TỔ CHỨC THE GIFTED BATTLEFIELD DỰ ÁN CHICKEN MINDS	KỲ THI THỬ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2025 – 2026
HƯỚNG DẪN CHẤM THI **Đề thi thử**	Môn thi chuyên: **TOÁN** Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian phát đề) Ngày làm bài thi: **23/4/2025 – 05/5/2025** *Hướng dẫn chấm thi gồm 09 trang*

I. Hướng dẫn chung

1. Giám khảo chấm đúng theo Hướng dẫn chấm của Dự án Chicken Minds – Tổ chức The Gifted Battlefield.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. Đáp án và biểu điểm

Bài 1. (3,0 điểm)

(a) Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$.

(b) Một người nông dân có $400\,\text{m}$ hàng rào. Ông ta muốn dùng $400\,\text{m}$ hàng rào ấy để rào lại một cánh đồng hình chữ nhật có đúng 1 cạnh tiếp giáp với một con sông. Ông ấy không cần phải rào cạnh giáp bờ sông. Giả sử rằng mép của dòng sông là một đường thẳng. Hỏi người nông dân có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là bao nhiêu nghìn mét vuông?

(c) Bạn Phương và bạn Phát lần lượt được đưa ngẫu nhiên một số nguyên không âm không vượt quá 4049. Tính xác suất để số của bạn Phương trừ đi số của bạn Phát có kết quả lớn hơn hoặc bằng 2025.

Câu	Hướng dẫn	Điểm
a	**Giải phương trình sau:** $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$.	**1,25**
	Điều kiện xác định: $x\geq 1$.	
	Phương trình ban đầu tương đương với $(\sqrt[3]{x+6}-2)+(x^2-4)+(\sqrt{x-1}-1)=0$.	0,25
	Nhân các biểu thức ở ngoặc tròn thứ nhất và thứ ba với biểu thức liên hợp tương ứng, ta thu được $$\frac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+(x-2)(x+2)+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=0.$$	0,25
	Đặt $x-2$ làm nhân tử chung cho biểu thức ở vế trái, ta được $$(x-2)\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+x+2+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right]=0.$$	0,25
	Từ đây ta chia thành hai trường hợp. **Trường hợp 1:** $x-2=0$ hay $x=2$, thỏa mãn điều kiện.	0,25

	Trường hợp 2: $$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+x+2+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=0.$$ Tuy nhiên, ta dễ dàng thấy $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}>0$, và vì $x \geq 1$ nên $x+2>0$ và $\sqrt[3]{x+6}>0$, kéo theo $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}>0$. Vậy vế trái lớn hơn 0, suy ra trường hợp 2 không xảy ra. Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=2$.	0,25
b	**Hỏi người nông dân có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là bao nhiêu nghìn mét vuông?**	**1**
	Đặt x (m) là độ dài cạnh tiếp giáp với con sông, và y (m) là độ dài cạnh kề cạnh tiếp giáp với con sông ($x>0$, $y>0$). Theo giả thiết, ta có $x+2y=400$, và $S=xy$ là diện tích của cánh đồng.	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho hai số thực dương x và $2y$, ta thu được $$400=x+2y \geq 2\sqrt{2xy}=2\sqrt{2S},$$ suy ra $$S \leq 200^2 \cdot \frac{1}{2}=20\,000\,(\mathrm{m}^2).$$	0,5
	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2y=200$, hay $x=200$ và $y=100$. Vậy diện tích lớn nhất của cánh đồng là $20\,000\,\mathrm{m}^2$.	0,25
c	**Tính xác suất để số của bạn Phương trừ đi số của bạn Phát có kết quả lớn hơn hoặc bằng** 2025.	**0,75**
	Gọi P và Q lần lượt là số của bạn Phương và bạn Phát ($0 \leq P, Q \leq 4049$). Theo đề bài thì $P-Q \geq 2025$. Gọi A là biến cố "số của bạn Phương trừ đi số của bạn Phát có kết quả lớn hơn hoặc bằng 2025". Có tổng cộng $4050 \cdot 4050 = 4050^2$ cặp số (P,Q) mà Phương và Phát nhận được, nên không gian mẫu của phép thử có $n(\Omega)=4050^2$ phần tử.	0,25
	Trước hết ta chú ý rằng nếu $Q \geq 2025$ thì không tồn tại P thỏa mãn yêu cầu đề bài, suy ra $0 \leq Q \leq 2024$.	0,25
	Với mỗi giá trị Q nằm trong khoảng này, để $P-Q \geq 2025$ thì P phải thỏa mãn điều kiện $Q+2025 \leq P \leq 4049$. Điều đó có nghĩa là với mọi Q thỏa mãn $0 \leq Q \leq 2024$, số lượng giá trị P thỏa mãn bằng $$4049-(Q+2025)+1=2025-Q.$$	
	Vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố A bằng $$n(A)=\sum_{Q=0}^{2024}(2025-Q)=2025\times 2024-\sum_{Q=0}^{2024}Q=\frac{2026\cdot 2025}{2}.$$ Vậy xác suất của biến cố A bằng $$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2025\cdot 2026}{4050^2}=\frac{1013}{8100}.$$	0,25

Bài 2. (1,0 điểm)

Cho hệ phương trình trên tập số thực:

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \\ a^2+b^2+c^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng mọi bộ ba số thực (a, b, c) thỏa mãn hệ phương trình đều có dạng $\left(\pm 1, x, \dfrac{1}{x}\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Hướng dẫn	Điểm
Đặt $p=a+b+c$, $q=ab+ac+bc$, $r=abc$. Hệ phương trình ban đầu tương đương với $$\begin{cases} pr=q & (1) \\ r^2(p^2-2q)=q^2-2pr & (2). \end{cases}$$	0,25
Thay phương trình (1) vào phương trình (2), ta thu được $r^2(p^2-2pr)=p^2r^2-2pr$, hay $$2pr(r^2-1)=0. \quad (3)$$ Vì $a, b, c \neq 0$ nên $r \neq 0$, tức là $p=0$, $r=1$ hoặc $r=-1$. **Trường hợp 1:** Nếu $p=0$ thì theo phương trình (1), $q=0$. Theo định lí Vieta đảo, a, b, c là ba nghiệm của phương trình (ẩn x) $x^3-r=0$, hay $$(x-\sqrt[3]{r})\left[\left(x+\frac{1}{2}\sqrt[3]{r}\right)^2+\frac{3}{4}\sqrt[3]{r}\right]=0. \quad (4)$$ Có thể thấy, vì $r \neq 0$ nên $\left(z+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{r}\right)^2+\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{r^2}>0$, tức là phương trình (4) chỉ có một nghiệm thực $x=\sqrt[3]{r^2}$, vô lí. Vậy $p \neq 0$.	0,25
Trường hợp 2: Nếu $r=1$ thì theo phương trình (3), $p=q$. Khi này, theo định lí Vieta đảo, a, b, c là các nghiệm của phương trình (ẩn x) $x^3-px^2+px-1=0$, hay $$(x-1)[x^2-(p-1)x+1]=0. \quad (5)$$ Theo bất đẳng thức AM–GM, $$\begin{aligned} p^2-2p=p^2-2q&=a^2+b^2+c^2 \\ &\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \\ &=3\sqrt[3]{r^2}=3, \end{aligned}$$ hay $(p-1)^2-4 \geq 0$. Đây cũng chính là điều kiện để phương trình bậc hai trong ngoặc vuông có hai nghiệm. Vậy phương trình (5) có ba nghiệm: một nghiệm $x=1$, và hai nghiệm còn lại có tích bằng 1, suy ra $(a, b, c)=\left(1, \dfrac{1}{x}, x\right)$ và các hoán vị. **Trường hợp 3:** Nếu $r=-1$ thì $p=-q$. Tương tự, theo định lí Vieta đảo, a, b, c là các nghiệm của phương trình $x^3-px^2-px+1=0$, hay $(x+1)[x^2-(p-1)x+1]=0$. Lập luận tương tự trường hợp 2, ta thu được $(a, b, c)=\left(-1, \dfrac{1}{x}, x\right)$ và các hoán vị. Vậy mọi bộ ba số thực (a, b, c) thỏa mãn hệ phương trình đều có dạng $\left(\pm 1, \dfrac{1}{x}, x\right)$ với mọi $x \neq 0$.	0,5

Bài 3. (2,0 điểm)

Với k là số nguyên dương, xét phương trình nghiệm nguyên dương với ẩn a, b, c:

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = k.$$

(a) Chứng minh rằng với $k = 2025^{2024}$, phương trình vô nghiệm.

(b) Tìm số giá trị $k \leq 2024$ sao cho phương trình có nghiệm nguyên dương.

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Hướng dẫn</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="3">a</td><td>Chứng minh rằng với $k = 2025^{2024}$, phương trình vô nghiệm.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Ta có

$$\begin{aligned} a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) &= a^3(b-c) + b^3(c-a+b-b) + c^3(a-b) \\ &= (b-c)(a^3-b^3) - (a-b)(b^3-c^3) \\ &= (b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2) \\ &= (b-c)(a-b)[(a-c)(a+b+c)+(a-b)(b-c)] \\ &= (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c). \end{aligned}$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Trong các số a, b, c, phải có hai số cùng tính chẵn lẻ. Vì vậy, một trong các hiệu $a-b$, $b-c$, $a-c$ phải chẵn, dẫn đến biểu thức $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$ luôn chẵn. Do đó, phương trình $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = 2025^{2024}$ vô nghiệm vì vế phải là số lẻ.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="5">b</td><td>Tìm số giá trị $k \leq 2024$ sao cho phương trình có nghiệm nguyên dương.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Ta sẽ chứng minh rằng $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$ luôn chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương a, b, c. Thật vậy,

– Nếu hai số trong ba số a, b, c có cùng số dư khi chia cho 3 thì hiệu của hai số đó chia hết cho 3.

– Nếu các số dư của cả ba số khi chia cho 3 khác nhau, thì $a+b+c \equiv 0+1+2 \equiv 0 \pmod 3$.

Lại chú ý rằng theo câu a, $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ luôn chia hết cho 2, và $(2,3)=1$ nên biểu thức này luôn chia hết cho 6.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Ngoài ra, không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a,b,c\}$, kéo theo $a > b > c$ (nếu không thì $k \leq 0$). Khi đó,

$$a-b \geq 1, \quad b-c \geq 1, \quad a-c \geq 2, \quad a+b+c \geq 3c+3 \geq 6.$$

Vì vậy, $k \geq 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$. Điều kiện cần là k chia hết cho 6 và $k \geq 12$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Ta sẽ chứng minh rằng đây cũng chính là điều kiện đủ. Đặt $k = 6m$ với m là số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 2. Chọn a, b, c sao cho $a-b=1$, $b-c=1$ thì $a-c=2$ và $a+b+c=3c+3$. Thay vào phương trình ban đầu, ta thu được:

$$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (3c+3) = 6m,$$

hay $c = m-1$. Do đó, phương trình luôn có nghiệm nguyên dương là $(m+1, m, m-1)$ và các hoán vị.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vậy số giá trị k cần tìm là:

$$\left\lfloor \frac{2024}{6} \right\rfloor - 1 = 336.$$</td><td>0,25</td></tr>
</table>

Bài 4. (3,0 điểm)

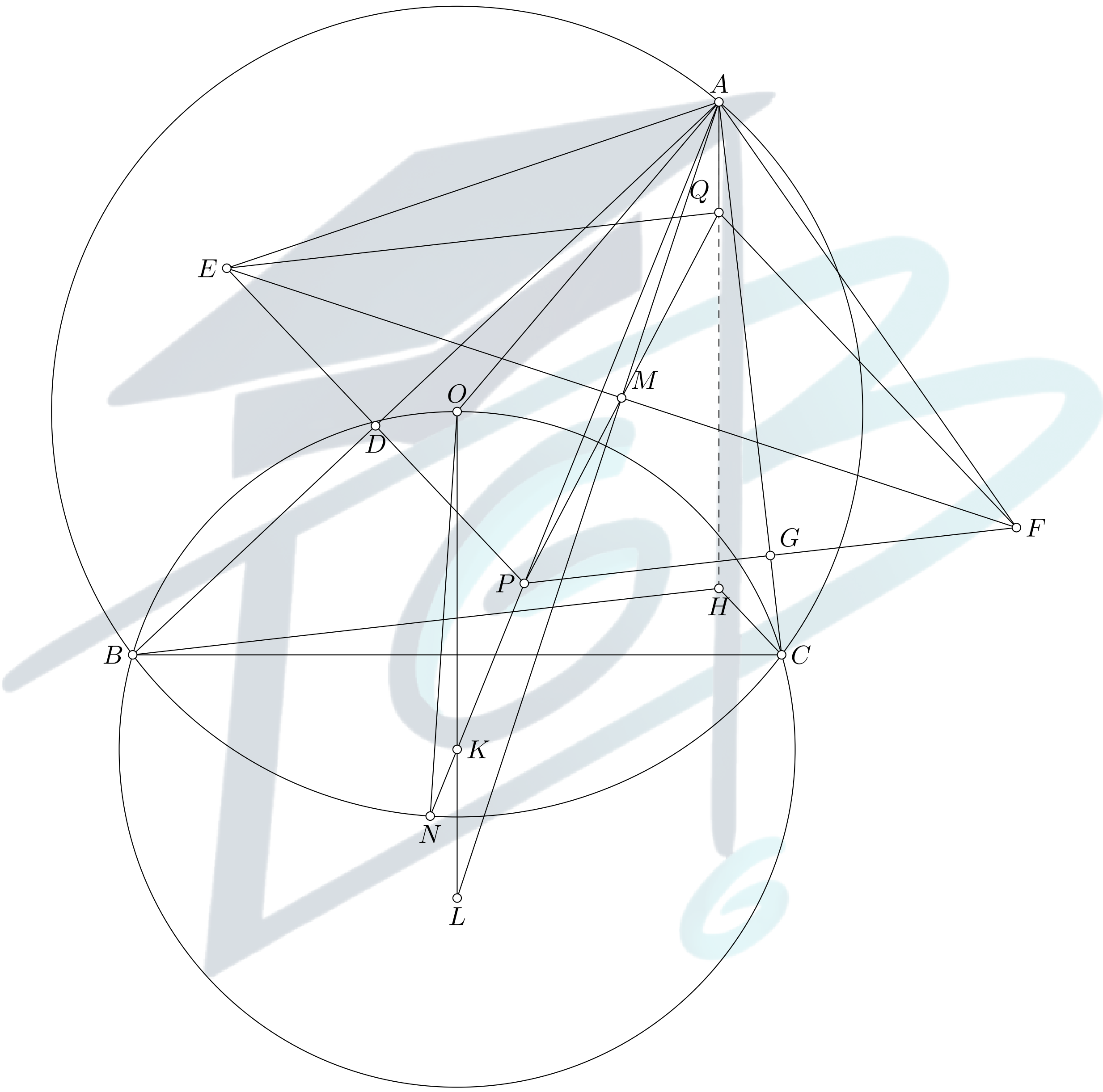
Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC, P là một điểm nằm trên tia AK, và E, F lần lượt là điểm đối xứng của P qua các cạnh AB, AC. PE cắt AB tại D, PF cắt AC tại G. Gọi M là trung điểm EF.

(a) Chứng minh $AM \perp EF$ và $\widehat{MAB} = \widehat{PAC}$.

(b) Gọi L là điểm đối xứng của O qua BC. Chứng minh $OK \cdot OL = R^2$.

(c) Chứng minh ba điểm A, M, L thẳng hàng.

(d) Gọi Q là điểm đối xứng của P qua M. Chứng minh $AQ \perp BC$.



Câu	Hướng dẫn	Điểm
a	**Chứng minh** $AM \perp EF$ **và** $\widehat{MAB} = \widehat{PAC}$.	**1**
	Xét thế hình như hình vẽ; các trường hợp khác chứng minh tương tự.	
	Vì E và F lần lượt đối xứng với P qua AB và AC nên $AE = AF = AP$, hay $\triangle AEF$ cân. Lại có M là trung điểm EF nên $AM \perp EF$.	0,25

	Nhận thấy D và G lần lượt là trung điểm của PE và PF nên DG là đường trung bình của $\triangle PEF$, suy ra $DG \parallel EF$. Ngoài ra, tứ giác $AMDE$ nội tiếp vì $\widehat{AME} = \widehat{ADE} = 90^\circ$, và tứ giác $ADPG$ nội tiếp vì $\widehat{ADP} = \widehat{AGP} = 90^\circ$. Vì vậy, ta có biến đổi góc $$\begin{aligned}\widehat{MAB} &= \widehat{PEF} \quad \text{(tứ giác } AMDE \text{ nội tiếp)}\\ &= \widehat{PDG} \quad (DG \parallel EF)\\ &= \widehat{PAC} \quad \text{(tứ giác } ADPG \text{ nội tiếp).}\end{aligned}$$	0,75
b	**Chứng minh $OK \cdot OL = R^2$.**	**0,5**
	Vì $\widehat{OKC} = 2\widehat{OBC} = 2\widehat{OCB} = \widehat{OCL}$ nên $\triangle OCK \sim \triangle OLC$ (g – g), suy ra $\dfrac{OC}{OL} = \dfrac{OK}{OC}$ hay $OL \cdot OK = OC^2 = R^2$.	0,5
c	**Chứng minh ba điểm A, M, L thẳng hàng.**	**0,75**
	Vì $OK \cdot OL = R^2 = OA^2$ nên $\triangle OAL \sim \triangle OKA$, suy ra $\widehat{OAL} = \widehat{OKA}$.	0,25
	Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$. Vì $AH \parallel OK$ (cùng vuông góc BC) nên $\widehat{HAK} = \widehat{AKO} = \widehat{OAL}$.	0,25
	Lại chú ý rằng $\widehat{OAB} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 2\widehat{AOB}) = 90^\circ - \widehat{BCA} = \widehat{CAH}$, nên ta có biến đổi góc $$\begin{aligned}\widehat{CAH} + \widehat{HAP} &= \widehat{OAB} + \widehat{OAL}\\ \widehat{PAC} &= \widehat{LAB}\\ \widehat{MAC} &= \widehat{LAB}. \quad \text{(câu a)}\end{aligned}$$ Vậy A, M, L thẳng hàng.	0,25
d	**Chứng minh $AQ \perp BC$.**	**0,75**
	Gọi N là giao điểm thứ hai của AK và (O) (N khác A). Ta có $\widehat{NBC} = \widehat{NAC} = \widehat{MAB} = \widehat{PEF}$. Tương tự, $\widehat{NCB} = \widehat{PFE}$ nên $\triangle NBC \sim \triangle PEF$ (g – g). Vì M là trung điểm của cả hai đường chéo PQ, EF của tứ giác $PEQF$ nên tứ giác $PEQF$ cũng chính là hình bình hành, suy ra $\triangle PEF = \triangle QFE$. Vậy $\triangle NBC \sim \triangle QFE$, suy ra $$\frac{NC}{QE} = \frac{BC}{EF}. \qquad (1)$$	0,25
	Hai tam giác AEF và LCB lần lượt cân tại A và L có $\widehat{EAF} = 2(\widehat{PAB} + \widehat{PAC}) = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{BLC}$ nên đồng dạng với nhau, suy ra $$\frac{LC}{AE} = \frac{BC}{EF}. \qquad (2)$$ Từ hai cặp tam giác đồng dạng trên, ta cũng thu được $\widehat{NCB} = \widehat{QEF}$ và $\widehat{LCB} = \widehat{AEF}$ nên $\widehat{LCB} - \widehat{NCB} = \widehat{AEF} - \widehat{QEF}$, hay $$\widehat{NCL} = \widehat{AEQ}. \qquad (3)$$ Từ (1), (2) và (3) ta thu được $\triangle NLC \sim \triangle QAE$ (c – g – c). Với chú ý $\widehat{OLC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BLC} = \dfrac{1}{2}\widehat{FAE} = \widehat{MAE}$, ta có biến đổi góc $$\begin{aligned}\widehat{NLC} &= \widehat{QAE}\\ \widehat{NLC} - \widehat{OLC} &= \widehat{QAE} - \widehat{MAE}\\ \widehat{NLO} &= \widehat{QAL}.\end{aligned}$$	0,25

	Cuối cùng, chú ý rằng $\widehat{OLA} = \widehat{OAK} = \widehat{ONA}$ nên tứ giác $AOLN$ nội tiếp, suy ra $$\widehat{QAL} = \widehat{NLO} = \widehat{NAO} = \widehat{ONA} = \widehat{OLA},$$ kéo theo $AQ \parallel OL$. Mà $OL \perp BC$ nên $AQ \perp BC$. $\square$	0,25

Bài 5. (1,0 điểm)

Trên bàn có m ($m \in \mathbb{Z}^+$) hình vuông có độ dài cạnh bằng 1. Ta có thể thao tác như sau: bỏ khỏi bàn 1 hình vuông có độ dài cạnh là s và thêm vào bàn 2 hình vuông có độ dài cạnh lần lượt là $\frac{s}{3}$ và $\frac{2s}{3}$.

Với số nguyên không âm k bất kì, ta gọi một hình vuông là loại k nếu cần k lần thao tác để thu được nó từ hình vuông ban đầu (chẳng hạn, các hình vuông ban đầu là loại 0).

(a) Chứng minh rằng: với mọi $k \in \mathbb{N}$, có thể chọn được tối đa $k+1$ hình vuông loại k trên bàn sao cho độ dài của chúng đôi một phân biệt.

(b) Tìm tất cả $m \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn: khi thực hiện các thao tác, trên bàn luôn tồn tại 2 hình vuông mà chúng có cùng độ dài cạnh tại mọi thời điểm.

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Hướng dẫn</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>a</td><td>Chứng minh rằng: với mọi $k \in \mathbb{N}$, có thể chọn được tối đa $k+1$ hình vuông loại k trên bàn sao cho độ dài của chúng đôi một phân biệt.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Vì mỗi lần thao tác, độ dài cạnh sẽ được nhân với $\frac{1}{3}$ hoặc $\frac{2}{3}$ nên sau k lần thao tác thì độ dài cạnh của hình vuông loại k sẽ bằng
$$\frac{1^t \cdot 2^{k-t}}{3^k} = \frac{2^{k-t}}{3^k},$$
với t $(0 \leq t \leq k)$ là số lần thao tác với hình vuông cạnh $\frac{1}{3}$. Có tối đa $k+1$ giá trị của t, nên có tối đa $k+1$ hình vuông loại k trên bàn sao cho độ dài của chúng đôi một phân biệt.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Tìm tất cả $m \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn: khi thực hiện các thao tác, trên bàn luôn tồn tại 2 hình vuông mà chúng có cùng độ dài cạnh tại mọi thời điểm.</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td></td><td>Với $1 \leq m \leq 3$, ta thao tác như sau:
• Hình vuông thứ nhất ta giữ nguyên: $\{1\}$.
• Hình vuông thứ hai (nếu có) ta thao tác như sau: $\{1\} \longrightarrow \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.
• Hình vuông thứ ba (nếu có) ta thao tác như sau: $\{1\} \longrightarrow \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} \longrightarrow \left\{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right\} \longrightarrow \left\{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{4}{27}, \frac{4}{9}\right\}$.
Sau khi thực hiện thao tác thì ta được một thời điểm mà không có bất kỳ cặp hình vuông nào có độ dài cạnh bằng nhau.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta chứng minh rằng tất cả các giá trị $m \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn là $m \geq 4$.
Sau k lần thao tác, ta gán cho hình vuông loại i giá trị bằng $\frac{1}{2^i}$. Gọi T_k là tổng của tất cả các giá trị được gán trên tất cả các hình vuông tại thời điểm sau k lần thao tác (chẳng hạn, nếu sau 1 lần thao tác ta có 1 hình vuông loại 0 và 2 hình vuông loại 1 thì $T_1 = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$). Ta có nhận xét sau:
Nhận xét. T_k là một đại lượng bất biến.
Thật vậy, nếu ta thực hiện thêm một thao tác lên một hình vuông loại i có giá trị $\frac{1}{2^i}$, ta sẽ thu được hai hình vuông loại $i+1$ có tổng giá trị bằng $2 \cdot \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^i}$, nghĩa là giá trị T_k trước và sau thao tác không đổi. Vậy $m = T_0 = T_1 = \ldots = T_k = T_{k+1}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.</td><td>0,25</td></tr>
</table>

	Giả sử tồn tại thời điểm sau k lần thao tác mà không 2 hình vuông nào có cùng độ dài cạnh. Gọi j ($j \geq 1$) là giá trị lớn nhất của loại hình vuông. Theo câu a), vì số hình vuông loại j có độ dài cạnh khác nhau đôi một không vượt quá $j+1$, và không 2 hình vuông có cùng độ dài cạnh nên có tối đa $j+1$ hình vuông loại j. Điều đó có nghĩa $$4 \leq m = T_k \leq \sum_{i=0}^{j} \frac{i+1}{2^i}. \quad (1)$$ Tuy nhiên, ta chú ý rằng $$\begin{aligned} T_k &= 2T_k - T_k \\ &= \left(2 + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{i+2}{2^i}\right) - \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i+1}{2^i} + \frac{j+1}{2^j}\right) \\ &= 2 - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(i+2)-(i+1)}{2^i} - \frac{j+1}{2^j} \\ &\leq 2 + \underbrace{\sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^i}}_{N}, \end{aligned}$$ mà $$\begin{aligned} N &= 2N - N \\ &= \left(2 + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2^i}\right) - \left(\sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{j-1}}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{2^{j-1}} \\ &< 2 \end{aligned}$$ nên $T_k < 2 + 2 = 4$, mâu thuẫn với (1). Vậy điều giả sử sai, hay tại mọi thời điểm, trên bàn luôn có 2 hình vuông có độ dài cạnh bằng nhau.	0,25

– HẾT –