ AL)$ tại L' khác L, ta có:

$AC' = AC \Rightarrow C' \in (A), BC' = BC \Rightarrow C' \in (B)$.

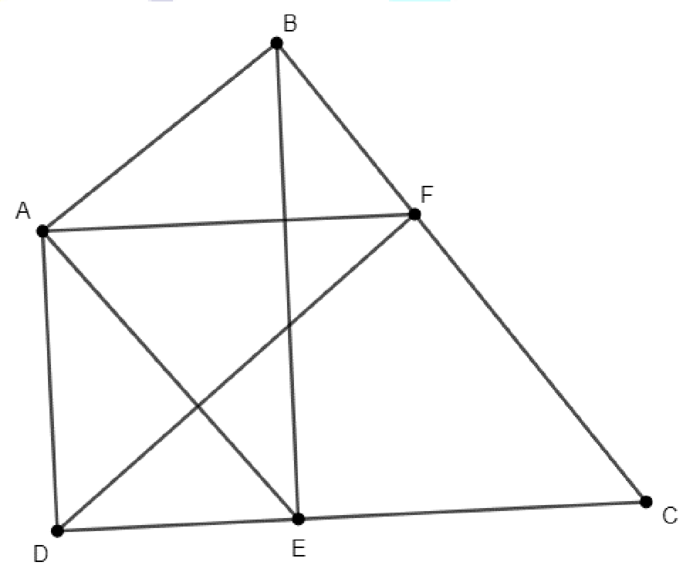
$\overline{XK}.\overline{XK'} = P_{X/(B)} = \overline{XC}.\overline{XC'} = P_{X/(A)}$

$= \overline{XL}.\overline{XL'} \Rightarrow K, L, K', L'$ đồng viên.

$\angle ACB = 90° \Rightarrow BC$ là tiếp tuyến $(A) \Rightarrow BK^2 = BC^2 = \overline{BL}\ .\overline{BL'} \Rightarrow BK$ là tiếp tuyến (KLK').

Chứng minh tương tự $\Rightarrow AL$ là tiếp tuyến $(KLK') \Rightarrow MK = ML$ (đpcm).

Ví dụ 3:



Ta có $AE \perp DF \Rightarrow AD^2 - DE^2 = AF^2 - EF^2$ (định lý bốn điểm)

Xét các tam giác vuông sau: ΔADE vuông tại D, ΔABF vuông tại B, áp dụng định lý Pitago ta có:

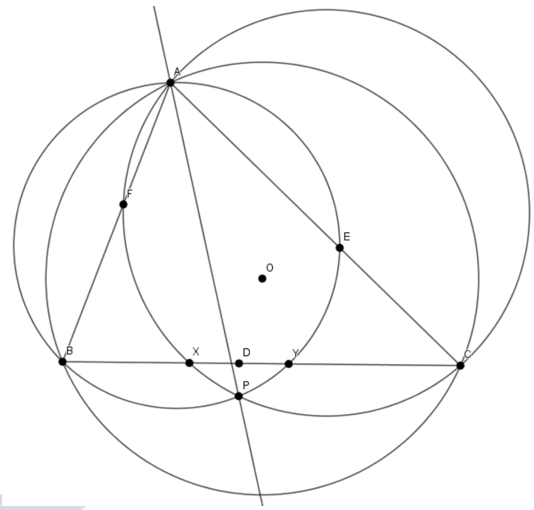
$AD^2 + DE^2 = AE^2$ và $AB^2 + BF^2 = AF^2$.

Từ các đẳng thức trên, kết hợp với $AB = AD$ suy ra:

$$\begin{aligned} FE^2 - FB^2 &= FE^2 - FA^2 + BA^2 \\ &= FE^2 - FA^2 + AD^2 = DE^2 \\ &= AE^2 - AD^2 = AE^2 - AB^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow BE \perp AF$.

Ví dụ 4:



Gọi BC cắt lại (PCA) tại X, (PAB) tại Y

$\angle PXY = \angle PAC = \angle PAB = \angle PYX = \angle PFC = \angle PCF = \angle PBE = \angle PEB.$

Vì vậy $PB = PE, PC = PF$. Lại có

$\angle PFB = \angle PCA, \angle PBA = \angle PEC$

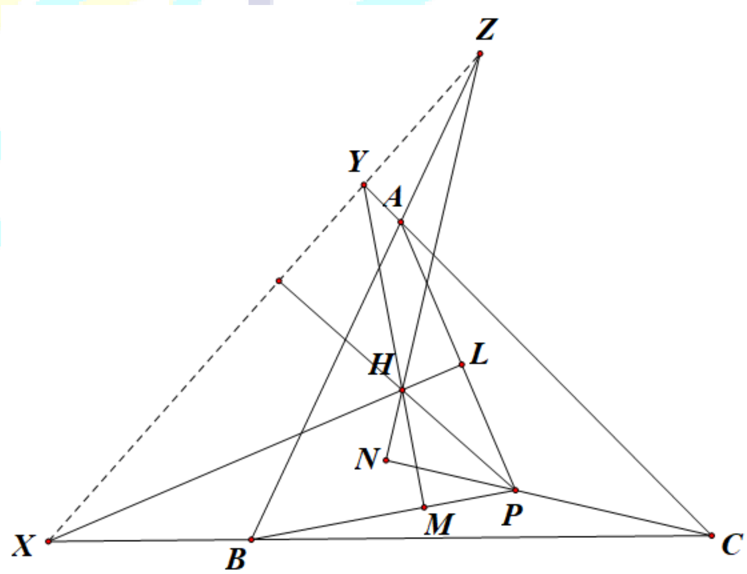
Nên $\Delta PFB = \Delta PCE$, $BF = CE$ và ΔPXY, ΔPFC, ΔPBE cân tại P. Vẽ PD vuông BC thì D là trung điểm XY

Có

$$\begin{aligned} PE^2 - PF^2 = PB^2 - PC^2 = DB^2 - DC^2 &= (\overline{\mathrm{DB}} + \overline{\mathrm{DC}})(\overline{\mathrm{DB}} - \overline{\mathrm{DC}}) = \overline{\mathrm{CB}}(\overline{\mathrm{XB}} + \overline{\mathrm{YC}}) \\ &= \overline{\mathrm{BC}}.\overline{\mathrm{BX}} - \overline{\mathrm{CY}}.\overline{\mathrm{CB}}) = \overline{\mathrm{BF}}.\overline{\mathrm{BA}} - \overline{\mathrm{CE}}.\overline{\mathrm{CA}} = BF^2 + \overline{\mathrm{BF}}.\overline{\mathrm{FA}} - \mathrm{CE}^2 - \overline{\mathrm{CE}}.\overline{\mathrm{EA}} \\ &= -\overline{\mathrm{FB}}.\overline{\mathrm{FA}} + \overline{\mathrm{EC}}.\overline{\mathrm{EA}} = -\mathrm{P}_{\mathrm{F}/(\mathrm{O})} + \mathrm{P}_{\mathrm{E}/(\mathrm{O})} = \mathrm{OE}^2 - \mathrm{OF}^2 \end{aligned}$$

Vì vậy, theo định lý bốn điểm thì OP vuông góc XY.

Bài 1:



Áp dụng định lý bốn điểm:

$+ XH \perp AP \Rightarrow XA^2 - HA^2 = XP^2 - HP^2$

$+ YH \perp BP \Rightarrow YB^2 - HB^2 = YP^2 - HP^2$

$+ CH \perp AB \Rightarrow HA^2 - HB^2 = CA^2 - CB^2$

$+ AH \perp XC \Rightarrow AX^2 - AC^2 = HX^2 - HC^2$

$+ BH \perp YC \Rightarrow BY^2 - BC^2 = HY^2 - HC^2$

Ta sẽ chứng minh $XY \perp PH$ bằng định lý bốn điểm kết hợp với những đẳng thức trên.

Ta có: $XP^2 - YP^2 = XA^2 - HA^2 + HP^2 - (YB^2 - HB^2 + HP^2)$

$= XA^2 - HA^2 - YB^2 + HB^2$

$= XA^2 - YB^2 + CB^2 - CA^2$

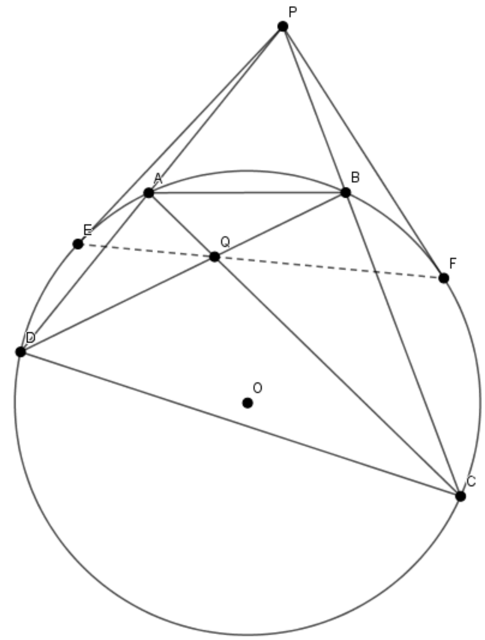
$= (XA^2 - CA^2) - (YB^2 - CB^2)$

$= HX^2 - HC^2 - (YH^2 - CH^2)$

$= HX^2 - YH^2$

Vậy, ta có $XY \perp PH$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $YZ \perp PH$

$\Rightarrow X, Y, Z$ thẳng hàng.



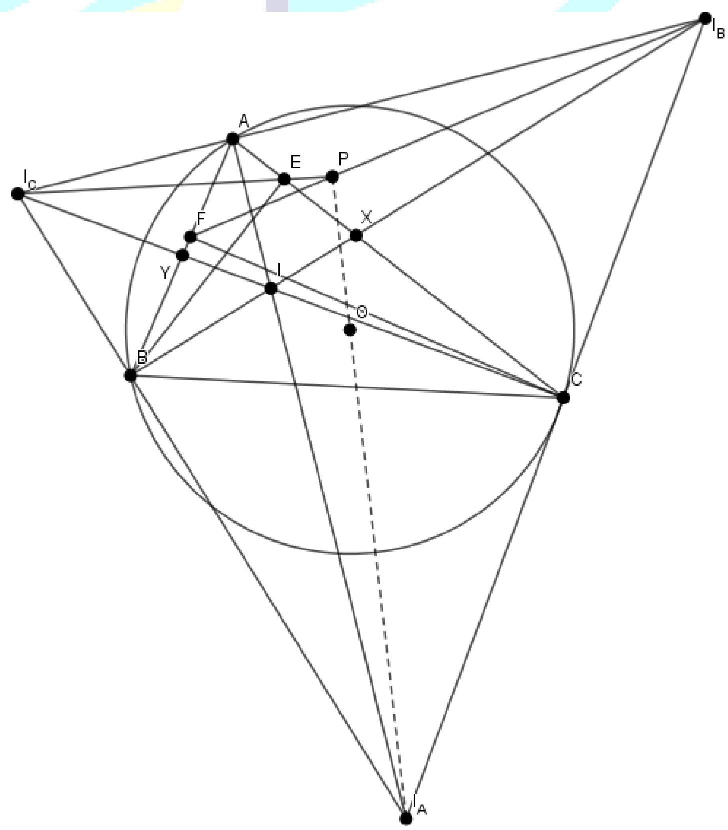
Bài 2:

Dựng tiếp tuyến PE, PF của đường tròn (O). Khi đó Q thuộc đường đối cực của P qua (O) và EF là đường đối cực của P qua (O) nên E, Q, F thẳng hàng

Do PE, PF là tiếp tuyến của (O) nên OP vuông góc EF

$P_{P/(O)} + P_{Q/(O)} = PE^2 + OQ^2 - R^2 = PE^2 - OE^2 + OQ^2 = PQ^2 - OQ^2 + OQ^2 = PQ^2$ (do OP vuông góc với EF)

Bài 3:



Sử dụng định lý Ceva dạng sin, ta có

$$\frac{\sin EI_CA}{\sin EI_CB} = \frac{\sin EAI_C}{\sin EAB} \cdot \frac{\sin EBA}{\sin EBI_C} \qquad (1)$$

$$\frac{\sin FI_BC}{\sin FI_BA} = \frac{\sin FCI_B}{\sin FCA} \cdot \frac{\sin FAC}{\sin FAI_B} \qquad (2)$$

$$\frac{\sin OI_AB}{\sin OI_AC} = \frac{\sin OBI_A}{\sin OBC} \cdot \frac{\sin OCB}{\sin OCI_A} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) và do

$\sin OBC = \sin OCB$

$\sin EAI_C = \sin FAI_B$

$\sin EAB = \sin FAC$

$\sin FCA = \sin EBA$

$\sin EBI_C = \sin OBI_A$

$\sin OCI_A = \sin FCI_B$

Nên theo định lý Ceva dạng sin, ta có OI_A, EI_C, FI_B đồng quy tại P.

Ta chứng minh: $I_AY^2 - I_AX^2 = OY^2 - OX^2$

Có: $\overline{YA}.\overline{YB} - \overline{XA}.\overline{XC} = \overline{P_{Y/(O)}} - \overline{P_{X/(O)}} = OY^2 - OX^2 = \overline{P_{Y/(II_C)}} - \overline{P_{X/(II_B)}} = \overline{P_{Y/(II_C)}} - \overline{P_{I_A/(II_C)}} + \overline{P_{Y/(II_B)}} - \overline{P_{I_A/(II_B)}} = I_AY^2 - I_AX^2$

Sử dụng bổ đề 4 điểm, ta có OP vuông góc với XY.

Bài 4:

Vẽ đường kính AT của (O).

Gọi(U) và (V) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp ΔN_1EN_2 và ΔP_1EP_2.

Dễ dàng chứng minh: $\Delta SN_1N_2 \sim \Delta SP_1P_2$

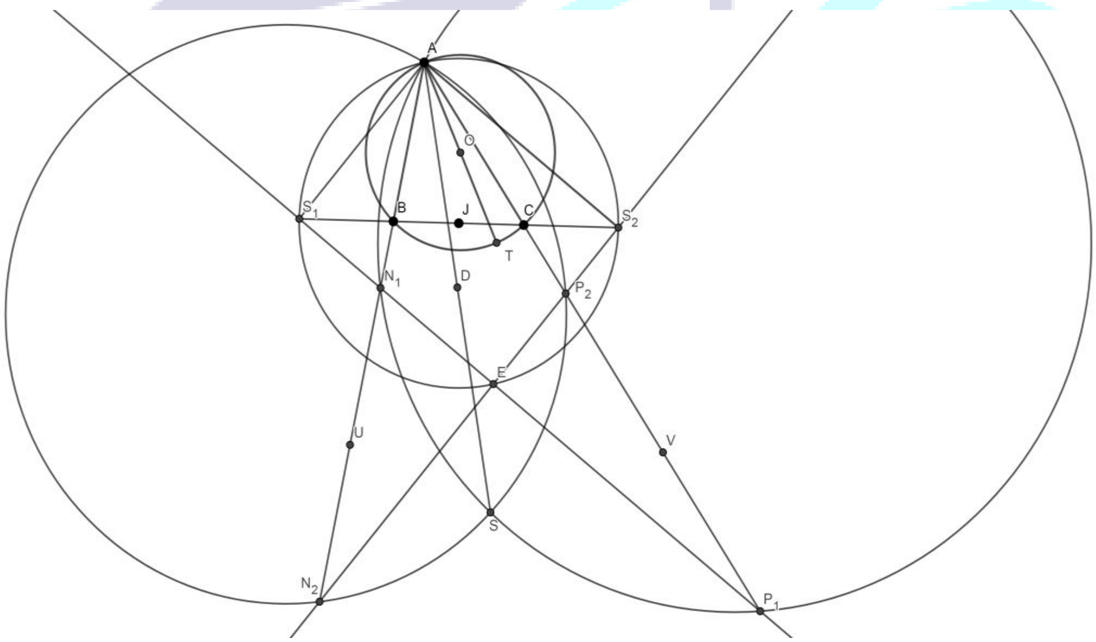
$\Rightarrow \Delta SN_2P_2 \sim \Delta SN_1P_1$.

$\Rightarrow$ Tứ giác N_1ESN_2 nội tiếp và tứ giác ESP_1P_2 nội tiếp.

Ta chứng minh T thuộc $ES \Leftrightarrow P_{T/(U)} = P_{T/(V)}$.

$\Leftrightarrow BU^2 - R_1^2 = CV^2 - R_2^2$

$\Leftrightarrow TB^2 + TU^2 - UN_1^2 = TC^2 + TV^2 - P_2V^2$



$\Leftrightarrow TB^2 + BN_1.BN_2 = TC^2 + CP_1.CP_2$ (1)

Ta có: $\frac{BN_1}{AB} = \frac{BS_1}{BS_2} = \frac{AB}{BN_2} \Rightarrow BN_1.BN_2 = AB^2$ (2)

Cmtt ta có: $CP_1.CP_2 = AC^2$ (3)

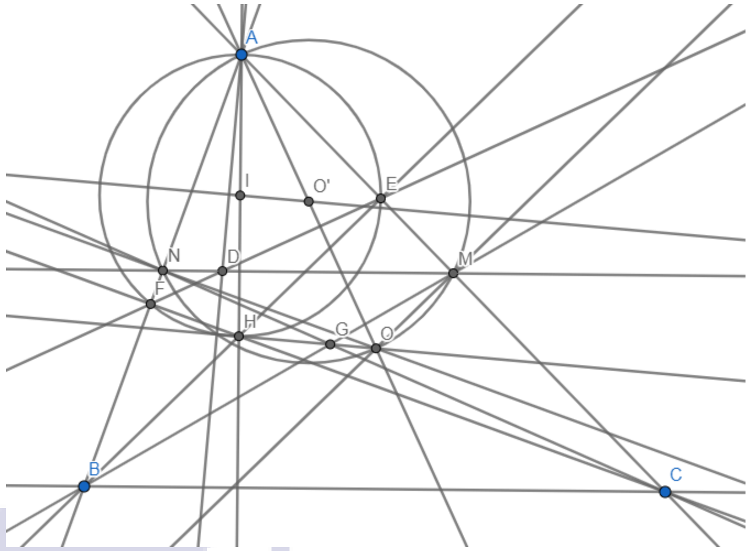
Từ (2), (3) $\Rightarrow$ (1) đúng và $P_{T/(U)} = TE.TS = TA_2$.

Nên O, J, D thẳng hàng và $OJ.OD = OA^2 = OB^2 = OC^2$.

Nên D thuộc (BOC). (đpcm)

Ví dụ 5:

Gọi O là tâm (ABC), I, O' lần lượt là trung điểm AH, AO ta có:



$\angle AEH = \angle AFH = 90° \Rightarrow A, E, F, H$ thuộc $(I;\ IA)$.

$\angle AMO = \angle ANO = 90° \Rightarrow A, M, N, O$ thuộc $(O';\ O'A)$.

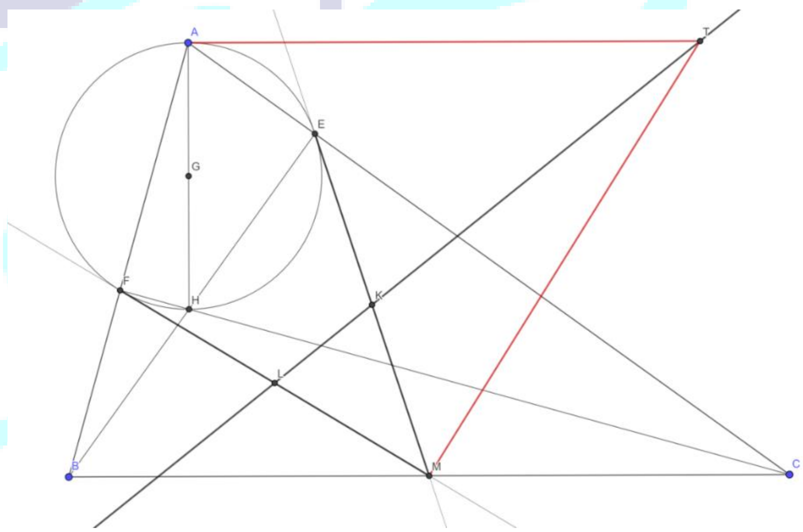
E, F, M, N thuộc đường tròn Euler tam giác $ABC \Rightarrow P_{D/(I)} = \overline{DE} . \overline{DF} = \overline{DM} . \overline{DN} = P_{D/(O')} \Rightarrow AD$ là trục đẳng phương của (I) và $(O') \Rightarrow AD \perp IO'$.

I, O' lần lượt là trung điểm $AH, AO \Rightarrow IO'$ là đường trung bình tam giác $AHO \Rightarrow IO' \parallel HO \Rightarrow AD \perp OH$.

Mà H, G, O thuộc đường thẳng Euler tam giác $ABC \Rightarrow AD \perp OH$. (đpcm).

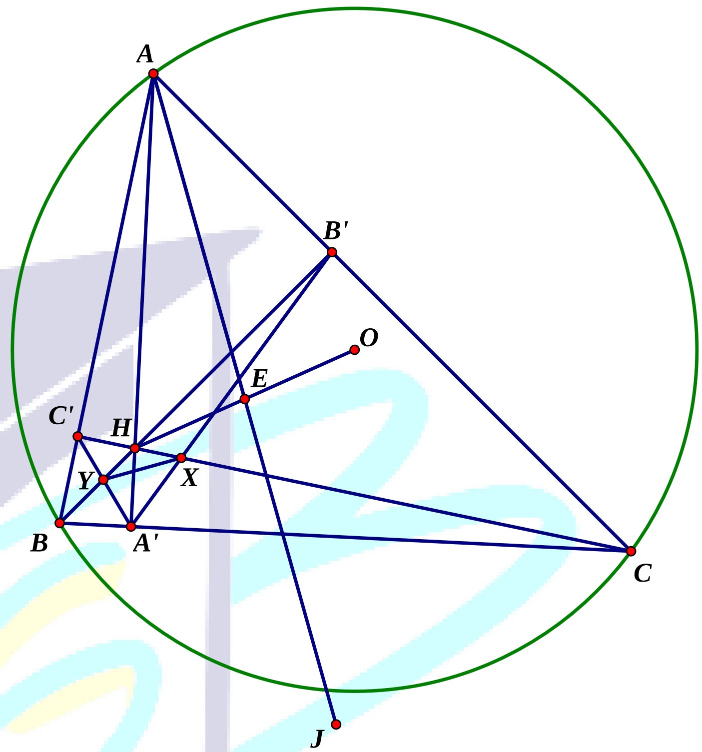
Ví dụ 6:

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, gọi G là trung điểm AH. Ta chứng minh được tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn tâm G, và ME, MF là tiếp tuyến của (G).



Xét đường tròn điểm M và đường tròn (G), ta có ME, MF là các tiếp tuyến của M đến (G), mà K, L lần lượt là trung điểm ME, MF nên ta có KL là trục đẳng phương của đường tròn điểm M và đường tròn (G).

Mà ta có $T \in KL$ và TA là tiếp tuyến của (G) đồng thời TM là tiếp tuyến của T đến đường tròn điểm M nên $TA = TM$ (đpcm)



Bài 1:

Gọi J là tâm (BHC) thì ta có được A, E, J thẳng hàng. Mặt khác ta có XY là trục đẳng phương $(A'B'C)$ và (BHC) (do $YA'.YC' = YH.YB$ và $XA'.XB' = XH.XC$ (vì $C'HA'B$ và $HB'CA'$ là các tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow XY \perp EJ$ (do tâm Euler của ΔABC là tâm ngoại tiếp của $\Delta A'B'C'$) (đpcm)

Bài 2:

Gọi ω_E là đường tròn Euler ΔABC. Cho OD cắt (OBC) tại E khác O.

AM cắt ω_E tại K khác M. Kẻ đường cao CF của ΔABC.

Ta cần chứng minh: P thuộc trục đẳng phương của đường tròn Euler ΔABC và (OBC) (1)

$\Leftrightarrow PM.PK = PO.PE \Leftrightarrow$ *tứ giác OMEK nội tiếp* $\Leftrightarrow \angle OEK = \angle OMK = \angle KAD$

$\Leftrightarrow KAEDnt \Leftrightarrow \angle OEA = \angle MKD = \angle MFD$ (2)

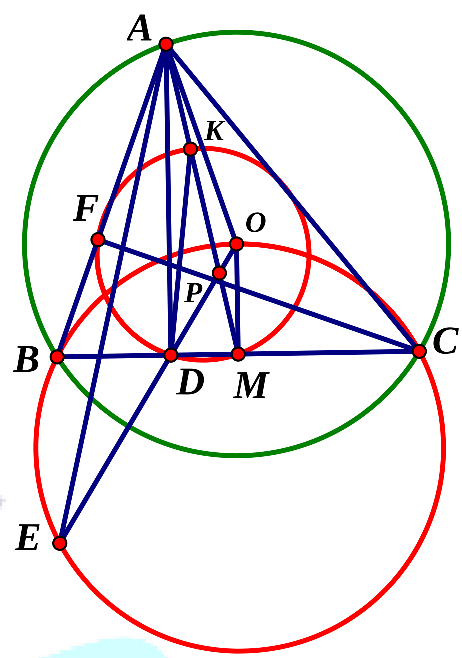
Mà O chính giữa cung BOC nên $OD.OE = OB^2 = OA^2$

$\Rightarrow \angle OEA = \angle OAD = \angle BAC - 2(90° - \angle ABC) = \angle ABC - \angle ACB$

Đồng thời: $\angle DFM = \angle BFM - \angle BFD = \angle ABC - \angle ACB$

Như vậy: (2) đúng dẫn đến (1) đúng (đpcm).

Hướng khác:



Còn có cách giải khác dựa vào *Bổ đề* ở bài 15 phía dưới là chứng minh $\mathrm{P}_{\mathrm{P},\omega_{\mathrm{E}},(\mathrm{OBC})} = 0$ (1)

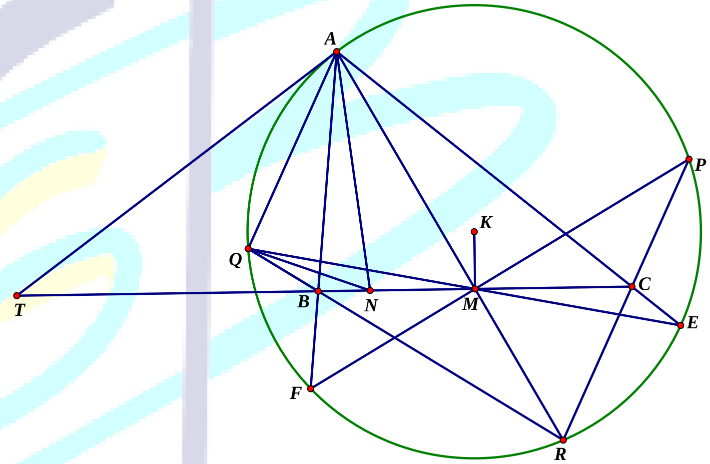
Biến đổi, ta được (1) tương đương với $\frac{PA}{PM} = \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{A},\omega_{\mathrm{E}},(\mathrm{OBC})}}{\mathrm{P}_{\mathrm{M},\omega_{\mathrm{E}},(\mathrm{OBC})}}$ (2).

Điều này có thể chứng minh trực tiếp qua 3 cạnh ΔABC, sin, cos của các góc $\angle A, \angle B, \angle C$ và kiểm chứng rằng:

$$VT(2) = \frac{4S_{ABC}.tanA}{BC^2} = \mathrm{VP}(2)$$

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 3:



Gọi AM cắt (O) tại R khác A. Ta thấy rằng M là trung điểm BC và $BC \perp KM$. Áp dụng bài toán con bướm cho tứ giác $AERQ$:

$\Rightarrow$ RQ đi qua B. Tương tự RP đi qua C. Gọi (AQB) cắt BC tại N khác B. Gọi tiếp tuyến tại A của (K) cắt BC tại T. Ta thấy rằng:

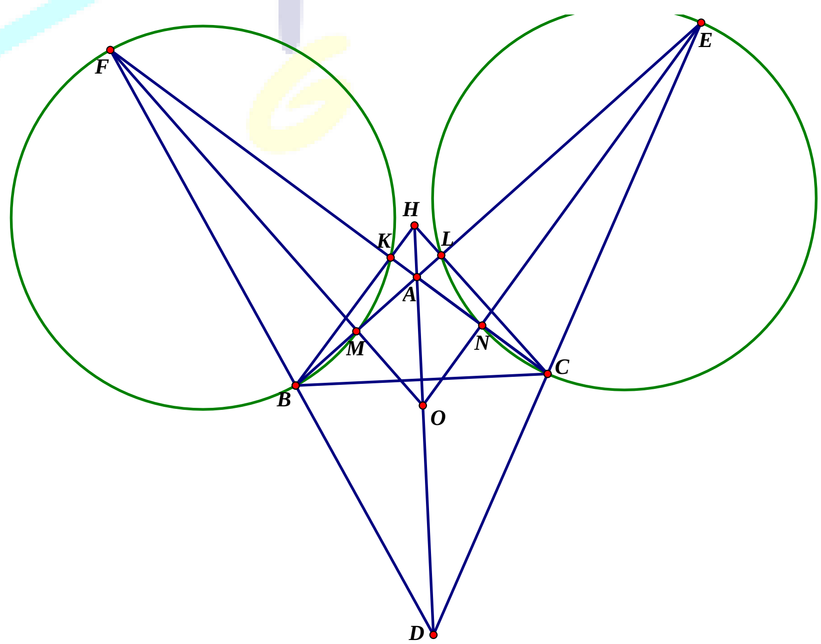
$\angle ANB = 180° - \angle AQR = \angle APR = \angle TAR$

$\Rightarrow$ $\angle AMT = \angle TAN$ hay TA tiếp xúc (AMN). Ta lại có:

$\angle QNB = \angle QAB = \angle QPM$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $PQNM$ nội tiếp $\Rightarrow$ $TM.TN = TA^2$ nên T thuộc trục đẳng phương của (K) và $(PQNM)$ $\Rightarrow$ T thuộc PQ (đpcm)

Bài 4:



Gọi E là giao của AB và CD, F là giao của AC và BC. Khi đó các ΔFAB và ΔEAC lần lượt cân tại F và E. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC

$\Rightarrow$ FM giao EN tại tâm ngoại tiếp O của ΔABC.

Gọi K, L lần lượt là hình chiếu của B trên AC, C trên AB. BK giao CL tại trực tâm H của ΔABC.

Ta có $\overline{HK} \cdot \overline{HB} = \overline{HL} \cdot \overline{HC}$ nên $P_{H/(BF)} = P_{H/(CE)}$ ((BF) ở đây là đường tròn đường kính BF).

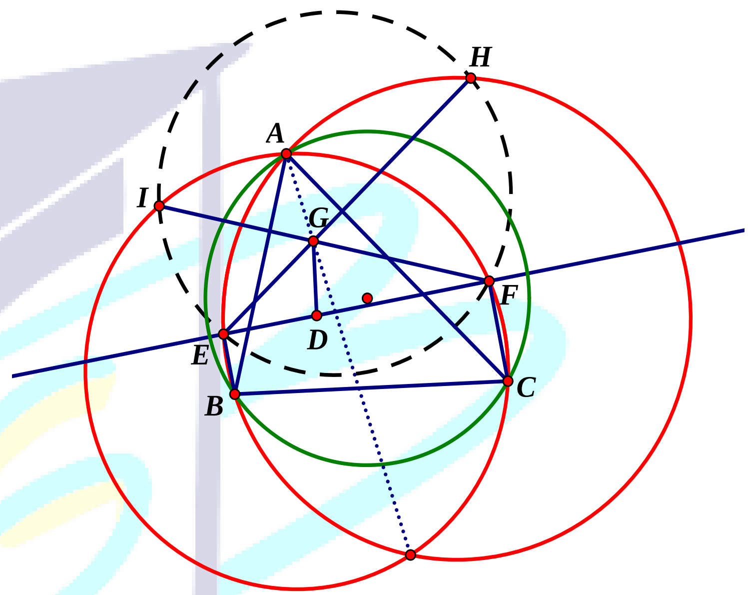
Do tứ giác $FMNE$ nội tiếp đường tròn (EF) nên $\overline{OF} . \overline{OM} = \overline{OE} . \overline{ON} \Rightarrow P_{O/(BF)} = P_{O/(CE)}$.

Ta có $\angle FBE = \angle FCE$ nên $FBCE$ nội tiếp.

$\Rightarrow \overline{DB} . \overline{DF} = \overline{DC} . \overline{DE}$ hay $P_{D/(BF)} = P_{D/(CE)}$.

Vậy H, O, D cùng nằm trên trục đẳng phương của (CE) và (BF) hay D nằm trên đường thẳng Euler của ΔABC (đpcm).

Bài 5:



Gọi G là cực trực giao của đường thẳng l đối với ΔABC.

Ta chứng minh: l_a, l_b, l_c đồng quy tại G.

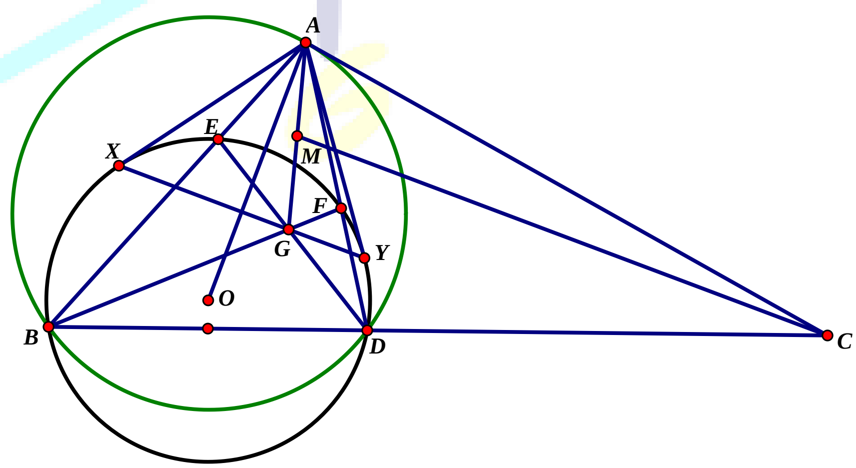
d_E, d_F cắt $(ACF), (ABE)$ lần lượt tại H, I. $G \in l_A \Leftrightarrow GF.GI = GE.GH \Leftrightarrow IHFE$ *nội tiếp*

Ta có: $\angle IAH = \angle IAC + \angle HAB - \angle BAC = \angle IFC + \angle HEB - \angle BAC = 180° \Rightarrow \overline{I, A, H}$

Do đó: $\angle IHE = \angle ABE = \angle IFE \Rightarrow$ IHFE nội tiếp $\Rightarrow G \in l_A$. Chứng minh tương tự: $G \in l_B, l_C$

Vậy l_a, l_b, l_c đồng quy tại G (đpcm).

Bài 6:



Gọi AX, AY là hai tiếp tuyến kẻ từ A đến (O).

$G \in$ đối cực của A với (O), XY là đối cực của A với (O) nên $G \in XY$

Như vậy, $M \in$ đường trung bình ΔAXY là trục đẳng phương của $(A; 0), (O)$.

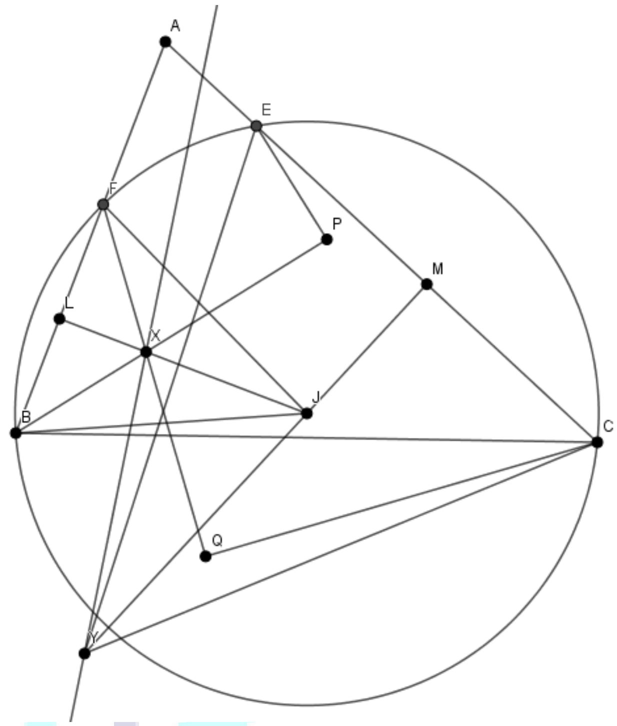
Mặt khác:

Do $\angle CAD = \angle ABC$ nên CA tiếp xúc $(ABD) \Rightarrow CA^2 = CB.CD \Rightarrow C$ thuộc trục đẳng phương của $(A;0),(O)$.

Vậy: CM là trục đẳng phương của $(A;0),(O)$ $nên\ CM \perp AO$ (đpcm).

Bài 7:

Vẽ EP, CQ lần lượt vuông góc BX, FX với P, Q trên BX, FX.



Có

$\angle CFQ = \angle CFB - \angle BFX = \angle CFB - \angle JCE = \angle CFB - 90^o + \angle CJM = \angle CFB - 90^o + \angle CFE = \angle BFE - 90^o = 90^o - \angle AFE$

$FQ = CF.\cos CFQ = CF.\sin AFE$

$\angle EBP = \angle FBX - \angle FBE = \angle JEC - \angle FBE = 90^o - \angle EJM - \angle FBE = 90^o - \angle EFC - \angle FCE = 90^o - \angle AEF$

$BP = BE.\cos EBP = BE.\sin AEF$

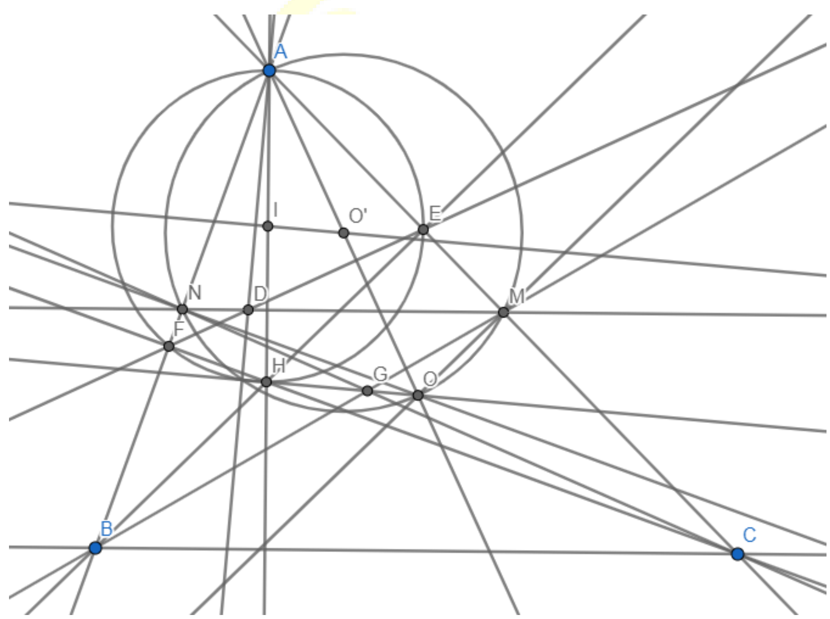
$\frac{BE.\sin AEF}{CF.\sin AFE} = \frac{AE.\sin AEF}{AF.\sin AFE} = 1$ (theo Định lý hàm sin)

Vì vậy $XF = XB, BP = FQ$ nên $XQ = XP$

$\overline{P_{X/(BE)}} = \overline{XB}.\overline{XP} = \overline{XF}.\overline{XQ} = \overline{P_{X/(CF)}}$

Vì vậy X nằm trên trục đẳng phương của (BE) và (CF), tương tự Y cũng nằm trên trục đẳng phương của (BE) và (CF) (1)

Vẽ BB', CC' vuông góc với AC, AB theo thứ tự và B', C' nằm trên AC, AB. Vì vậy H là giao của BB' và CC'.



Có $\overline{P_{H/(BE)}} = \overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HC}.\overline{HC'} = \overline{P_{H/(CF)}}$

Vì vậy H nằm trên trục đẳng phương của (BE) và (CF) (2)

Từ (1) và (2) suy ra H, X, Y thẳng hàng hay XY đi qua H.

Bài 8:

Gọi O là tâm $(ABC), I, O'$ lần lượt là trung điểm AH, AO ta có:

$\angle AEH = \angle AFH = 90° \Rightarrow A, E, F, H$ thuộc $(I;\ IA)$.

$\angle AMO = \angle ANO = 90° \Rightarrow A, M, N, O$ thuộc $(O';\ O'A)$.

E, F, M, N thuộc đường tròn Euler tam giác ABC

$\Rightarrow P_{D/(I)} = \overline{DE}\,.\,\overline{DF} = \overline{DM}\,.\,\overline{DN} = P_{D/(O')} \Rightarrow AD$ là trục đẳng phương của (I) và (O')

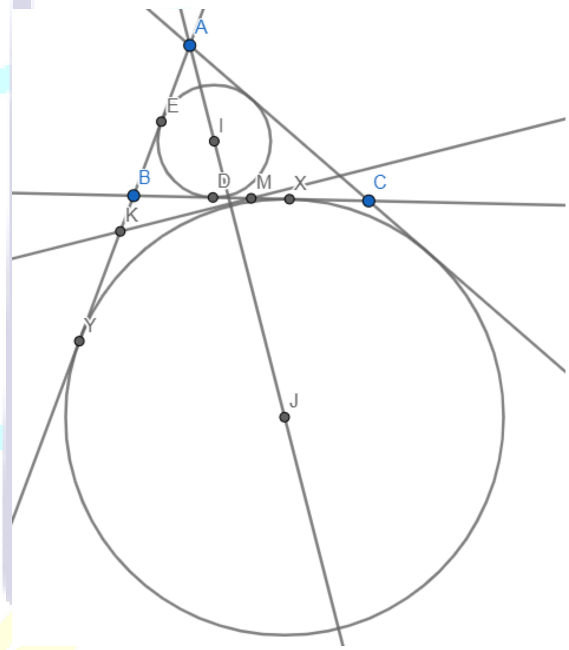
$\Rightarrow AD \perp IO'$.

I, O' lần lượt là trung điểm AH, $AO \Rightarrow IO'$ là đường trung bình tam giác AHO

$\Rightarrow IO' \parallel HO \Rightarrow AD \perp OH$.

Mà H, G, O thuộc đường thẳng Euler tam giác $ABC \Rightarrow AD \perp OH$. (đpcm)

Bài 9:



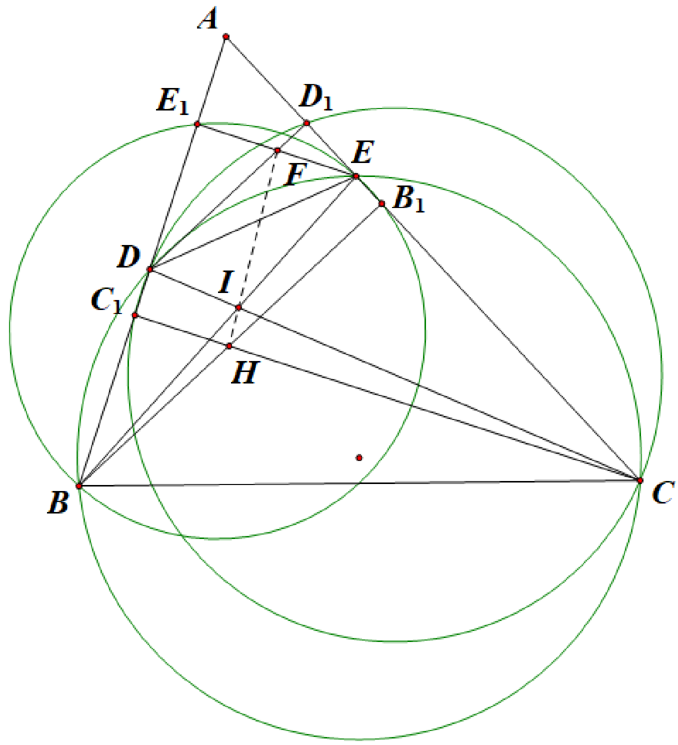
Vẽ $(I), (J)$ lần lượt là tâm nội tiếp, tâm bàng tiếp góc A tam giác ABC. (I) tiếp xúc BC, AB lần lượt tại D, E. (J) tiếp xúc BC, AB lần lượt tại X, Y. Ta có:

$BD = \frac{BA+BC-AC}{2} = CX \Rightarrow MD = MX \Rightarrow P_{M/(I)} = MD^2 = MX^2 = P_{M/(J)}$.

Mà $MK \perp IJ \Rightarrow MK$ là trục đẳng phương của $(I), (J) \Rightarrow KE^2 = P_{K/(I)} = P_{K/(J)} = KF^2$

$\Rightarrow AK = AE + EK = \frac{AB+AC-BC+EY}{2} = \frac{AB+AC-BC+EB+BY}{2} = \frac{AB+AC-BC+BD+BX}{2} = \frac{AB+AC-BC+CX+BX}{2} = \frac{AB+AC}{2}$ (đpcm).

Bài 10:



Kẻ đường cao BB_1, CC_1 của tam giác ABC và đường cao DD_1, EE_1 của tam giác ADE.

Xét tứ giác BB_1EE_1 có $\angle BE_1E + \angle BB_1E = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác BB_1EE_1 nội tiếp đường tròn (C_1).

Tương tự, ta cũng có tứ giác CC_1DD_1 nội tiếp đường tròn (C_2).

Tứ giác BCB_1C_1 có $\angle BB_1C = \angle BC_1C = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác BCB_1C_1 nội tiếp

$\Rightarrow HB.HB_1 = HC.HC_1$.

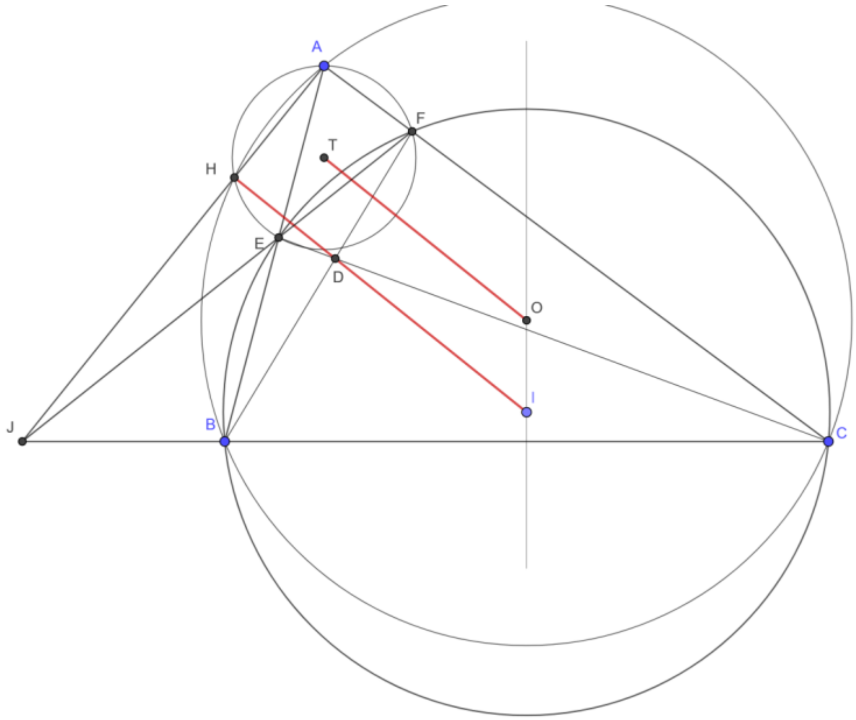
Tương tự, ta có $FE_1.FE = FD_1.FD$ và $ID.IC = IE.IB$ (do tứ giác $BCED$ nội tiếp đường tròn (O).

Ta có: $HB.HB_1 = HC.HC_1 \Rightarrow P_{H/(C_1)} = P_{H/(C_2)} \Rightarrow H$ thuộc trục đẳng phương của (C_1) và (C_2).

Tương tự, I và F cũng thuộc trục đẳng phương của (C_1) và (C_2).

$\Rightarrow H, I, F$ thẳng hàng.

Bài 11:

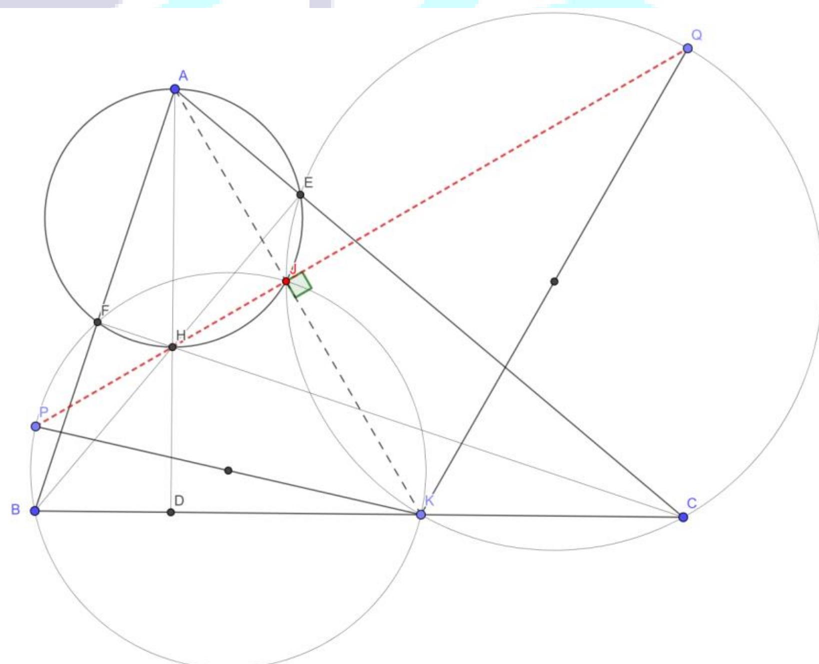


Gọi H là giao điểm của (O) và (T). Do AH, EF, BC là các trục đẳng phương của 3 đường tròn $(T),(O),(I)$ nên AH, EF, BC đồng quy tại tâm đẳng phương J.

Xét tứ giác nội tiếp $BCFE$, có A, J là các giao điểm của hai cặp cạnh bên, D là giao điểm hai đường chéo và I là tâm đường tròn ngoại tiếp. Áp dụng định lý Brocard, ta có $ID \perp AJ$. (1)

Mà ta lại có AJ là trục đẳng phương của 2 đường tròn (O) và (T), nên $OT \perp AJ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OT \parallel ID$ (đpcm).

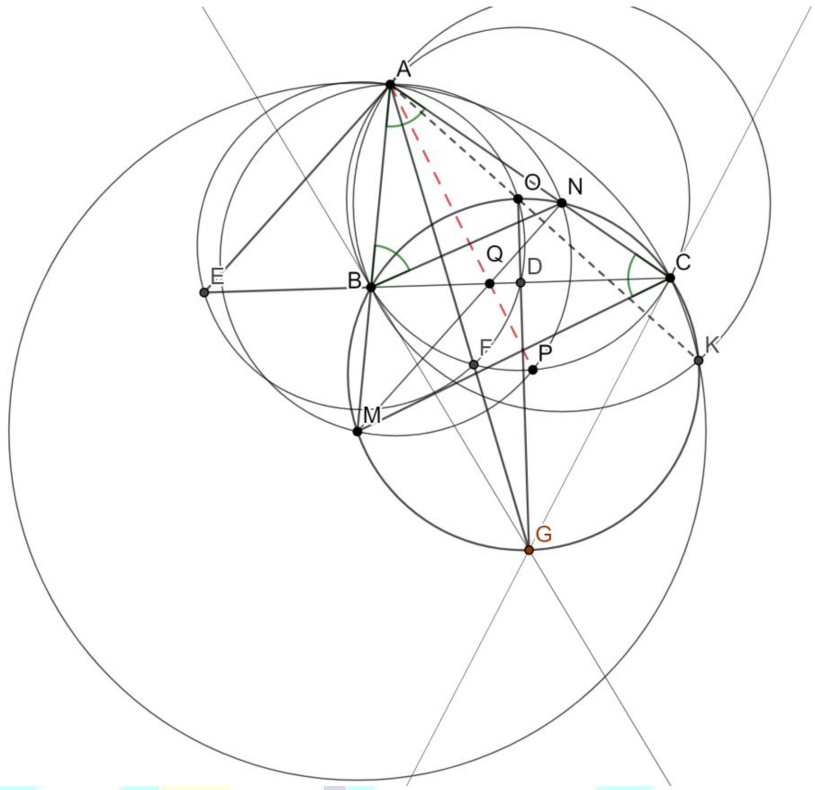


Bài 12: Gọi là giao điểm của (KBF) và (KCE). Ta có $\angle PJK + \angle QJK = 90° + 90° = 180°$ nên P, J, Q thẳng hàng.

Ta có $AF.AB = AE.AC$ hay $\mathscr{P}_{A/(KBF)} = \mathscr{P}_{A/(KEC)}$ nên A thuộc trục đẳng phương của (KBF) và (KCE), vậy ta có A, J, K thẳng hàng.

Từ đó ta có $AJ.AK = AE.AC = AH.AD$ nên tứ giác $JHDK$ nội tiếp, lại có $\angle HDK = 90°$ nên $\angle HJK = 90°$, suy ra $HJ \perp AK$, mà $JP \perp AK$ và $JQ \perp AK$ nên P, H, J, Q thẳng hàng.

Bài 13:



a) Ta có $\begin{cases} \angle NBA = \angle NAB \\ \angle MCA = \angle MAC \end{cases}$

$\Rightarrow \angle ABN = \angle ACM$

Suy ra tứ giác $MBNC$ nội tiếp

$\Rightarrow QB.QC = QM.QN$

$\Rightarrow \mathscr{P}_{Q/(AMN)} = \mathscr{P}_{Q/(ABC)}$

Suy ra Q thuộc trục đẳng phương của (AMN) và (ABC).

$\Rightarrow A, P, Q$ thẳng hàng (đpcm).

b) Ta có $\angle AMN = \angle ACB$ ($MBNC$ nội tiếp)

$\Rightarrow \angle AMN + \angle MAO = \angle ACB + \angle BAO$

$\Rightarrow \angle AMN + \angle MAO = 90°$

$\Rightarrow AO \perp MN$

$\Rightarrow A, O, K$ thẳng hàng. ($AK \perp MN$)

Ta có $\angle OAE = \angle ODC = 90°$

Nên tứ giác $OAED$ nội tiếp

$\Rightarrow O \in (ADE)$

Xét đường tròn (O) và đường tròn (ODC), ta thấy (O) tiếp xúc với (ODC) nên trục đẳng phương của (ODC) và (O) là tiếp tuyến tại C của (O). (1)

Xét đường tròn (O) và đường tròn (ADE), ta thấy A và F là hai giao điểm của hai đường tròn nên AF là trục đẳng phương của (O) và (ADE). (2)

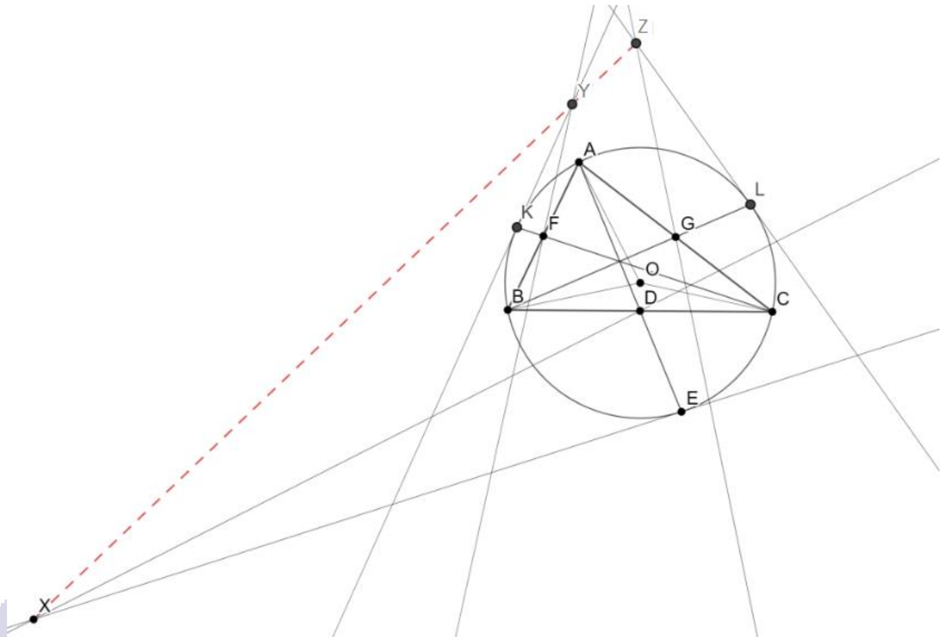
Xét đường tròn (ODC) và đường tròn (ADE), ta thấy O và D là hai giao điểm của hai đường tròn nên OD là trục đẳng phương của (ODC) và (ADE). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra AF, OD và tiếp tuyến tại C đồng quy tại điểm G là giao điểm của tiếp tuyến tại B và C của (O). Dễ thấy đây là một điểm cố định khi B, C cố định.

Vậy AF luôn đi qua điểm cố định (đpcm).

Bài 14:

***<u>Ghi chú</u>**: có thể thấy nếu vẽ hình theo đúng yêu cầu đề thì hình vẽ sẽ rất phức tạp (như hình bên dưới). Vì vậy, với yêu cầu bài toán là chứng minh các điểm có cách xác định tương tự thẳng hàng thì ta sẽ chứng minh các điểm ấy nằm trên cùng một đường thẳng cụ thể nào đó, mà ở đây là trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler của tam giác ABC.*



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và I là trung điểm AH, ta đã biết DI là đường kính của đường tròn Euler của tam giác ABC.

Ta có $\begin{cases} AI = \dfrac{1}{2}AH = OD \\ AI \parallel OD(\perp BC) \end{cases}$

$AIDO$ là hình bình hành.

$\Rightarrow ID \parallel AO$

Mà $AO \perp XD$

Suy ra XD là tiếp tuyến của đường tròn Euler tam giác ABC.

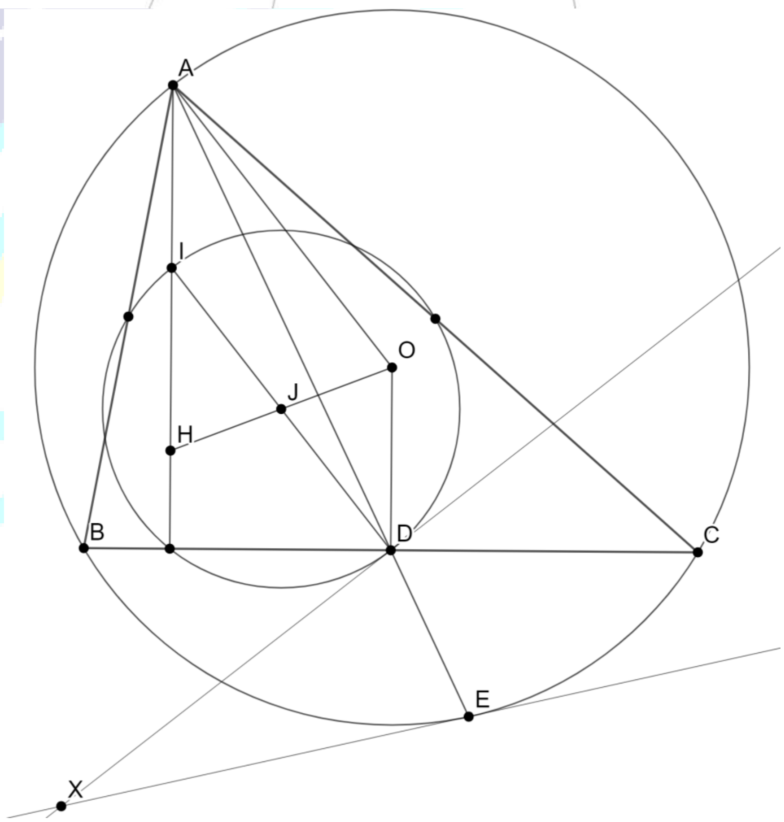
Mà ta có

$\angle XDE = 90° - \angle DAO = \angle ACE = \angle AEX$

Suy ra ΔXDE là tam giác cân.

$\Rightarrow XD = XE$

$\Rightarrow \mathscr{P}_{X/Euler(ABC)} = \mathscr{P}_{X/(O)}$



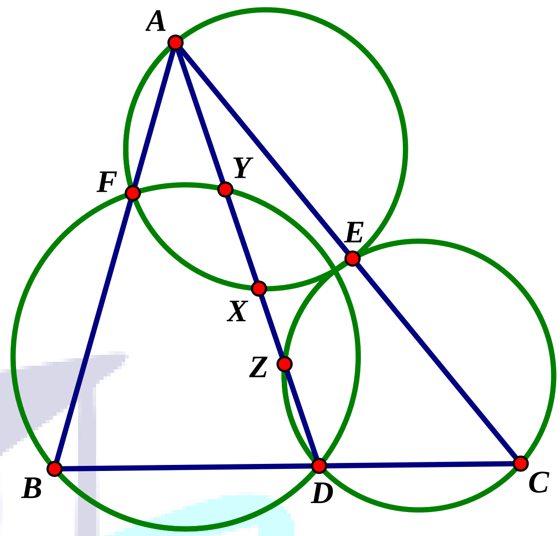
Vậy X thuộc trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler của tam giác ABC.

Chứng minh tương tự, ta có Y, Z cũng thuộc trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler của tam giác ABC.

Vậy X, Y, Z thẳng hàng (đpcm).

Bài 15:

Đầu tiên, xin phát biểu và không chứng minh bổ đề sau:



<u>*Bổ đề:*</u> Đặt $P_{M,(X),(Y)} = P_{M/(X)} - P_{M/(Y)}$ thì $P_{M,(X),(Y)}$ là 1 hàm bậc nhất theo M

(Đặt $M(x, y), X(x_1, y_1), Y(x_2, y_2), R_X = r_1, R_Y = r_2$ và chứng minh hàm bậc nhất theo x, y.)

Từ đó: nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k thì:

$$P_{M,(X),(Y)} = kP_{A,(X),(Y)} + (1-k)P_{B,(X),(Y)}$$

<u>*Trở lại bài toán:*</u>

Gọi $(A) \equiv (A; 0)$ là đường tròn điểm A. Đặt $\frac{CD}{BC} = k$ thì áp dụng bổ đề ta có:

$$DA.AX = DA^2 - DA.DX = P_{D,(A),\omega_a} = kP_{B,(A),\omega_a} + (1-k)P_{C,A,\omega a}$$

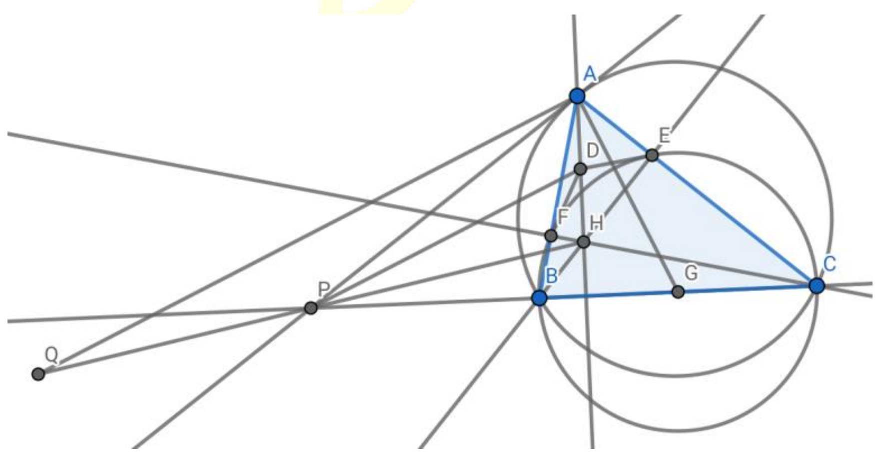
$= k(BA^2 - BF.BA) + (1-k)(CA^2 - CA.CE)$

$= k(BA.AF) + (1-k)(CA.AE)$

$= k(BA.AF - CA.AE) + CA.AE$

Do đó: $k = \frac{DA.AX - CA.AE}{BA.AF - CA.AE} = \frac{DA.AX - AD.AZ}{AD.AY - AD.AZ} = \frac{AX - AZ}{AY - AZ} = \frac{XZ}{YZ} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{XY}{XZ}$ (đpcm).

Bài 16:



Gọi D là trung điểm AH, E, F lần lượt là chân đường cao đỉnh B, C của tam giác ABC.

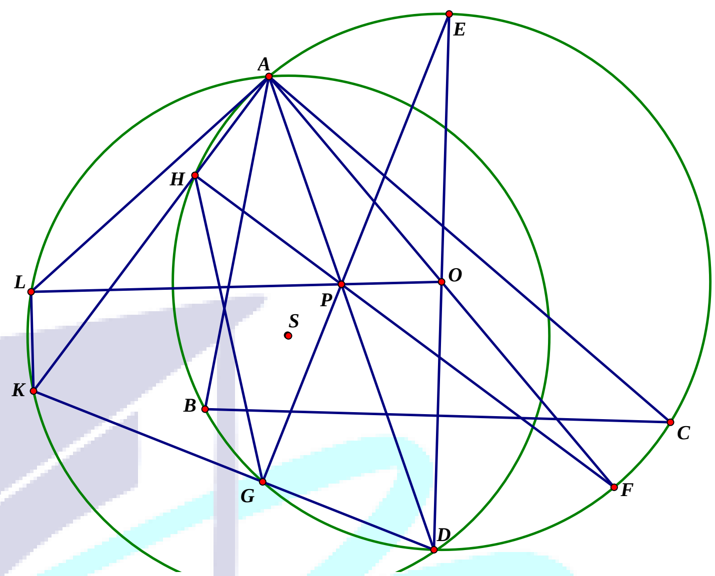
$\Longrightarrow D$ là tâm (AH) và DM là đường kính đường tròn Euler của tam giác ABC.

$\Longrightarrow DA = DE = DF$ và $\angle DEM = \angle DFM = 90o$ nên DE, DF là tiếp tuyến từ D đến (BC).

$\Longrightarrow P_{D/(A,0)} = DA^2 = DE^2 = P_{D/(BC)}$.

$\Longrightarrow D$ thuộc trục đẳng phương của (BC) và $(A, 0)$.

Ta cũng có $P_{P/(A,0)} = PA^2 = \overline{PB}.\overline{PC} = P_{P/(BC)}$ nên P cũng thuộc trục đẳng phương của (BC) và $(A, 0)$.



Vậy DP là trục đẳng phương của (BC) và $(A, 0) \Longrightarrow DP \perp AM$

Đồng thời do giả thiết nên P là trung điểm HQ, mà ta có D là trung điểm AH nên PD là đường trung bình đỉnh H tam giác HAQ.

$\Longrightarrow PD \parallel AQ$ mà $DP \perp AM$ nên ta có điều phải chứng minh.

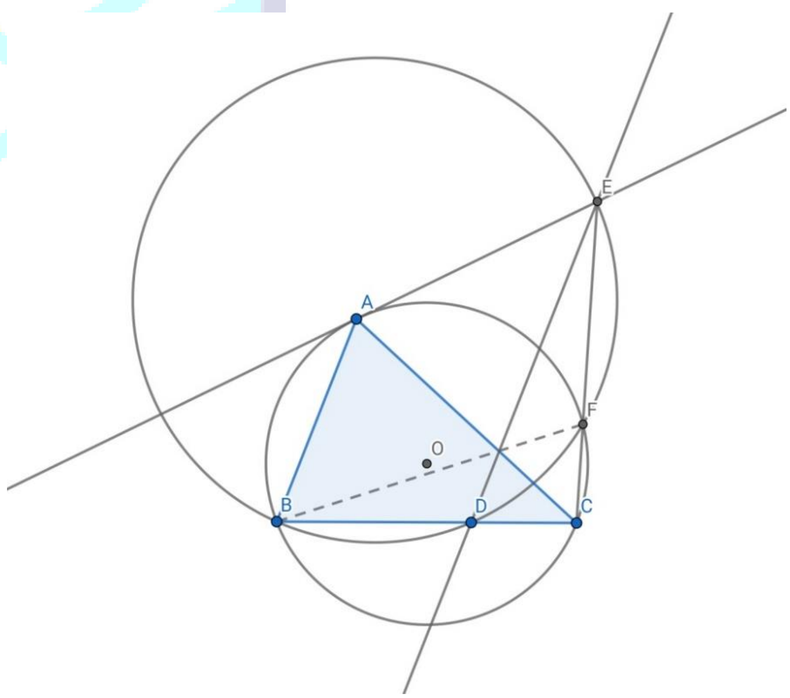
Bài 17:

Ta thấy các tứ giác HADG và KHPG nội tiếp nên: $\angle KPG = \angle KHG = \angle KDA$

$\Rightarrow \angle KPD = 90°$. Gọi KL giao AD tại Q. Ta thấy KL chính là trục đẳng phương của (O) và đường tròn điểm P.

$\Rightarrow QA.QD = QP2 = QL.QK \Rightarrow$ Tứ giác $ALKD$ nội tiếp (đpcm)

Ví dụ 7:



Ta có:

$\angle\text{EAC} = \angle\text{ABC} = \angle\text{EDC}$ (do $AB \parallel DE$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AECD$ là tứ giác nội tiếp.

Theo tính chất tâm đẳng phương với bộ ba đường tròn $(ABCF)$, $(AECD)$, $(BDFE)$ thì BF, AC, DE đồng quy. (đpcm)

Bài 1:

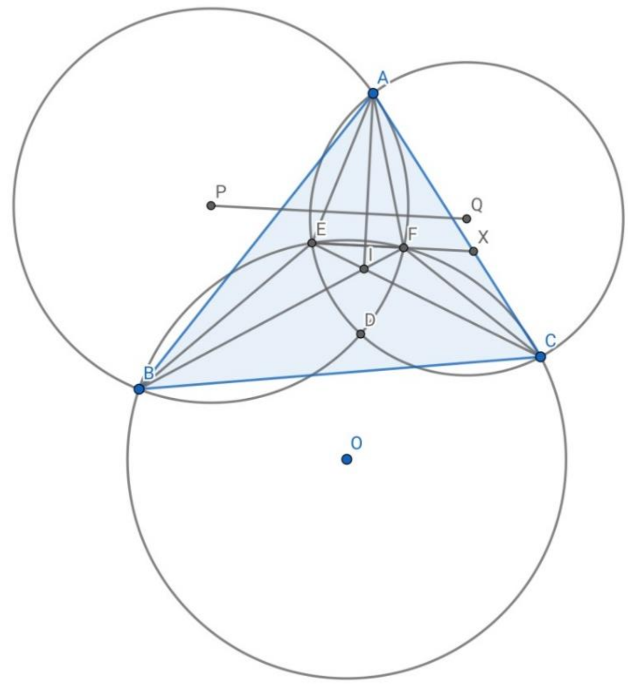
Gọi EF giao AC tại X và (ABF) giao (ACE) tại D.

Ta có:

$$\angle IAX + \angle EXA = \frac{\angle A}{2} + \angle XEC + \angle XCE = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90^o \Rightarrow AI \perp EF \qquad (1)$$

Theo tính chất tâm đẳng phương với bộ ba đường tròn $(BFEC), (ABFD), (ADEC)$ ta có AD, BF, CE đồng quy tại I. (2)

Mà do AD là dây cung chung của hai đường tròn $(ABFD)$ và $(ADEC)$ có P, Q lần lượt là tâm đường tròn.



$\Rightarrow AD \perp PQ$ (3)

(1) (2) (3) $\Rightarrow$ EF // PQ. (đpcm)

Bài 2:

Gọi X, Y lần lượt là trung điểm cạnh AB, CD.

Gọi K là giao điểm của CD và AB.

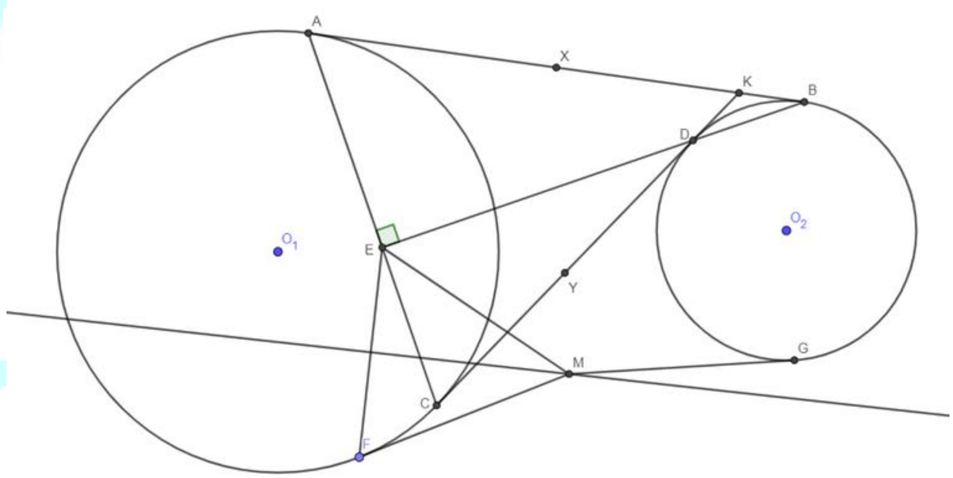
Ta có :

$\angle DCE = \angle ACK = \angle BAE$; $\angle CDE = \angle ABE$

$\Rightarrow \angle CED = \angle AEB = 90^o$

$\Rightarrow XA^2 = XB^2 = XE^2$ và $YC^2 = YD^2 = YE^2$

$\Rightarrow \omega_1, \omega_2$ và đường tròn điểm E có trục đẳng phương chung là XY.



Mặt khác, do MF là tiếp tuyến của ω_1 và $ME = MF$ nên M cũng thuộc trục đẳng phương của ω_1, ω_2 và đường tròn điểm E.

$\Rightarrow MF^2 = MG^2 \Rightarrow MF = MG$ (đpcm).

Bài 3:

Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm đoạn thẳng MB, AB, BC.

Ta có: D, F, R thẳng hàng do cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng MB. (1)

O, F, B, E, D cùng thuộc đường tròn đường kính OB (do $\angle OFB = \angle ODB = \angle OFB = 90^o$) (2)

$$\angle \mathrm{POQ} = \angle \mathrm{BOQ} + \angle \mathrm{BOP} = \frac{\angle \mathrm{BOC}}{2} + \frac{\angle \mathrm{BOA}}{2} = 180^o - \frac{\angle \mathrm{AOC}}{2} = 180^o - \angle \mathrm{B}$$

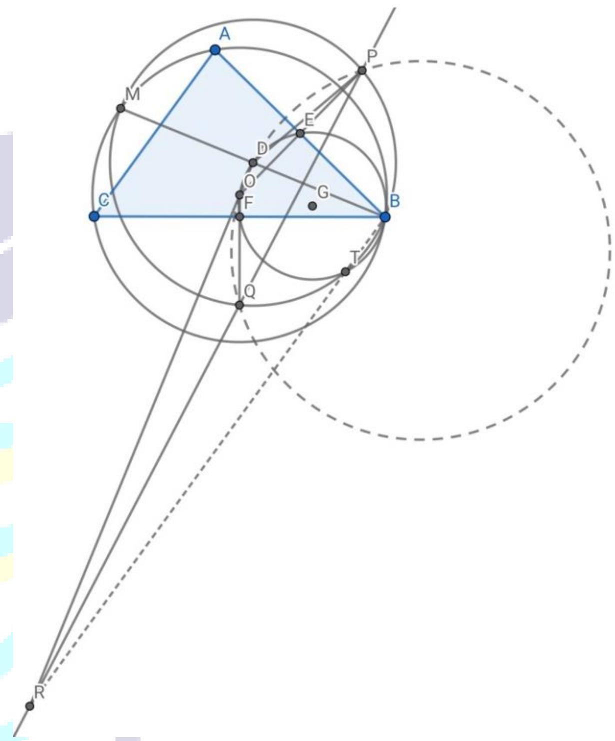
và $\angle \mathrm{DOP} = \angle \mathrm{DOE} = \frac{\angle \mathrm{B}}{2} = \angle \mathrm{ROQ}$ $\Rightarrow OD$ là phân giác ngoài ∠POQ. Mặt khác, $PD = DQ$

$\Rightarrow Q, O, P, D$ cùng thuộc đường tròn.

Mà R là giao điểm OD và PQ nên $RO.RD = RQ.RP$

$\Rightarrow R$ là tâm đẳng phương của ba đường tròn $(BM), (ODPQ), (OB)$.

$\Rightarrow B, R, T$ thẳng hàng với T là giao điểm thứ hai của đường tròn (OB) và (BM)

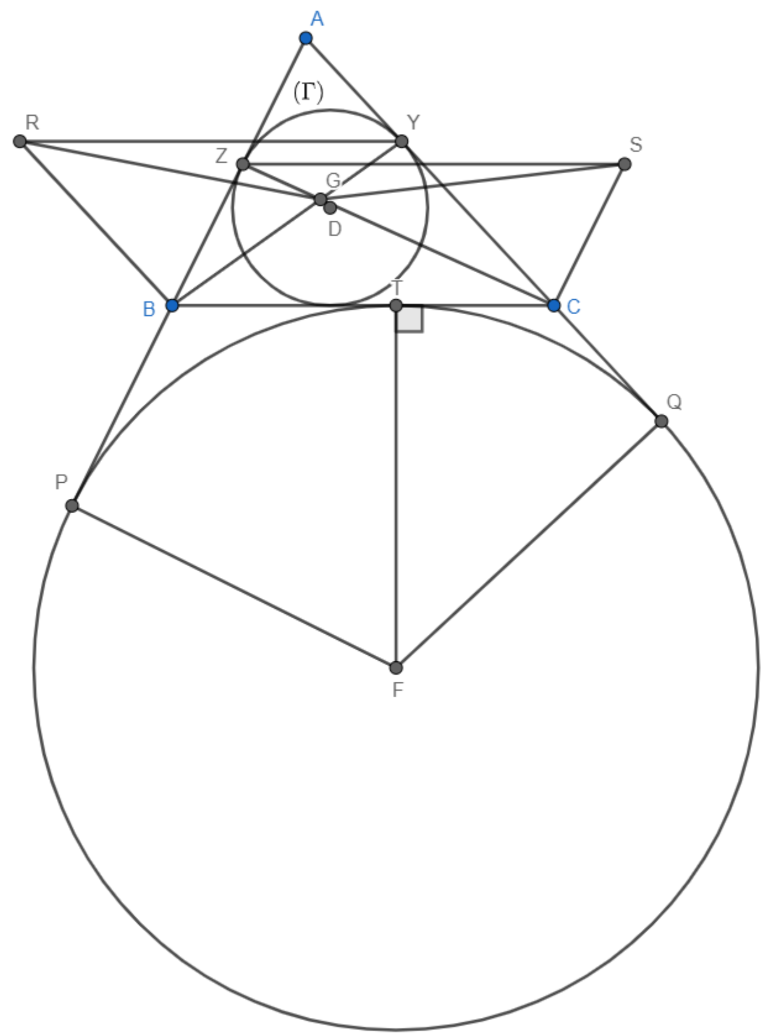


Ta có:

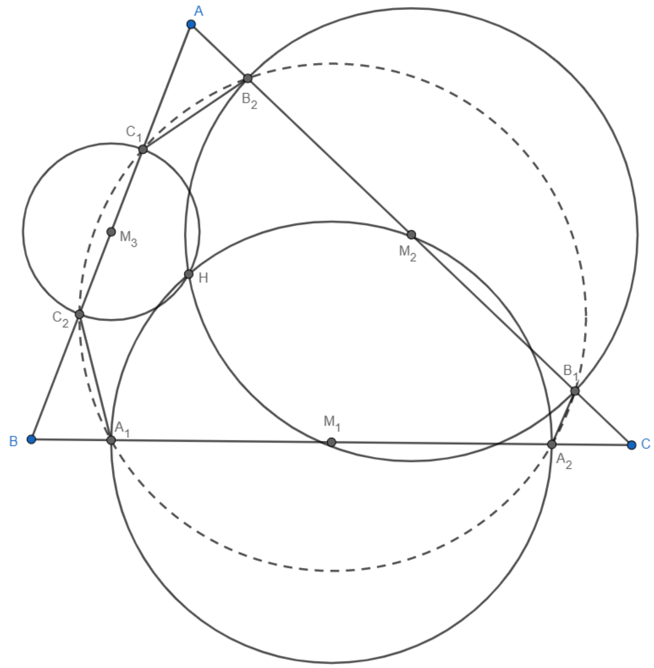
$\angle \mathrm{OTB} = 90^o$; $\angle \mathrm{MTB} = 90^o$ => M, O, T thẳng hàng và MO ⊥ BR mà MO ⊥ AC (do M là điểm giữa cung AC) $\Rightarrow BR \parallel AC$ (đpcm).

Bài 4:

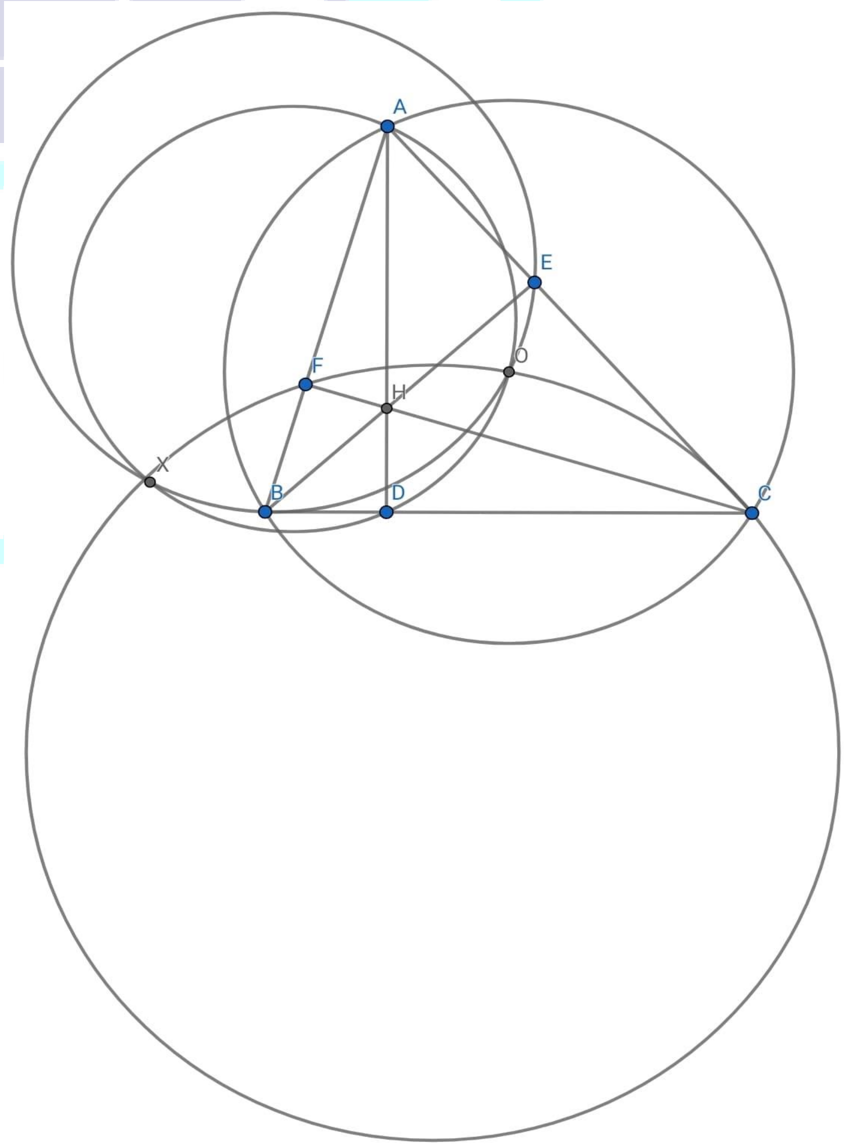
Gọi λ là đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC, tiếp xúc BC; CA; AB lần lượt tại T; Q; P.
Với Y; Z lần lượt là 2 tiếp điểm của đường tròn ℸ với AC; AB, ta có: $CY = BT = BP$ và $BZ = CT = CQ$.
$\Rightarrow ZP = BC = YQ = YR = ZS$ (vì 2 tứ giác $BCYR$ và $BCSZ$ là các hình bình hành).
Với $YQ = YR$ và $BR = CY = BT$, ta có: $P_{Y/(R;0)} = P_{Y/\lambda}$ và $P_{B/(R;0)} = P_{B/\lambda}$, do vậy BY là trục đẳng phương của đường tròn λ và đường tròn điểm $(R; 0)$, hoàn toàn tương tự CZ là trục đẳng phương của đường tròn λ và đường tròn điểm $(S; 0)$.
Với G là giao điểm của BY và CZ, ta có G là tâm đẳng phương của đường tròn λ và 2 đường tròn điểm $(R; 0)$ và $(S; 0)$.
Do đó: G thuộc trục đẳng phương của 2 đường tròn điểm $(R; 0)$ và $(S; 0)$, suy ra $GR^2 = GS^2$ hay $GR = GS$.


A
(Γ)
R
Y
S
Z
G
D
B
T
C
Q
P
F

Bài 5:



Ta có nhận xét rất hiển nhiên sau đây: H là tâm đẳng phương của 3 đường tròn $(M_1; M_1H)$, $(M_2; M_2H)$, $(M_3; M_3H)$.
Khi đó: đường thẳng qua H vuông góc với M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 lần lượt là trục đẳng phương của 3 cặp đường tròn theo thứ tự $((M_1; M_1H), (M_2; M_2H))$, $((M_2; M_2H), (M_3; M_3H))$, $((M_3; M_3H), (M_1; M_1H))$.
Với M_1, M_2, M_3 lần lượt là trung điểm BC; CA; AB, ta có: $M_1M_2 \parallel AB$, $M_2M_3 \parallel BC$, $M_3M_1 \parallel CA$, hay nói cách khác trục đẳng phương của 3 cặp đường tròn theo thứ tự $((M_1; M_1H), (M_2; M_2H))$, $((M_2; M_2H), (M_3; M_3H))$, $((M_3; M_3H), (M_1; M_1H))$ lần lượt là đường cao kẻ từ đỉnh A, B, C của ΔABC.
Ta có C thuộc trục đẳng phương của 2 đường tròn $(M_1; M_1H)$, $(M_2; M_2H)$, với A_1, A_2 thuộc $(M_1; M_1H)$, B_1, B_2 thuộc $(M_2; M_2H)$, A_1A_2 giao B_1B_2 tại C, ta có: $CA_1.CA_2 = CB_1.CB_2$, hay A_1, A_2, B_1, B_2 đồng viên, tương tự: A_1, A_2, C_1, C_2 đồng viên và C_1, C_2, B_1, B_2 đồng viên.



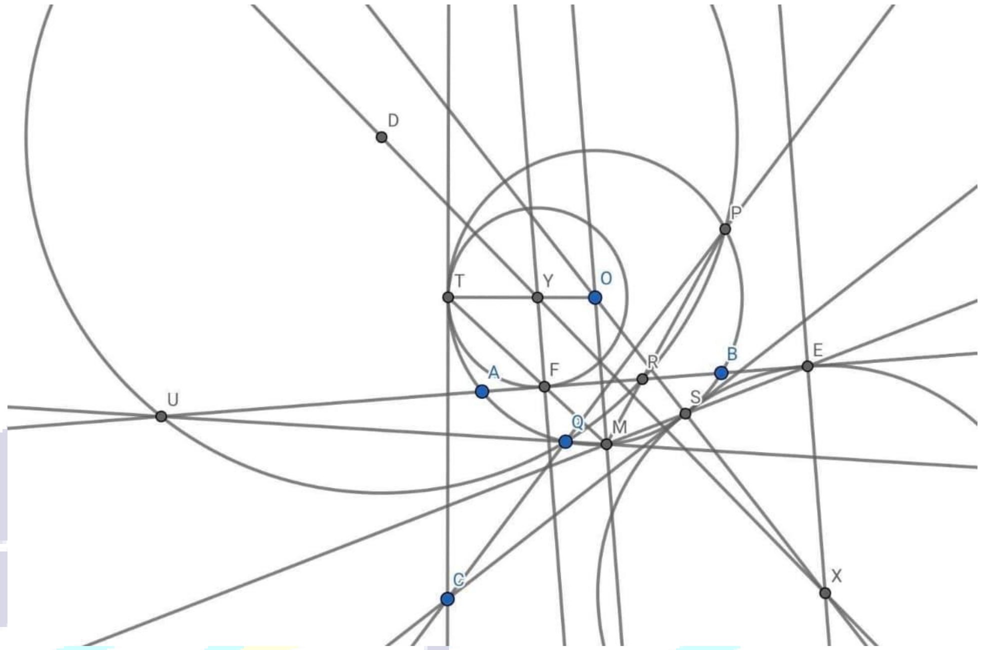
Giả sử 3 đường tròn $(A_1A_2B_1B_2)$, $(A_1A_2C_1C_2)$, $(B_1B_2C_1C_2)$ đôi một phân biệt, khi đó trục đẳng phương của 3 cặp đường tròn (chính là A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) đồng quy tại 1 điểm, nhưng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đôi một cắt nhau tại 3 điểm A, B, C phân biệt (vô lý).
Do đó: tồn tại 2 trong số 3 đường tròn $(A_1A_2B_1B_2)$, $(A_1A_2C_1C_2)$, $(B_1B_2C_1C_2)$, nói cách khác A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 đồng viên.

Bài 6:

Gọi H là trực tâm ΔABC.
Khi đó: H thuộc ba đường thẳng AD, BE, CF nên sẽ thuộc trục đẳng

phương của 3 cặp đường tròn $((AOD),(BOE)),((BOE),(COF)),((COF),(AOD))$.
Vì H khác O nên 3 đường tròn $(AOD),(BOE),(COF)$ đồng trục OH, do vậy tồn tại điểm X khác O và thuộc OH sao cho X thuộc cả 3 đường tròn $(AOD),(BOE),(COF)$, hay nói cách khác 3 đường tròn $(AOD),(BOE),(COF)$ đồng quy tại điểm X khác O.

Bài 7:



Gọi U là giao điểm MQ với AB
Với M là điểm chính giữa cung AB, theo bổ đề về điểm chính giữa cung, ta thu được đẳng thức sau:
$MA^2 = MB^2 = ME.MS = MD.MQ = MU.MQ = MR.MP = MF.MT$.
$\Rightarrow$ 4 điểm P,Q,R,U đồng viên, hay (PQR) đi qua U.
Với tiếp tuyến CS cùng cát tuyến CPQ, ta có: $CS2\ = CP.CQ$.
Vì $OM\ \perp\ AB$ nên $OM\ \parallel\ XE$, vì ΔOMS cân tại O nên ΔXES cân tại X, đặt $XE\ =\ XS\ =\ a$.
Vì $CS\ \perp\ XS$ tại S nên CS là tiếp tuyến của $(X;a)$ tại S, suy ra $P_{C/(X;a)} = CS^2 = CP.CQ = P_{C/(PQR)}$.
Vì $ME.MS = MP.MR$ nên $P_{M/(X;a)} = P_{M/(PQR)}$, kéo theo CM là trục đẳng phương của $(X;a)$ và (PQR), tương tự CM là trục đẳng phương của (PQR) và $(Y;b)$ với $b = YF$.
Do đó: 3 đường tròn $(X;a),(Y;b),(PQR)$ đồng trục, hay XY đi qua tâm (PQR).

Bài 8:

Gọi trực tâm tam giác DEF là H. Lần lượt gọi giao điểm của DH và (A,AD) là D', của EH và (B,BE) là E' và (C,CF) là F'.

$DD'\ \perp\ EF$ mà $AI\ \perp\ EF$ nên $DD'//AI$, dẫn đến DD' vuông góc phân giác ngoài góc A, mà $AD = AD'$ nên D' là ảnh đối xứng của D qua phân giác ngoài góc A, từ đó suy ra AD, AD' đẳng giác trong $\angle BAC$.

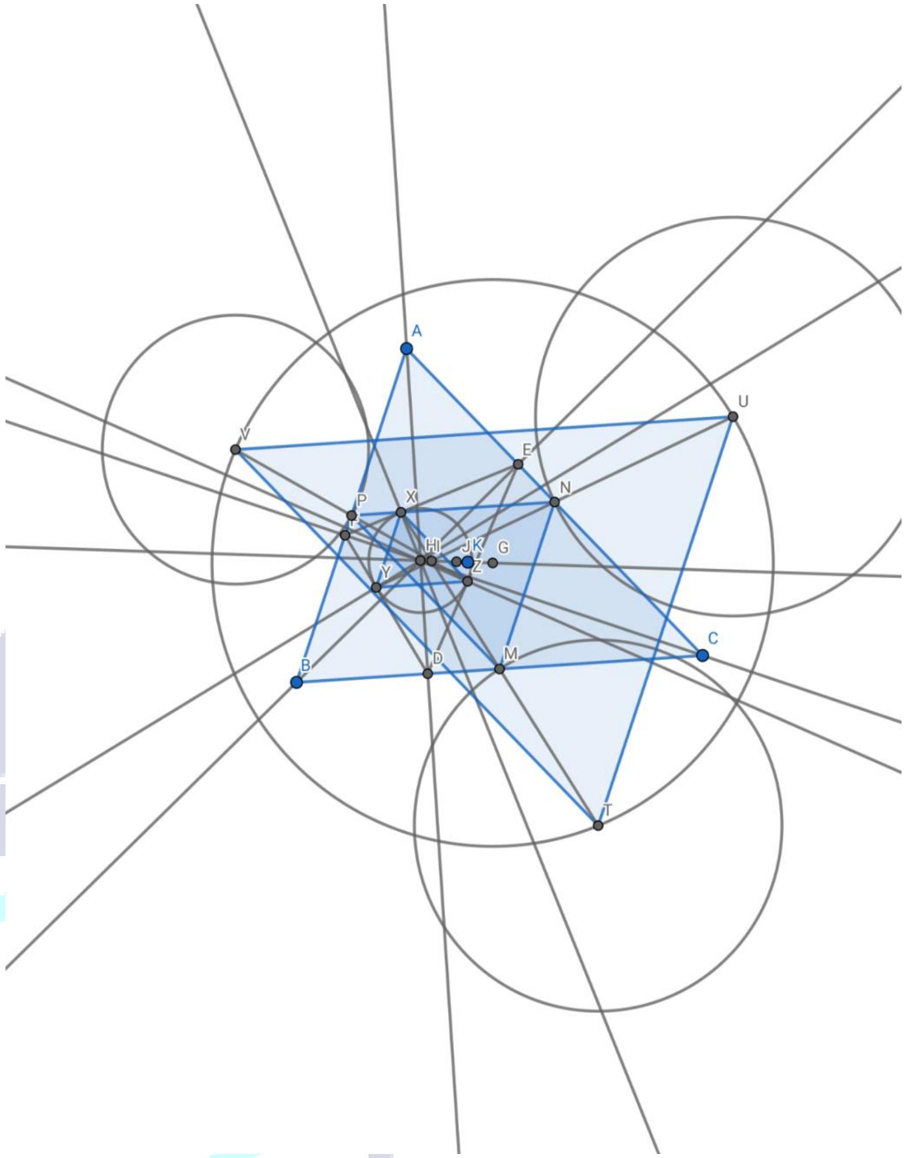
Gọi X là trung điểm cung BAC của (O), Y là trung điểm cung nhỏ BC của (O), T là giao của DX và OI.

$ID//OX$ (cùng vuông BC) nên áp dụng định lý Thales ta có $\frac{\overline{TI}}{\overline{TO}} = \frac{\overline{ID}}{\overline{OX}} = -\frac{r}{R}$

Gọi giao AI, DX là M. Ta có $(DT, MX) = I(DO, YX) = -1$. Mà $AX \perp AY$ nên AI phân giác $\angle DAT$ hay AD, AT đẳng giác trong $\angle BAC$ $\Longrightarrow D', A, T$ thẳng hàng. Do tỉ lệ $\frac{\overline{TI}}{\overline{TO}} = -\frac{r}{R}$ không phụ thuộc vào A, B, C nên chứng minh tương tự ta có E', B, T thẳng hàng, F', C, T thẳng hàng.

Xét phép vị tự tâm T biến I thành H. Dễ thấy phép vị tự này biến A thành D, biến B thành E, biến C thành F' nên $D'E'//AB$.

Gọi chân đường cao đỉnh D, E của tam giác DEF là D_1, E_1. Biến đổi góc ta có $D_1E_1 \perp FI$ nên $D_1E_1 \parallel AB \parallel DE$. Từ đây dễ chứng minh $EDE'D'$ nội tiếp, dẫn đến $P_{H/(A,AD)} = \overline{HD'}.\overline{HD} = \overline{HE}.\overline{HE'} = P_{H/(B,BE)}$, tương tự ta cũng có $P_{H/(A,AD)} = P_{H/(B,BE)} = P_{H/(C,CF)}$ nên H là tâm đẳng phương của 3 đường tròn.



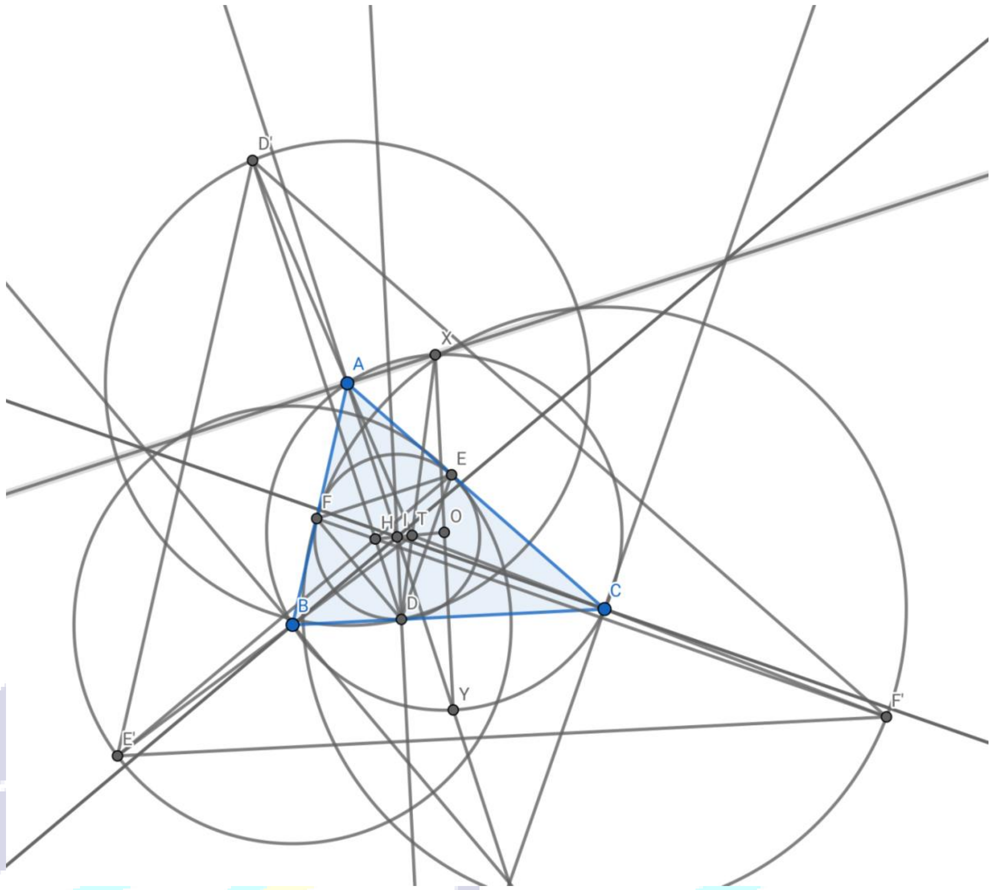
Bài 9:

Ta có H là tâm nội tiếp tam giác $DEF \Longrightarrow DH \perp YZ \Longrightarrow YZ//BC$. Tương tự ta có $XY//AB, XZ//AC$.

Ta cũng có $PN//BC, MP//AC, MN//AB$ (do lần lượt là đường trung bình đỉnh A, B, C của tam giác ABC).

Theo giả thiết, P, N lần lượt là trung điểm VZ, UY nên $2\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{YZ}$, mà NP, YZ đều song song BC nên $UV//BC$. Tương tự ta có $UT//AB, VT//AC$.

Vậy ta có $VT//PM//ZX, TU//MN//XY, UV//NP//YZ$ nên ba đường thẳng ZV, YN, MX đồng quy tại một điểm I, chính là tâm của phép vị tự biến tam giác XYZ thành tam giác MNP, phép vị tự này biến H (tâm ngoại tiếp tam giác XYZ) thành tâm Euler (tâm ngoại tiếp tam giác MNP) nên I nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC. Dễ thấy tâm ngoại tiếp tam giác TUV (gọi là G) cũng nằm trên đường thẳng này. Bây giờ ta chứng minh tâm đẳng phương của $(T, TM), (U, UN), (V, VP)$ nằm trên GI.



Xét điểm K trên GI, tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{KG} = k\overrightarrow{GI}$

Ta có $KV^2 = (\mathrm{KG} + \mathrm{GV})^2 = (\mathrm{kGI} + \mathrm{GV})^2 = \mathrm{k}^2\mathrm{GI}^2 + \mathrm{GV}^2 + 2\mathrm{kGI.GV}$

Và $IV^2 = (\mathrm{IG} + \mathrm{GV})^2 = \mathrm{GI}^2 + \mathrm{GV}^2 - 2\mathrm{GI.GV}$

Nên $KV^2 + k.IV^2 = (k^2 + k)GI^2 + (k + 1)GV^2$

Do $GV = GU = GT$ nên ta có $KV^2 + k.IV^2 = KT^2 + k.IT^2 = KU^2 + kIU^2$

Do tồn tại phép vị tự tâm I biến tam giác MNP thành tam giác TUV nên tồn tại số thực l:

$$\frac{VP}{VI} = \frac{TM}{TI} = \frac{UN}{UI} = l$$

Chọn $k = -l^2$ ta có $KV^2 - VP^2 = KT^2 - TM^2 = KU^2 - UN^2$ hay phương tích từ K đến ba đường tròn $(T, TM), (U, UN), (V, VP)$ bằng nhau nên K là tâm đẳng phương của 3 đường tròn. Theo cách dựng K, ta có điều phải chứng minh.

Tính chất khác: G cũng là tâm của (ABC).

Tải liệu tham khảo:

- Tham khảo tài liệu của một số thầy cô khác.

- Art of Problem Solving

- "Định hướng bồi dưỡng học sinh năng khiếu toán" – Thầy *Lê Anh Vinh*.