PHƯƠNG TRÌNH HÀM

MỘT SỐ KĨ THUẬT CƠ BẢN

T G B

MỤC LỤC

Các bạn có thể click vào đề bài để di chuyển đến lời giải của bài toán đó và click vào số trang để quay về trang đầu

Định nghĩa

a) **Hàm số:** Cho X, Y là các tập con của tập hợp số thực $\mathbb{R}$. Hàm số f là một quy tắc cho tương ứng mỗi giá trị $x \in X$ với một và chỉ một giá trị $y \in Y$, kí hiệu là $y = f(x)$. Đặt $f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$ gọi là tập ảnh của tập X.

b) **Đơn ánh, toàn ánh, song ánh:**

Đơn ánh: Hàm số $f: A \to B$ được gọi là đơn ánh nếu với mọi $a_1, a_2 \in A$ mà $a_1 \neq a_2$ thì $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Chú ý: Hàm số $f: A \to B$ đơn ánh nếu với mọi $f(a_1) = f(a_2)$ thì $a_1 = a_2$.

Toàn ánh: Hàm số $f: A \to B$ được gọi là toàn ánh nếu với mọi $b \in B$ mà thì luôn tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$.

Chú ý: Hàm số $f: A \to B$ là toàn ánh $\Leftrightarrow f(A) = B$.

Song ánh: Hàm số $f: A \to B$ được gọi là song ánh nếu hàm f vừa đơn ánh, vừa toàn ánh

Chú ý. Hàm số $f: A \to B$ là song ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ thì tồn tại duy nhất $a \in A$ sao cho $f(a) = b$.

c) **Hàm số ngược:** Hàm số $f: A \to B$ là hàm song ánh. Khi đó, hàm ngược của f, ký hiệu là f^{-1}, là hàm xác định bởi $f^{-1}: B \to A$ sao cho với mỗi $b \in B$ mà $f(a) = b$ $(a \in A)$ thì $f^{-1}(b) = a$.

d) **Hàm số chẵn, hàm số lẻ:** Xét hàm $f: X \to X$:

Hàm f gọi là hàm chẵn nếu với mọi $x \in X$ thì $-x \in X$ và $f(-x) = f(x)$.

Hàm f gọi là hàm lẻ nếu với mọi $x \in X$ thì $-x \in X$ và $f(-x) = -f(x)$.

e) **Hàm số tuần hoàn:** Xét hàm $f: X \to X$ và T là một số thực dương.

Hàm f gọi là tuần hoàn nếu thỏa mãn cả 2 điều kiện sau:

i) $\forall x \in X$ thì $x + T \in X$.

ii) $\forall x \in X$ thì $f(x + T) = f(x)$.

Phương pháp

1. *Phương pháp thế:*

Phương pháp thế biến có lẽ là được sử dụng nhiều nhất trong các bài toán phương trình hàm. Thông thường, ta có thể:

- Cho x, y... nhận các *giá trị đặc biệt*, thường là $0, \pm 1, \pm 2, -x, -y, y, x$ ...
- Làm *giảm* f bằng cách làm cho các f triệt tiêu hoặc trở thành f(số).
- Tìm *mối quan hệ* giữa $f(x)$ và $f(-x)$, nếu có x^2 thì thế $x \to -x$.
- *Tính bằng hai cách*: Ta tính biểu thức A theo 2 cách, rồi cho 2 cách đó bằng nhau. Đặc biệt, ta thường sử dụng phép thế đối xứng để tính các đại lượng có x, y đối xứng bằng 2 cách.

Quy ước: Trong bài viết này (và những bài viết về phương trình hàm sau này), ta quy ước kí hiệu $P_{(1)}(x, y)$ là phép thế x, y vào phương trình (1). Đồng thời, $P(x, y)$ là phép thế x, y vào phương trình đề bài.

Ví dụ 1.1. Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f(xy) - f(x-y) + f(x+y+1) = -3xy - 6y - 2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 1.2. *(HSG TP HCM 2002 – 2003)* Tìm tất cả hàm số $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa:

$$\begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{2} \\ f(xy) = f(x)f\left(\dfrac{2}{y}\right) + f(y)f\left(\dfrac{2}{x}\right) \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Ví dụ 1.3. Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)\big(f(x) + f(y)\big) \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 1.4. Tìm các hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f(y) + f\big(x + f(y)\big) = y + f\Big(f(x) + f\big(f(y)\big)\Big) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Lời giải + Nhận xét
Ví dụ 1.1, 1.2

Ví dụ 1.1.

$f(xy)-f(x-y)+f(x+y+1)=-3xy-6y-2\ \forall x\in R\quad(1)$

Thay y thành $-\frac{1}{2}$ vào (1) : $f\left(-\frac{x}{2}\right)=\frac{3x}{2}+1(2)$

Thay x thành $-2x$ vào (2) : $f(x)=-3x+1$

Thử lại $f(x)=-3x+1$ vào (1), ta thấy thỏa mãn.

<u>Nhận xét:</u> *Các bạn đọc giả có thể thấy rằng lời giải trên rất dễ, nhưng nếu các bạn đã thử làm bài trên thì thường sẽ có xu hướng tìm các giá trị đặc biệt như $f(0), f(1)$ nhưng điều đó sẽ làm lời giải trở nên rất dài dòng, trong khi các bạn chỉ cần để ý một chút rằng nếu triệt tiêu được $-f(x-y)+f(x+y+1)$ thì sẽ ra ngay đáp án.*

Ví dụ 1.2. $\begin{cases} f(1)=\frac{1}{2} \\ f(xy)=f(x)f\left(\frac{2}{y}\right)+f(y)f\left(\frac{2}{x}\right)\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+\quad(1)\end{cases}$

Trong (1) thay $y=1$ ta được: $f(x)=f(x)f(2)+\frac{1}{2}f\left(\frac{2}{x}\right)\forall x\in\mathbb{R}^+(2)$

Trong (2) thay $x=2$ ta được: $f(2)=[f(2)]^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow\left[f(2)-\frac{1}{2}\right]^2=0\Leftrightarrow f(2)=\frac{1}{2}.$

Từ đây thay lại vào (2) ta được: $f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f\left(\frac{2}{x}\right)\ \forall x\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow f(x)=f\left(\frac{2}{x}\right)\ \forall x\in\mathbb{R}^+.$

Khi đó (1) thành $f(xy)=2f(x)f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+\ (3)$

Thay y bởi $\frac{2}{x}$ ta được $\frac{1}{2}=2[f(x)]^2\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ hay $[f(x)]^2=\frac{1}{4}\ \forall x\in\mathbb{R}^+$

Vậy hàm số f duy nhất thỏa đề là $f(x)=\frac{1}{2}\forall x\in\mathbb{R}^+.$

Lời giải + Nhận xét

Ví dụ 1.3, 1.4

Ví dụ 1.3. $f(x^2-y^2)=(x-y)\big(f(x)+f(y)\big)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Thay y thành x vào (1): $f(0)=0$

Thay y thành 0 vào (1): $f(x^2)=xf(x)$ (2)

Thay x thành $-x$ vào (2): $f(x^2)=-xf(x)$ (3)

(2); (3) $\Rightarrow f(-x)=-f(x)\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0$ (4)

$\Rightarrow f(-x)=-f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

Thay y thành $-$y vào (1):

$f(x^2-y^2)=(x+y)\big(f(x)+f(-y)\big)=(x+y)\big(f(x)-f(y)\big)$

$\Rightarrow\ (x-y)\big(f(x)+f(y)\big)=\ (x+y)\big(f(x)-f(y)\big)$

$\Rightarrow xf(y)-yf(x)=-xf(y)+yf(x)\Rightarrow xf(y)=yf(x)$ (5)

Thay y thành 1 vào (5): $f(x)=xf(1)=ax$ với $a=f(1)$

Thử lại $f(x)=ax$ vào (1), ta thấy thỏa mãn.

Ví dụ 1.4.

$$f(y)+f\big(x+f(y)\big)=y+f\Big(f(x)+f\big(f(y)\big)\Big)\quad (1)$$

$P_{(1)}(f(x),y)$: $f(y)+f\big(f(x)+f(y)\big)=y+f\Big(f(f(x))+f\big(f(y)\big)\Big)$ (2)

Ta tính $f\Big(f(f(x))+f\big(f(y)\big)\Big)-f\big(f(x)+f(y)\big)$ bằng 2 cách:

Từ (2) $\Rightarrow f\Big(f(f(x))+f\big(f(y)\big)\Big)-f\big(f(x)+f(y)\big)=f(y)-y$

$P_{(1)}(y,x)$: $f\Big(f(f(x))+f\big(f(y)\big)\Big)-f\big(f(x)+f(y)\big)=f(x)-x$

Vì vậy $f(x)-x=f(y)-y$.

Thay $y=0$ vào biểu thức trên $\Rightarrow f(x)=x+c$ (c là hằng số) .

Thử lại thấy $f(x)=x$ thỏa.

<u>Nhận xét:</u> *Bài toán sử dụng phép thế đối xứng, ta cố gắng thế để tạo ra 1 đại lượng bất biến khi x và y thay đổi vai trò.*

Bài tập tương tự

Bài 1.1. Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$thỏa:

$$f\big(f(y+f(x))\big) = f(x+y) + f(x) + y \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 1.2. (Canada MO 2000) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f\big((x-y)^2\big) = x^2 - 2yf(x) + \big(f(y)\big)^2 \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 1.3. (VMO 2005) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f\big(f(x-y)\big) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 1.4. Tìm tất cả các cặp hàm f, g xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa:

$$f(x) - f(y) = (x^2 - y^2)g(x-y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 1.5. (ĐHSP HN) Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa :

$$f(x)f(x+y) = f(2x+y) - xf(x+y) + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 1.6. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f(x).f(y) = f(2xy+3) + 3f(x+y) - 3f(x) + 6x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 1.7. (VMO 2013): Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$\begin{cases} f(0) = 0, f(1) = 2013 \\ (x-y)\big[f\big(f^2(x)\big) - f\big(f^2(y)\big)\big] = [f(x) - f(y)][f^2(x) - f^2(y)] \ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Bài 1.8. (Belarus 1995) Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f\big(f(x+y)\big) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 1.9. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 1.10. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa :

$$f\big(x + f(y-x)\big) = f(x) + f(y) - x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 1.11. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f(xy) + f(x-y) + f(x+y+1) = xy + 2x + 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2. *Phương trình tích:*

Trong nhiều bài toán phương trình hàm, ta có thể đưa về phương trình hàm dạng tích $\big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) - h(x)\big) = 0$. Ta chưa thể suy ra ngày $f(x) = g(x)$ $\forall x$ hoặc $f(x) = g(x)$ $\forall x$. Hướng tư duy chủ yếu là lần lượt thế từng đáp số vào đề bài. Thông thường, đáp số bài toán là $f(x) = g(x)$ $\forall x$ hoặc $f(x) = g(x)$ $\forall x$ hoặc cả hai đều thoả. Khi đó, ta muốn chứng minh đó là các nghiệm hàm duy nhất. Ta thường làm như sau:

- Nếu cả hai đáp số đều thoả, thì giả sử tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$ (a, b khác nghiệm của phương trình $g(x) = h(x)$) sao cho $f(a) = g(a)$ và $f(b) = h(b)$.
  ⇒ Tiếp tục thực hiện phép thế để suy ra điều vô lí.
- Nếu chỉ có một đáp số thoả, ở đây giả sử $f(x) = g(x)$ không thoả thì ta giả sử tồn tại a (a khác nghiệm của phương trình $g(x) = h(x)$)
  ⇒ Tiếp tục thực hiện phép thế để suy ra điều vô lí.

Ví dụ 2.1. (Iran 1999) Tìm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Lời giải + Nhận xét
Ví dụ 2.1

Ví dụ 2.1.

$f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4yf(x)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

$\mathrm{P}(x,x^2)$: $f(f(x)+x^2)=f(0)+4x^2f(x)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$ (2)

$\mathrm{P}\big(x,-f(x)\big)$: $f(0)=f\big(x^2+f(x)\big)-4f(x)^2\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có được: $4f(x)\big(x^2-f(x)\big)=0\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$

Vậy với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ ta sẽ có $f(x)=0$ hoặc $f(x)=x^2$

Ta sẽ chứng minh $f(x)=0\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=x^2\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

Đầu tiên ta có được $f(0)=0$, từ đó ta thay $x=0$ vào đầu bài:

$\Rightarrow f(y)=f(-y), \forall y\in\mathbb{R}$.

Giả sử có $a\neq 0$, $b\neq 0$ mà $f(a)=0$ và $f(b)=b^2$.

$\mathrm{P}(a,-b)$: $\Rightarrow f(-b)=f(a^2+b)=f(b)=b^2$

Nếu $f(a^2+b)=0\Rightarrow b=0$ (vô lý)

Nếu $f(a^2+b)=(a^2+b)^2=b^2\Rightarrow a^4+2a^2b=0\Rightarrow a^2+2b=0$

$P(a,b)$: $f(b)=f(a^2-b)=b^2$

- Nếu $f(a^2-b)=0\Rightarrow b=0$ (vô lí)
- Nếu $f(a^2-b)=(a^2-b)^2=b^2\Rightarrow a^4-2a^2b=0\Rightarrow a^2=2b$

  Mà $a^2=-2b\ \Rightarrow b=0$ (vô lí)

Vậy $f(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=x^2\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Thử lại ta có được tất cả các hàm thỏa mãn đề bài là:

$$f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R} \text{ hoặc } f(x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$$

Bài tập tương tự

Bài 2.1. Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)f(y) + xy = 2f(x)y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 2.2. (Quảng Ninh 2014) Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả:

$$f\big(y - f(x)\big) = f(x^2 - y) - yf(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 2.3. (PTNK TST 2020) Cho 2 hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $g(2020) > 0$ và $\forall x, y \in \mathbb{R}$ thì thỏa đồng thời:

i) $f\big(x - g(y)\big) = f\big(-x + 2g(y)\big) + xg(y) - 6.$

ii) $g(y) = g(2f(x) - y).$

Chứng minh g là hàm hằng.

Bài 2.4. (VMO 2002) Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f\big(y - f(x)\big) = f(x^{2002} - y) - 2001yf(x) \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 2.5. (Czech - Polish - Slovak 2001) Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f\big(f(x)\big) + 2y^2 \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 2.6. Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f(x)f(y) + 2xy = 2xf(x) + yf(y) \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 2.7. Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f(0) = 0; \; f\big(xf(x) + f(y)\big) = f^2(x) + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

3. *Sử dụng tính đơn ánh, toàn ánh và song ánh của hàm số:*

Ví dụ 3.1. *(Thuỵ Sĩ 2010)* Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả:

$$f\big(f(x)+ f(y)\big) = 2y + f(x- y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 3.2. *(Nhật Bản 2004)* Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả:

$$f\big(xf(x)+ f(y)\big) = f^2(x) + y \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Lời giải + Nhận xét
Ví dụ 3.1, 3.2

Ví dụ 3.1. $f\big(f(x)+\ f(y)\big) = 2y + f(x-y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

$P(x,x)$: $f\big(2f(x)\big) = 2x + f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Lấy 2 số $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_1) = f(x_2)$

$P(x_1,x_1)$: $f\big(2f(x_1)\big) = 2x_1 + f(0)$ (3)

$P(x_2,x_2)$: $f\big(2f(x_2)\big) = 2x_2 + f(0)$ (4)

(3), (4) $\Longrightarrow x_1 = x_2 \Longrightarrow f$ đơn ánh.

$P(x,0)$: $f\big(f(x)+\ f(0)\big) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow f(x) +\ f(0) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow f(x) = x - a \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ (a $\in \mathbb{R}$)

Thế vào (1) :

$x + y - 2a = 2y + x - y - a \quad \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow a = 0$

Vậy $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 3.2. $f\big(xf(x)+\ f(y)\big) = f^2(x) + y \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

$P(0,y)$: $f\big(f(y)\big) = f^2(0) + y \quad \forall y \in \mathbb{R}$ (2)

$\Longrightarrow f$ toàn ánh $\Longrightarrow$ Tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) = 0$.

$P(a,a)$: $f(0) = a$ (3)

$P_{(1)}(0,a)$: $a = a^2 + a$ (do (3)) $\Longrightarrow a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow\ f(0) = 0$.

$P_{(1)}(x,0)$: $f\big(xf(x)\big) = f^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (4)

(2) $\Longrightarrow f\big(f(y)\big) = y \qquad \forall y \in \mathbb{R}$ (5)

P($f(x)$, 0): $f\big(xf(x)\big) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$ (6) (do (5))

(4), (6) $\Longrightarrow f^2(x) = x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$.

Giả sử tồn tại $a, b \neq\ 0$ sao cho $f(a) = a$, $f(b) = -b$:

$P_{(1)}(a,b)$: $f(a^2 - b) = a^2 + b$

Nếu $f(a^2 - b) = a^2 - b \Longrightarrow\ a^2 - b = a^2 + b \Longrightarrow 2b = 0 \Longrightarrow b = 0$ (trái giả thiết).

Nếu $f(a^2 - b) = b - a^2 \Longrightarrow b - a^2 = a^2 + b \Longrightarrow 2a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$ (trái giả thiết).

Vậy $f(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương pháp + Bài tập

Bài 3.1. Tìm hàm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả:

$f\big(f(x) + xf(y)\big) = xy + f(x)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Bài 3.2. (Balkan 2000) Tìm hàm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$f\big(xf(x) + f(y)\big) = \big(f(x)\big)^2 + y \forall x, y \in \mathbb{R}$

Bài 3.3. (Bà Rịa Vũng Tàu 2013) Tìm hàm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả:

$f\big(xy + f(x)\big) + f\big(x - yf(x)\big) = 2x\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Bài 3.4. (IMO 1992) Tìm hàm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả:

$f\big(x^2 + f(y)\big) = \big(f(x)\big)^2 + y\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Bài 3.5. Tìm tất cả hàm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 3.6. Với các số thực m, n, giả sử tồn tại hàm số $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\big(x + m.f(xy)\big) = f(x) + n.xf(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Chứng minh nếu f toàn ánh và $f(1) = 1$ thì ta có $m = n$.

Giả sử $m = n \neq 0$, tìm tất cả hàm số thỏa mãn đề bài.

Bài 3.7. Tìm tất cả hàm tăng thực sự $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$f\big(xf(y)\big) = yf(2x)\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 3.8. (Olympic lớp 10 GGTH) Tìm tất cả hàm số $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(2f(-x) + y) + 3x = f\big(x + f(y)\big) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Phương pháp + Bài tập

Bài 3.9. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(2021x^3 + y + f(y)\right) = 2y + 2021x^2 f(x) \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(**Gợi ý:** Nếu hàm f cộng tính ($f(x+y) = f(x) + f(y)$) thỏa $f(x^3) = x^2 f(x)$ thì $f(x) = ax$, với a là hằng số)

Bài 3.10. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x + y^2 + z) = f\left(f(x)\right) + yf(x) + f(z) \ \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Bài 3.11. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$f\left(x - y + f(y)\right) = f(x) + f(y)$$

Bài 3.12. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(x^3 f^3(x) + f(y)\right) = f^6(x) + y \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 3.13. Tìm tất cả hàm $f: (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn:

$$x^2[f(x) + f(y)] = (x + y) f\left(yf(x)\right) \ \ \forall x, y \in (0; +\infty)$$

Bài 3.14. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\left(x + f(x + 2y)\right) = f(2x) + 2f(y) \ \forall x, y > 0$$

Bài 3.15. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x + y^2 + z) = f\left(f(x)\right) + yf(x) + f(z) \text{ với mọi } x, y, z \text{ thuộc } \mathbb{R}$$

Bài 3.16. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\left(x + f(y)\right) = f(x + y) + f(y) (x, y \in R^+)$$

4. ***Ngoài tính toàn ánh của $f(x)$, ta còn có thể sử dụng tính toàn ánh của $f(x) - f(y)$.***

Ví dụ 4.1. (IMO 1999) Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Giải. $f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1 \; \forall x, y \in \mathbb{R}$

Dễ thấy hàm $f \equiv 0$ không thỏa đề bài nên tồn tại $a: f(a) \neq 0$

$P(x, a): f(x - f(a)) - f(x) = f(f(a)) + xf(a)$

Mà $f(a) \neq 0$ nên $\{f(f(a)) + xf(a) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \exists a, b \in \mathbb{R}: x = f(a) - f(b)$

Đặt $f(0) = c$. $P(f(y), y): c = f(0) = 2f(f(y)) + f^2(y) - 1$

Thế $x \to f(x)$, ta được:

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(y)) + f(x).f(y) + f(f(x)) - 1$$

$$= c - \frac{(f(x) - f(y))^2}{2}$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(f(a) - f(b)) = c - \frac{(f(a)-f(b))^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}$

Thử lại vào giả thiết suy ra $c = 1$.

Vậy $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 4.1. (PTNK 2020) Cho hai hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $g(2020) > 0$ và đồng thời

$$\begin{cases} f\big(x - g(y)\big) = f\big(-x + 2g(y)\big) + xg(y) - 6 & (1) \\ g(y) = g(2f(x) - y) & (2) \end{cases} \forall x, y \in R$$

a) Chứng minh g là hàm hằng.

b) Chứng minh hàm số $h(x) = f(x) - x$ có trục đối xứng $x = 1$.

Bài 4.2. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f^2(x) + 2yf(x) + f(y) = f\big(y + f(x)\big)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 4.3. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\big(x + f(y)\big) = 3f(x) + f(y) - 2x\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 4.4. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + \big(x + f(y)\big)^4 - x^4\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 4.5. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x) - y^2) = f(x)^2 - 2f(x)y^2 + f\big((y)\big)\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 4.6. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)^2 + 2yf(x) + f(y) = f\big(y + f(x)\big)\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 4.7. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa $f(1) = 1$ và

$$f(f(x) + y^2) = f\big(f(x)\big) + yf(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 4.8. Tìm tất cả hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2) + f(y^2) + 2xf(y) = f^2\big(x + f(y)\big)\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Lời giải + Nhận xét

Bài 1.1

Bài 1.1. $f\left(f\big(y+f(x)\big)\right)=f(x+y)+f(x)+y \qquad (1)$

Thế y thành $f(y)$ vào (1):

$$f\left(f\big(f(y)+f(x)\big)\right)=f\big(x+f(y)\big)+f(x)+f(y) \qquad (2)$$

Đổi x và y trong (2): $f\left(f\big(f(x)+f(y)\big)\right)=f\big(y+f(x)\big)+f(x)+f(y)$

$\Rightarrow f\big(x+f(y)\big)=f\big(y+f(x)\big) \qquad (3)$

Đổi x và y trong (1): $f\left(f\big(x+f(y)\big)\right)=f(x+y)+f(y)+x$

Do (3) $\Rightarrow f(x+y)+f(x)+y=f(x+y)+f(y)+x$

$\Rightarrow f(x)=x+f(y)-y \qquad (4)$

Thay y thành 0 vào (4): $f(x)=x+f(0)=x+a$ với $a=f(0)$

Thế $f(x)=x+a$ vào (1):

$x+y+3a=x+y+a+x+a+y=2x+2y+2a$ (vô lý)

Vậy không tồn tại hàm f thỏa đề.

<u>Nhận xét:</u> *Phép thế y thành $f(y)$ là một ý tưởng rất quan trọng trong phương trình hàm đó là Đối xứng hoá. Ta sẽ tạo ra sự đối xứng trong 1 vế của phương trình, rồi từ đó ta sẽ đổi vị trí của x và y thì vế còn lại sẽ bằng nhau.*

Lời giải + Nhận xét
Bài 1.2

Bài 1.2. $f\left((x-y)^2\right) = x^2 - 2yf(x) + \left(f(y)\right)^2\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ \ (1)$

Trong (1) thay $x = y = 0$ ta được $f(0) = \left(f(0)\right)^2$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$

- *Trường hợp 1*: $f(0) = 0$

Trong (1) thay $y \to x$ ta được $\left(x - f(x)\right)^2 = 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Hay $f(x) = x\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

- *Trường hợp 2*: $f(0) = 1$

Trong (1) thay $y \to x$ ta được $\left(x - f(x)\right)^2 = 1\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $\left[\begin{array}{l} f(x) = x + 1 \\ f(x) = x - 1 \end{array}\right.$

Nếu $\exists a$ sao cho $f(a) = a - 1$

Thay $x = a, y = 0$ vào (1) ta được $f(a^2) = a^2 + 1$

Thay $x = 0, y = a$ vào (1) ta được

$$f(a^2) = -2a + f(a)^2 = -2a + (a^2 - 2a + 1) = a^2 - 4a + 1$$

$$\Rightarrow a^2 + 1 = a^2 - 4a + 1$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \Longrightarrow 1 = f(0) = -1 (\text{vô lý})$$

Vậy $f(x) = x + 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$ là tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài.

Lời giải + Nhận xét
Bài 1.3

Bài 1.3. $f\big(f(x-y)\big)=f(x)f(y)-f(x)+f(y)-xy \quad (1)$

Thay $x=y=0$ vào (1) ta được $f\big(f(0)\big)=f^2(0)$

Thay $y=0$ vào (1) ta được

$$f\big(f(x)\big)=f(x)f(0)-f(x)+f(0) \;\; \forall x\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Thay $x=0, y=-x$ vào (1) ta được

$$f\big(f(x)\big)=f(-x)f(0)+f(-x)-f(0)\; \forall x\in\mathbb{R} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được

$$f(0)[f(x)-f(-x)]-[f(x)+f(-x)]+2f(0)=0 \quad (*)$$

Thay $x=y$ vào (1) ta được $f^2(x)=x^2+f^2(0) \;\; \forall x\in\mathbb{R} \;\; (4)$

Trong (4) thay $x\to -x$ ta được $f^2(-x)=x^2+f^2(0) \;\; \forall x\in\mathbb{R} \;\; (5)$

Từ (4) và (5) ta được

$$f^2(x)=f^2(-x) \;\; \forall x\in\mathbb{R} \Longrightarrow |f(x)|=|f(-x)| \;\; \forall x\in\mathbb{R}$$

Nếu tồn tại $x_0\neq 0$ sao cho $f(x_0)=f(-x_0)$ thì trong $(*)$ thay $x=x_0$ ta có

$$f(x_0)=f(0)\Rightarrow f^2(0)=f^2(x_0)=x_0^2+f^2(0)\Rightarrow x_0=0 \text{ (mâu thuẫn)}$$

Vậy $f(-x)=-f(x) \;\; \forall x\in\mathbb{R}$

Áp dụng vào $(*)$ ta có $f(0)[f(x)+1]=0 \;\; \forall x\in\mathbb{R}$

Nếu $f(0)\neq 0$ thì $f(x)\equiv -1$, điều này là vô lý nếu f là hàm lẻ.

Vậy $f(0)=0$

Từ đây, ta thay $y=x$ vào (1) thì ta được $f^2(x)=x^2 \;\; \forall x\in\mathbb{R}$

Nếu tồn tại $x_0\neq 0$ sao cho $f(x_0)=x_0$ thì áp dụng (2) với $x=x_0$ và kết hợp $f(0)=0$ ta được:

$$x_0=f(x_0)=-f\big(f(x_0)\big)=-f(x_0)=-x_0\Longrightarrow x_0=0 \text{ (mâu thuẫn)}$$

Từ đây ta có $f(x)=-x \;\; \forall x\in\mathbb{R}$ là hàm số duy nhất thỏa đề bài.

Lời giải + Nhận xét
Bài 1.4

Bài 1.4. $f(x) - f(y) = (x^2 - y^2)g(x - y) \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Thay y thành 0 vào (1): $f(x) - f(0) = x^2 g(x)$

$$\Rightarrow f(x) - f(y) = \big(f(x) - f(0)\big) - \big(f(y) - f(0)\big) = x^2 g(x) - y^2 g(y)$$

$$\Rightarrow x^2\ g(x) - y^2 g(y) = (\ x^2 - y^2\ )g(x - y) \qquad (2)$$

Thay x thành 0 vào (2): $-y^2 g(y) = -y^2 g(-y)$

$\Rightarrow\ g(y) = g(-y)\ \ \forall y \neq 0$

Mặt khác, $f(x) = x^2 g(x) + f(0)$

$$\Rightarrow f(-x) = x^2 g(-x) + f(0) = x^2 g(x) + f(0) = f(x) \quad \forall x \neq 0$$

Thay y thành −y vào (1): $f(x) - f(-y) = (x^2 - y^2)g(x + y) = f(x) - f(y)$

$$\Rightarrow (x^2 - y^2)g(x - y) = (x^2 - y^2)g(x + y)$$

$\Rightarrow g(x - y) = g(x + y)$ (với điều kiện $|x| \neq |y|$)

Với các giá trị x, y chọn các giá trị u, v thỏa $x = \frac{u+v}{2}$; $y = \frac{u-v}{2}$ $(x \neq \pm y)$

$\Rightarrow g(u) = g(v)\ \Rightarrow g$ là hàm hằng nên $g(x) = a\quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$\Rightarrow f(x) = ax^2 + f(0)\quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Vậy, các hàm số thỏa đề là:

$g(x) = a$ khi $x \neq 0$; $g(x) = t$ khi $x = 0$ (với a, t tùy ý thuộc $\mathbb{R}$)

$f(x) = ax^2 + b$ (với b tùy ý thuộc $\mathbb{R}$)

Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Lời giải + Nhận xét
Bài 1.5, 1.6

Bài 1.5. $f(x)f(x+y) = f(2x+y) - xf(x+y) + x (1)$

Thế x thành 0 vào (1): $f(0)f(y) = f(y) \Rightarrow f(y) = 0$ hoặc $f(0) = 1$

Trường hợp 1: $f(y) = 0$

Thay hàm $f(y) = 0$ vào (1): $x = 0$ (vô lý)

Trường hợp 2: $f(0) = 1$

Thế y thành $-2x$ vào (1):

$$f(x)f(-x) = f(0) - xf(-x) + x = 1 - xf(-x) + x \quad (2)$$

Thế x thành $-x$ vào (1): $f(-x)f(x) = 1 + xf(x) - x \quad (3)$

$(2),(3) \Rightarrow f(-x) = 2 - f(x)\ \forall\, x \neq 0$. Mà $f(0) = 1; f(-0) = 2 - f(0)$

$$\Rightarrow f(-x) = 2 - f(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow f(x)\big(2 - f(x)\big) = 1 + xf(x) - x$$
$$\Rightarrow (f(x) - 1)(f(x) + x - 1) = 0$$

Giả sử tồn tại $u, v \neq 0$ thỏa $f(u) = 1,\ f(v) = 1 - v$

Thay x thành v; y thành $u - v$ vào (1): $f(u+v) = 1 - v$

$\Rightarrow 1 = 1 - v$ hoặc $1 - (u+v) = 1 - v$

$\Rightarrow v = 0$ hoặc $u = 0$ (Vô lý)

Vậy $f(x) = 1 - x\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = 1\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta nhận cả hai hàm.

Bài 1.6. $f(x).f(y) = f(2xy+3) + 3f(x+y) - 3f(x) + 6x \qquad (1)$

$P_{(1)}(y,x)$: $f(x).f(y) = f(2xy+3) + 3f(x+y) - 3f(y) + 6y \qquad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow -3f(x) + 6x = -3f(y) + 6y$

Thay $y = 0$ vào biểu thức trên suy ra $f(x) = x + c$ (với c là hằng số)

Thay $f(x)$ vào biểu thức (1) $\Rightarrow c = 3$ hay $f(x) = x + 3$.

Lời giải + Nhận xét
Bài 1.7

Bài 1.7. $\begin{cases} f(0)=0, f(1)=2013 \\ (x-y)\left[f\left(f^2(x)\right)-f\left(f^2(y)\right)\right]=[f(x)-f(y)][f^2(x)-f^2(y)] \end{cases}$

Thay $y=0$ vào (1) ta được $xf\left(f^2(x)\right)=f^3(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Nhân xy vào 2 vế của (1) và áp dụng (2), khi đó với mọi $x,y\in\mathbb{R}$, ta có:

$$(x-y)\left[y\left(xf\left(f^2(x)\right)\right)-x\left(yf\left(f^2(y)\right)\right)\right]$$
$$=xy[f^3(x)-f(x)f^2(y)-f(y)f^2(x)+f^3(y)]$$
$$\Leftrightarrow xyf^3(x)-x^2f^3(y)-y^2f^3(x)+xyf^3(y)$$
$$=xyf^3(x)-xyf(x)f^2(y)-xyf(y)f^2(x)+xyf^3(y)$$
$$\Leftrightarrow xyf(x)f^2(y)+xyf(y)f^2(x)-x^2f^3(y)-y^2f^3(x)=0$$
$$\Leftrightarrow [xf(y)-yf(x)][xf^2(y)-yf^2(x)]=0 \quad (3)$$

Trong (3) thay $y=1$ ta được

$[2013x-f(x)][2013^2x-f^2(x)]=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ (4)

Trong (4) thay $x=-1$ ta được $[-2013-f(-1)][-2013^2-f^2(-1)]=0$

Do $-2013^2-f^2(-1)<0$ nên $f(-1)=-2013$

Trong (3) ta thay $y=-1$ ta được

$[-2013x+f(x)][2013^2x+f^2(x)]=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ (5)

Vế trừ vế (4) và (5) ta được $2013^2x[2013x-f(x)]=0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(x)=2013x\ \forall x\neq 0$. Mà $f(0)=0$ nên $f(x)=2013x\ \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy $f(x)=2013x\ \forall x\in\mathbb{R}$ là hàm số duy nhất thỏa đề bài.

Lời giải + Nhận xét
Bài 1.8

Bài 1.8. $f\big(f(x+y)\big)=f(x+y)+f(x)f(y)-xy$ (1)

$P_{(1)}(x,0)$: $f\big(f(x)\big)=f(x)+f(x)f(0)$ (2)

Ta tính $f\big(f(x+y)\big)$ bằng 2 cách:

Thay $x+y$ vào x ở (2): $f\big(f(x+y)\big)=f(x+y)+f(x+y)f(0)$ (3)

Từ (1),(3) $\Rightarrow f(x)f(y)-xy=f(x+y)f(0)$ (4)

Đặt $f(0)=a$. Giả sử a khác 0. Ta tính $f(a)$ bằng 2 cách:

$P_{(2)}(0)$: $f(a)=a+a^2$ $(*)$

$P_{(4)}(a,-a)$: $f(-a)f(a)+a^2=a^2\Rightarrow f(-a)=0$ hoặc $f(a)=0$.

Xét $f(-a)=0$:

$P_{(4)}(2a,-a)$: $f(2a)f(-a)+2a^2=f(a).a\Rightarrow f(a)=2a$ $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)\Rightarrow$ $a^2+a=2a\Rightarrow a=1$ (nhận) hoặc $a=0$ (loại)

$\Rightarrow f(-1)=0$ và $f(0)=1$

$$P_{(4)}(x,-1): f(x).0+x=f(x-1)\Rightarrow f(x)=x+1$$

Thử lại thấy không thỏa .

Xét $f(a)=0$ $(***)$:

Từ $(*)$ và $(***)\Rightarrow$ $a^2+a=0\Rightarrow a=-1$ (nhận) hoặc $a=0$ (loại)

$\Rightarrow f(-1)=0$ và $f(0)=-1$

$$P_{(4)}(x,-1):\ f(x).0+x=-f(x-1)\Rightarrow \mathrm{f(x)}=-\mathrm{x}-1$$

Thử lại thấy không thỏa.

Giả sử $a=0\Rightarrow$ $f(x)f(y)-xy=0$

Thay $y=1$ vào biểu thức: $f(x)=cx$ (c là hằng số) .

Thử lại thấy $f(x)=x$.

<u>Nhận xét:</u> *Lưu ý cách đưa từ $f\big(f(x+y)\big)$ về $f\big(f(x)\big)$ rồi lại tiếp tục nâng lên $f\big(f(x+y)\big)$ lại, đây là 1 kĩ thuật thường gặp. Bài toán có thể nói phần khó nhất là tính $f(0)$, cần sự kiên nhẫn để tìm và cách đánh giá tốt để tính.*

Lời giải + Nhận xét
Bài 1.9

Bài 1.9. $xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Ta có: $P(0,0) \Rightarrow f(0)^2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Đặt $f(1) = a$

- *Trường hợp 1:* $a = 0$ thì $P(1, x-1) \Longrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, thử lại thấy thỏa.
- *Trường hợp 2:* $a = 1$ hay $f(1) = 1$ thì

  $P(1,x) \Rightarrow f(x+1) = f(x) + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

  $\Longrightarrow f(x+n) = f(x+n-1) + 1 = \cdots = f(x) + n \ \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

  $\Longrightarrow 0 = f(0) = f(-1+1) = f(-1) + 1 \Longrightarrow f(-1) = -1$

  $P(x,-1) \Longrightarrow xf(x) + f(x^2)f(-1) = 0 \Longrightarrow f(x^2) = xf(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \ (2)$

  Thay (2) vào (1) ta được

  $xf(x+xy) = xf(x)[1+f(y)] = xf(x)f(y+1) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

  Với mọi $x \neq 0, y \in \mathbb{R}$ ta có $f\big(x(y+1)\big) = f(x)f(y+1)$

  Thay y bằng $y-1$ và kết hợp với $0 = f(0) = f(0).f(y) = f(0.y)$ ta có

  $$f(xy) = f(x)f(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

  Khi đó (2) trở thành $f(x)^2 = xf(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

  $\Longrightarrow f(x)(f(x) - x) = 0 \forall x \in \mathbb{R} \ (3)$

  Nếu tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$ thì ta có:

  $$\begin{cases} f(a+1) = f(a) + 1 = 0 = 1 = 1 \\ f(a+1)(f(a+1) - a - 1) = 0 \end{cases}$$

  $$\Longrightarrow \begin{cases} f(a+1) = 1 \\ f(a+1) = a+1 \end{cases} \Longrightarrow a = 0 \text{ (vô lý)}$$

  Vậy $f(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$, nên từ (3) ta có $f(x) = x \ \forall x \neq 0$, mà $f(0) = 0$, suy ra:

  $$f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài 1.9

- *<u>Trường hợp 3:</u>* $a \neq 0,1$

Với số nguyên dương n

$$P(1,n) \Rightarrow f(n+1) = a + af(n)$$

$$\Leftrightarrow f(n+1) + \frac{a}{a-1} = af(n) + \left(a + \frac{a}{a-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(n+1) + \frac{a}{a-1} = a\left[f(n) + \frac{a}{a-1}\right]$$

$$\Longrightarrow f(n) + \frac{a}{a-1} = a^{n-1}\left[f(1) + \frac{a}{a-1}\right]$$

$$\Longrightarrow f(n) = \frac{a^{n+1} - a}{a-1} \; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Với 2 số nguyên dương m, n,

$$P(m,n) \Rightarrow mf(m+mn) = mf(m) + f(m^2)f(n)$$

$$\Longrightarrow \frac{m(a^{m+mn+1} - a)}{a-1} = \frac{m(a^{m+1} - a)}{a-1} + \frac{a^{m^2+1} - a}{a-1} \cdot \frac{a^{n+1} - a}{a-1}$$

$$\Rightarrow \frac{m(a^{m+mn+1} - a^{m+1})}{a-1} = \frac{\left(a^{m^2+1} - a\right)(a^{n+1} - a)}{(a-1)^2}$$

$$\Longrightarrow m(a^{m+mn+1} - a^{m+1})(a-1) = \left(a^{m^2+1} - a\right)(a^{n+1} - a) \quad (4)$$

Chọn $m = n = 2$ trong (4) ta được

$$2(a^7 - a^3)(a-1) = (a^5 - a)(a^3 - a)$$

$\Longrightarrow 2a(a^4 - 1)(a-1) = (a^4 - 1)(a^2 - 1) \overset{a \neq 1}{\Longleftrightarrow} 2a = a + 1 \Leftrightarrow a = 1$ (vô lý)

Vậy tất cả các hàm thỏa yêu cầu bài toán là $f(x) \equiv 0$ và $f(x) \equiv x$.

Lời giải + Nhận xét
Bài 1.10, 1.11

Bài 1.10. $f\big(x+f(y-x)\big)=f(x)+f(y)-x \qquad (1)$

$P_{(1)}(0,x)$: $\qquad f\big(f(x)\big)=f(x)+f(0) \qquad (2)$

$P_{(1)}(x,x+y)$: $\qquad f\big(x+f(y)\big)=f(x)+f(x+y)-x \qquad (3)$

$P_{(1)}(f(x),y)$: $\qquad f\big(f(x)+f(y)\big)=f\big(f(x)\big)+f(f(x)+y)-f(x)$

Tới đây ta dùng (2) $\Rightarrow f\big(f(x)+f(y)\big)=f(f(x)+y)+f(0) \qquad (4)$

Ta tính $f\big(f(x)+f(y)\big)$ theo 2 cách:

$P_{(4)}(y,x)$: $f\big(f(x)+f(y)\big)=f(f(y)+x)+f(0) \qquad (5)$

Từ (4) và (5) $\Rightarrow f(f(x)+y)=\ f(f(y)+x)$

Tới đây ta dùng (3) $\Rightarrow f(x)-x=\ f(y)-y$

Thay $y=0$ vào biểu thức trên $\Rightarrow\ f(x)=x+c$ (c là số thực)

Thử lại thấy thỏa.

Nhận xét: *lưu ý cách đặt y thành $x+y$ để đưa về dạng quen thuộc, khiến bài toán dễ dàng hơn.*

Bài 1.11. $f(xy)+f(x-y)+f(x+y+1)=xy+2x+1\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

$P(x,1)$: $f(x)+f(x-1)+f(x+2)=3x+1 \qquad (2)$

$P(x,0)$: $f(0)+f(x)+f(x+1)=2x+1 \qquad (3)$

$P_{(3)}(x-1)$: $f(x-1)+f(x)=2x-1-f(0) \qquad (4)$

Từ (4) và (2) $\Rightarrow 2x-1-f(0)+f(x+2)=3x+1$

$\Rightarrow f(x+2)=x+2+f(0)$

$\Rightarrow f(x)=x+a$ (với a là số thực). Thử lại $\Rightarrow f(x)=x$

Lời giải + Nhận xét
Bài 2.1, 2.2

Bài 2.1.

$f(x)f(y) + xy = 2f(x)y$

P(x, x): $f(x)^2 + x^2 = 2f(x)x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad (f(x) - x)^2 = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ f(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Thử lại thấy thỏa mãn đề bài.

Vậy tất cả các hàm cần tìm là $(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 2.2.

$f\big(y - f(x)\big) = f(x^2 - \ y) - yf(x) \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

P$\big(x, f(x)\big)$: $f(0) = f\big(x^2 - \ f(x)\big) - f^2(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

P(x, x^2): $f\big(x^2 - \ f(x)\big) = f(0) - x^2 f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$ (3)

(2), (3) $\Longrightarrow f^2(x) + x^2 f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow f(x)(f(x) + x^2) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ Với mọi x $\in \mathbb{R}$ ta có $f(x) = 0$ hoặc $(x) = -x^2 \ \Longrightarrow f(0) = 0$.

Giả sử tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) = -a^2$

$P_{(1)}(a, -a^2)$: $0 = f(2a^2) - a^4$

Nếu $f(2a^2) = 0 \Longrightarrow a^4 \ = 0 \Longrightarrow a = 0$ (trái giả thiết).

Nếu $f(2a^2) = -4a^4 \Longrightarrow a = 0$ (trái giả thiết).

Vậy $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải + Nhận xét
Bài 2.3

Bài 2.3.

i) $f(x-g(y)) = f(-x+2g(y)) + xg(y) - 6$ (1)

ii) $g(y) = g(2f(x)-y)$ (2)

Thực hiện $P_{(1)}(g(y), y)$ và $P_{(1)}(2g(y), y)$

$\Rightarrow f(0) = f(g(y)) + g(y)^2 - 6$ và $f(g(y)) = f(0) + 2g(y)^2 - 6$.

$\Rightarrow 3g(y)^2 = 12 \Rightarrow$ Với mỗi $y \in \mathbb{R}$, $g(y) = 2$ hoặc $g(y) = -2$.

Ta sẽ giả sử ngược lại rằng có $a \neq b$ sao cho $g(a) = 2$ và $g(b) = -2$.

Thế $y = 2020$ vào (1):

$\Rightarrow f(x-c) - f(-x+2c) = cx - 6$ $(c = g(2020) > 0)$

$\Rightarrow f(u) - f(v)$ toàn ánh trên $\mathbb{R}$ với $\forall u, v \in \mathbb{R}$.

Ở (2), thay y lần lượt bởi a, b, ta có:

$$g(a) = g(2f(x)-a) = 2; \; g(b) = g(2f(x)-b) = -2$$

Lại do tính toàn ánh, chọn u, v: $f(u) - f(v) = \frac{a-b}{2}$.

$\Rightarrow 2f(u) - a = 2f(v) - b \Rightarrow 2 = g(2f(u)-a) = g(2f(v)-b) = -2$ (vô lí).

Vậy $g(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R}$ (do $g(2020) > 0$ nên $g(x) = -2 \; \forall x \in \mathbb{R}$ không thể xảy ra)

Vậy ta có đpcm.

<u>Nhận xét:</u> *Đây là 1 bài toán khá khó cần dùng linh hoạt tính toàn ánh của hiệu $f(x) - f(y)$ và đưa về 2 trường hợp $g(y)$ như trên (lưu ý không được kết luận ngay g hằng).*

Lời giải + Nhận xét
Bài 2.4, 2.5

Bài 2.4. $f\left(y-f(x)\right)=f(x^{2002}-y)-2001y.f(x)\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$

$P_{(1)}\left(x,\frac{f(x)+x^{2002}}{2}\right):f\left(\frac{x^{2002}-f(x)}{2}\right)=f\left(\frac{x^{2002}-f(x)}{2}\right)-2001\left(\frac{f(x)+x^{2002}}{2}\right).f(x)$

Suy ra: $\left(\frac{f(x)+x^{2002}}{2}\right).f(x)=0\ \ (2)$

Vì vậy với mọi x thực thì $f(x)=0$ hoặc $f(x)=-x^{2002}$

$P_{(2)}(0): f(0)=0$, $P_{(1)}(0,y): f(y)=f(-y)\Rightarrow f$ là hàm chẵn.

Giả sử tồn tại a,b khác 0 để $f(a)=0, f(b)=-b^{2002}$

$P_{(1)}(a,b): f(b)=f(a^{2002}-b)=-b^{2002}$

Do b khác 0 nên $f(b)=f(a^{2002}-b)=-b^{2002}=-(a^{2002}-b)^{2002}$

Suy ra $a=0$ hoặc $\mathrm{b}=\frac{\mathrm{a}^{2002}}{2}$.

Vì vậy với mọi x không dương thì $f(x)=0$.

Do f là hàm chẵn nên $f(x)=0\ \forall x$ (vô lí vì $f(b)\neq 0$)

Vậy có hai nghiệm hàm là $f(x)=0$ với mọi x hoặc $f(x)=-x^{2002}$

Thử lại. Vậy nhận $f(x)=0$ với mọi x thực.

Bài 2.5. $f(x^2+y)+f(f(x)-y)=2f\left(f(x)\right)+2y^2\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$

$P(x,0): f(x^2)=f\left(f(x)\right)$, $P(0{,}0): f(0)=f\left(f(0)\right)$

$P\left(0,f(0)\right): f\left(f(0)\right)+f(0)=2f(0)+2\left(f(0)\right)^2$ suy ra $f(0)=0$

$P(0,y): f(y)+f(-y)=2y^2\ \ (*)$

$P\left(x,f(x)\right): f\left(x^2+f(x)\right)=2f\left(f(x)\right)+2\left(f(x)\right)^2\ (2)$

$P(x,-x^2): f(f(x)+x^2)=2f\left(f(x)\right)+2x^4\ (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $\left(f(x)\right)^2=x^4$

Ở $(*)$, bình phương hai vế ta thu được: $2y^4+2f(y)f(-y)=4y^4$

$\Rightarrow f(y)f(-y)=y^4=f(y)\left(2y^2-f(y)\right)\Rightarrow(f(y)-y^2)=0$

Tức là $f(x)=x^2$ với mọi x. Thử lại, thoả và nhận hàm.

Lời giải + Nhận xét
Bài 2.6, 2.7

Bài 2.6. $f(x)f(y) + 2xy = 2xf(x) + yf(y)\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)
Bài này có khá nhiều cách làm, tuy nhiên ở đây sẽ trình bày bài này bằng cách đưa về phương trình tích.

$P_{(1)}(x, x)$: $f(x)^2 + 2x^2 = 3xf(x)$.

$\Rightarrow (f(x) - x)(f(x) - 2x) = 0$.

$\Rightarrow f(x) = x$ hoặc $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác thế $x = y = 0$ vào đầu bài ta cũng có được $f(0) = 0$

$\Rightarrow$ Ta sẽ chứng minh $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giả sử điều ngược lại, tồn tại $a \neq b$ sao cho $f(a) = a$ và $f(b) = 2b$.

Thực hiện $P_{(1)}(a, b)$: $4ab = 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow 2(a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$ (vô lí)

Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tuy nhiên khi thử lại thì ta thấy không tồn tại hàm nào thỏa mãn đề bài.

Vậy không tồn tại hàm số nào thỏa mãn đề bài.

Bài 2.7. $f(0) = 0$; $f\big(xf(x) + f(y)\big) = f^2(x) + y\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Thay x thành 0 vào (1): $f\big(f(y)\big) = f^2(0) + y = y$

Thay y thành 0 vào (1): $f\big(xf(x)\big) = f^2(x)$ (2)

Thay x thành $f(x)$ vào (2): $f\Big(f(x)f\big(f(x)\big)\Big) = f^2\big(f(x)\big)$

$\Rightarrow f(f(x)x) = x^2$ (do $f(f(y)) = y$)

Mà $f\big(xf(x)\big) = f^2(x) \Rightarrow \mathrm{f}^2(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 \Rightarrow (\mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{x})(\mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{x}) = 0$

$\Rightarrow f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$ (3)

Giả sử tồn tại a, b thỏa $f(a) = a;\ f(b) = -b\ (ab \neq 0)$

Thay x thành a, y thành b vào (1):

$f\big(af(a) + f(b)\big) = f^2(a) + b \Rightarrow f(a^2 - b) = a^2 + b$

Mà theo (3): $a^2 + b = a^2 - b$ hoặc $a^2 + b = -a^2 + b$

$\Rightarrow b = 0$ hoặc $a = 0$ (Vô lý)

Vậy $f(x) = x\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -x\ \ \forall x \in R$

Lời giải + Nhận xét
Bài 3.1, 3.2

Bài 3.1. $f\big(f(x)+\ xf(y)\big)=xy+f(x)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

$P(1,y){:}\ f\big(f(1)+\ f(y)\big)=y+f(1)\ \ \forall y\in\mathbb{R}$ (2)

Lấy 2 số $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ sao cho $f(y_1)=f(y_2)$

$P_{(1)}(1,y_1){:}\ f\big(f(1)+\ f(y_1)\big)=y_1+f(1)$ (3)

$P_{(1)}(1,y_2){:}\ f\big(f(1)+\ f(y_2)\big)=y_2+f(1)$ (4)

(3), (4) $\Longrightarrow y_1=y_2\Longrightarrow f$ đơn ánh.

$P_{(1)}(x,0){:}\ f\big(f(x)+\ xf(0)\big)=f(x)\quad \forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}$

$\Longrightarrow f(x)+\ xf(0)=x\ \Longrightarrow f(x)=x\big(1-f(0)\big)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Longrightarrow f(x)=ax\quad \forall x\in\mathbb{R}\ (a\in\mathbb{R})$

Thử lại vào (1), nhận nghiệm hàm. Vậy $f(x)=x\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Bài 3.2. $f\big(xf(x)+f(y)\big)=\big(f(x)\big)^2+y(x,y\in\mathbb{R})$ (1)

Dễ thấy là f song ánh. Vì vậy tồn tại a sao cho $f(a)=0$.

$P(a,y){:}\ f\big(f(y)\big)=y$

Từ (1), thêm f vào hai vế ta thu được:

$$f\left(f\big(xf(x)+f(y)\big)\right)=f\left(\big(f(x)\big)^2+y\right)$$

Suy ra $xf(x)+f(y)=f\left(\big(f(x)\big)^2+y\right)$ (2)

$P_{(2)}(0,y){:}\ f(y)=f\left(\big(f(0)\big)^2+y\right)$ suy ra $f(0)=0$

Do f song ánh nên $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$P(f(x),0){:}\ f\big(xf(x)\big)=x^2$ (*)

$P_{(*)}(f(x),0){:}\ f\big(xf(x)\big)=\big(f(x)\big)^2$ suy ra $\big(f(x)\big)^2=x^2$ (3)

Bình phương 2 vế của (1), ta thu được:

$$x^2\big(f(x)\big)^2+\big(f(y)\big)^2+2xf(x)f(y)=\big(f(x)\big)^4+y^2+2y\big(f(x)\big)^2$$

$$\Rightarrow x^4+y^2+2xf(x)f(y)=x^4+y^2+2yx^2\Rightarrow xf(x)f(y)=yx^2\ \ (4)$$

$P_{(4)}(a,y){:}\ \ f(1)f(y)=y$

$P_{(3)}(1,y){:}\ \big(f(1)\big)^2=1$ suy ra $f(1)=1$ hoặc $f(1)=-1$.

Vậy có 2 nghiệm hàm là $f(x)=x$ hoặc $f(x)=-x$. Thử lại, thoả.

Lời giải + Nhận xét

Bài 3.3, 3.4

Bài 3.3. $f\big(xy+f(x)\big)+f\big(x-yf(x)\big)=2x \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

$P(x,0): f\big(f(x)\big)+f(x)=2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Lấy 2 số $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x_1)=f(x_2)$

$P(x_1,0): f\big(f(x_1)\big)+f(x_1)=2x_1$ (3)

$P(x_1,0): f\big(f(x_2)\big)+f(x_2)=2x_2$ (4)

(3), (4) $\Longrightarrow x_1=x_2 \Longrightarrow f$ đơn ánh.

$P(x,1): f\big(x+f(x)\big)+f\big(x-f(x)\big)=2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ (5)

$P(x,-1): f\big(-x+f(x)\big)+f\big(x+f(x)\big)=2x \ \forall x\in\mathbb{R}$ (6)

(5), (6) $\Longrightarrow f\big(x-f(x)\big)=f\big(-x+f(x)\big) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Longrightarrow x-f(x)=-x+f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Longrightarrow f(x)=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Thế vào (1): $xy+x+x-xy=2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ (đúng)

Vậy $f(x)=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 3.4. $f\big(x^2+f(y)\big)=\big(f(x)\big)^2+y \ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Dễ chứng minh f song ánh. Vì vậy tồn tại duy nhất a sao cho $f(a)=0$.

$P(a,y): f\big(f(y)\big)=\big(f(0)\big)^2+y$ (2)

$P\big(x,f(y)\big): f\left(x^2+y+\big(f(0)\big)^2\right)=\big(f(x)\big)^2+f(y)$ (3)

$P_{(3)}(a,a): f\left(a^2+a+\big(f(0)\big)^2\right)=0=f(a)$

Do f song ánh nên suy ra $a^2+a+\big(f(0)\big)^2=a$

Suy ra $a^2+\big(f(0)\big)^2=0$. Tức là $a=f(0)=0$

$P(x,0): f(x^2)=\big(f(x)\big)^2$ (4)

Từ (3) suy ra $f(x^2+y)=f(x^2)+f(y)$ (5)

$P_{(5)}(x,-x^2): 0=f(x^2)+f(-x^2)$

Vì vậy f là hàm lẻ và từ (5) suy ra f cộng tính, lại có (4) nên $f(x)\geq 0 \ \forall x\geq 0$ nên $f(x)=ax$ với mọi x thực (a là hằng số). Thử lại vào (1).

$$ax^2+a^2y=a^2x^2+y \ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Suy ra $a=a^2$ và $a^2=1$. Vì vậy $a=1$. Vậy $f(x)=x$ với mọi x thực.

Lời giải + Nhận xét
Bài 3.5

Bài 5. $f(f(x)+y) = f(x^2-y) + 4f(x)y \ \ (1)$

Ta nhận hàm $f \equiv 0$. Bây giờ ta chỉ xét hàm f không đồng nhất 0, hay $\exists c \in \mathbb{R}$ sao cho $f(c) \neq 0$.

Xét $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) = f(b)$

Từ $P(a,y)$ & $P(b,y)$ ta được $f(a^2-y) = f(b^2-y)$.

Nếu $a^2 \neq b^2$ thì f là hàm tuần hoàn chu kì $T = a^2 - b^2$

Từ $P(x,y)$ & $P(x,y+T)$ ta được $4f(x)y = 4f(x)(y+T)$ suy ra được là $4f(x)T = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay $x = c$ ta có điều vô lý do $T \neq 0$.

Vậy nếu $f(a) = f(b)$ thì $a^2 = b^2$.

$$P(x,0):\ f\big(f(x)\big) = f(x^2) \Rightarrow f(x)^2 = x^4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f(x) = -x^2 \end{array}\right.$$

Giả sử tồn tại d sao cho $f(d) = -d^2$.

$P(d,y)$: $f(-d^2+y) = f(d^2-y) - 4yd^2$

$\Rightarrow 4yd^2 = m(y-d^2)^2 \ \ \forall y \in \mathbb{R}$ với $m \in \{-2; 0; 2\}$

Trong cả ba trường hợp của m, vế phải biểu thức là biểu thức hằng hay là đa thức bậc 2 theo y, trong khi đó vế trái là hàm bậc 1 theo y, nên ta có điều vô lý. Vậy $f(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa nên ta nhận hàm.

Kết luận: Vậy tất cả nghiệm hàm của (1) là $f(x) = x^2$.

<u>Nhận xét:</u> *Trong một số trường hợp nghiệm hàm không đơn ánh như bài này thì việc chứng minh tính đơn ánh của hàm là không khả thi, từ đó xuất hiện một kiểu chứng minh "nửa đơn ánh" như lời giải phía trên, tính nửa đơn ánh chứng minh khá giống như khi chứng minh đơn ánh, cũng là kĩ thuật đưa về hàm tuần hoàn.*

Lời giải + Nhận xét
Bài 3.6

Bài 3.6. $f\big(x+m.f(xy)\big)=f(x)+n.xf(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

a) *<u>Chứng minh nếu f toàn ánh và $f(1)=1$ thì ta có $m=n$.</u>*

Dễ nhận thấy rằng $f(x)\not\equiv 0$ vì f là hàm toàn ánh, bởi thế tồn tại giá trị x_0 thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $f(x_0)\neq 0$.

Nếu $m=0$, thay vào (1), ta được: $n.xf(y)=0$, thay $x=1, y=x_0$ vào biểu thức trên, ta được $n=0$ hay $m=n=0$.

Nếu $n=0$, thay vào (1), ta được:

$f\big(x+m.f(xy)\big)=f(x)$ với mọi x,y thuộc $\mathbb{R}$. (2)

Giả sử rằng $m\neq 0$, với mọi $x\neq 0$, vì f là hàm toàn ánh nên tồn tại y_0 thuộc $\mathbb{R}$sao cho $f(y_0)=\frac{-x}{m}$

Thay y bởi $\frac{y_0}{x}$ vào (2), ta được $f(x)=f(0)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, điều này vô lý vì f toàn ánh trên $\mathbb{R}$, do đó điều giả sử là vô lý hay $m=0$, dẫn đến $m=n=0$.

Nếu $mn\neq 0$, thay $x=1$ vào (1), kết hợp với $f(1)=1$, ta được:

$f\big(1+m.f(y)\big)=1+n.f(y)$ với mọi y thuộc $\mathbb{R}$, vì f toàn ánh trên $\mathbb{R}$ nên:

$f(1+my)=1+ny$ với mọi y thuộc $\mathbb{R}$, hay f là hàm tuyến tính trên $\mathbb{R}$, mà $f(0)=0, f(1)=1$ nên $f(x)=x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Thử lại vào (1), ta được $m=n$, ta hoàn tất chứng minh.

b) *<u>Giả sử $m=n\neq 0$. Tìm tất cả hàm thỏa đề bài.</u>*

Vì $m=n$, thay vào (1), ta được:

$f\big(x+m.f(xy)\big)=f(x)+m.xf(y)$ với mọi x,y thuộc $\mathbb{R}$. (3)

Thay $x=y=\frac{-1}{m}$ vào (3), ta được: $f\left(\frac{-1}{m}+m.f\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)=0$, vậy tồn tại u thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $f(u)=0$.

Thay $y=1,\ x=u$ vào (3), ta được $m.uf(1)=0$, ta xét 2 trường hợp (vì $m\neq 0$).

Lời giải + Nhận xét
Bài 3.6

<u>Trường hợp 1:</u> $f(1)=0$, thay $x=\frac{1}{y}$ vào (3) kết hợp với $f(1)=0$, ta được $f(y)=0$ với mọi y thuộc $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Thay $x=0,\ y=1$ vào (3), ta được: $f(0)=f\big(m.f(0)\big)$.

Nếu $f(0)\neq 0$, dẫn đến $f(0)=f\big(m.f(0)\big)=0$ (vô lý), vậy $f(0)=0$ suy ra $f(x)\equiv 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

<u>Trường hợp 2:</u> $u=0$, hay $f(0)=0$ và $f\left(\frac{1}{m^2}\right)=\frac{1}{m^2}$.

Thay x bởi $\frac{x}{y}$, $y=\frac{1}{m^2}$ vào (3), kết hợp với $f\left(\frac{1}{m^2}\right)=\frac{1}{m^2}$, ta được:

$f\left(\frac{x}{y}+m.f\left(\frac{x}{y.m^2}\right)\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{my}$, với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, y thuộc $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $y\neq 0$, đặt $z=x+my.f\left(\frac{x}{y.m^2}\right)$, suy ra: $f\left(\frac{z}{y}\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{my}$.

Thay x bởi y, y bởi $\frac{x}{y}$, ta được: $f\big(y+m.f(x)\big)=f(y)+m.yf\left(\frac{x}{y}\right)$.

Thay x bởi y, y bởi $\frac{z}{y}$, ta được:

$$\begin{aligned} f\big(y+m.f(z)\big)&=f(y)+m.yf\left(\frac{z}{y}\right)=f(y)+m.yf\left(\frac{x}{y}\right)+x\\ &=f\big(y+m.f(x)\big)+x\ \forall x\in\mathbb{R}, y\neq 0\ \ (4)\end{aligned}$$

Thay y bởi $-m.f(x)$ vào (4), ta được: $f\big(m.f(z)-m.f(x)\big)=x$, hay f toàn ánh trên $\mathbb{R}$, thay $x=1$ vào (3), ta được: $f\big(1+m.f(y)\big)=f(1)+m.f(y)$, vì f toàn ánh nên $f(x)=x+f(1)-1$, thử lại, ta được: $f(x)=x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Vậy có 2 hàm số thỏa là $f(x)=0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ hay $f(x)=x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

<u>Nhận xét:</u>

+ Ở ý 1, ta đã sử dụng 1 tính chất quan trọng của hàm toàn ánh là đổi $f(y)$ sang y nếu biểu thức không có biến y đứng 1 mình.

+ Ở ý 2, ta hoàn toàn không có dữ kiện, vì thế, việc thay thế và tính toán các giá trị đặc biệt giúp ta mở ra những hướng đi mà một trong số đó đã cụ thể thành lời giải bài toán.

Lời giải + Nhận xét

Bài 3.7, 3.8

Bài 3.7. $f(xf(y)) = yf(2x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $f(x) = 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, thử lại vào (1), ta nhận.

Xét trường hợp tồn tại x_0 thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $f(2x_0) \neq 0$, xét 2 giá trị y_1, y_2 thuộc $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(y_1) = f(y_2)$. (*)

Thay $x = x_0$, y lần lượt bởi y_1, y_2 vào (1), kết hợp với (*), ta được: $y_1 f(2x_0) = y_2 f(2x_0)$, hay $y_1 = y_2$, khi đó f đơn ánh trên $\mathbb{R}$.

Thay $x = 1,\ y = 1$ vào (1), ta được: $f(f(1)) = f(2)$

Mà f đơn ánh trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(1) = 2$, suy ra $f(2) > f(1) = 2 > 0$ (vì f là hàm tăng thực sự trên $\mathbb{R}$).

Thay $x = 1, y$ bởi $f(y)$ vào (1), ta được:

$f\left(f(f(y))\right) = f(y)f(2)$ với mọi y thuộc $\mathbb{R}$. (2)

Thay $x = 1$vào (1), ta được: $f(f(y)) = yf(2)$ với mọi y thuộc $\mathbb{R}$. (3)

Thay x bởi $y, y = 2$ vào (1), ta được:

$f(yf(2)) = 2f(2y)$ với mọi y thuộc $\mathbb{R}$. (4)

Từ (2), (3) và (4) , ta được $2f(2y) = f(y)f(2)$ với mọi y thuộc $\mathbb{R}$.

Giả sử tồn tại x_0 để $f(x_0) > 2x_0$, do f là hàm tăng thực sự nên $f(f(x_0)) > f(2x_0). \Rightarrow 2f(f(x_0)) > 2f(2x_0)$, dẫn đến $2x_0 f(2) > f(x_0).f(2) \Rightarrow 2x_0 > f(x_0)$ (vô lý)

Hoàn toàn tương tự ta có: $f(x) < 2x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ (vô lý), vậy $f(x) = 2x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, thử lại ta nhận.

Vậy có 2 hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ hay $f(x) = 2x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Bài 3.8. $f(2f(-x) + y) + 3x = f(x + f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Giả sử tồn tại hàm f thỏa đề.

$P(x, -2f(-x)$: $f(0) + 3x = f(x + f(-2f(-x))$

Vì $3x + f(0)$ nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ nên f toàn ánh $\Rightarrow \exists a: f(a) = 0$.

$P(-a, y)$: $f(2f(a) + y) - 3a = f(-a + f(y))$

$\Rightarrow f(y) - 3a = f(-a + f(y))$

Mà f toàn ánh $\Rightarrow y - 3a = f(-a + y)$ (2)

Thay y bởi $y + a$ trong (2) $\Rightarrow f(y) = y - 2a$

Thử lại $\Rightarrow f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải + Nhận xét
Bài 3.9

Bài 3.9. $f\left(2021x^3+y+f(y)\right)=2y+2021x^2f(x)\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

$P(0{,}0)$: $f\left(f(0)\right)=0$.

Đặt $f(0)=a$ thì $f(a)=0$.

$P(0,a)$: $f\left(a+f(a)\right)=2a=0$ nên $a=0, f(0)=0$.

$P_{(1)}(0,y)$: $f\left(y+f(y)\right)=2y$ (2)

Vì vậy f toàn ánh.

$P(x,0)$: $f(2021x^3)=2021x^2f(x)$.

Thay lại vào đề, ta có :

$$f\left(2021x^3+y+f(y)\right)=2y+f(2021x^3)$$

Do $2021x^3$ toàn ánh trên $\mathbb{R}$, ta thay $2021x^3$ thành x:

$$f\left(x+y+f(y)\right)=2y+f(x)(3)$$

Ở đây, thay 2y thành $y+f(y)$ thì :

$$f\left(x+y+f(y)\right)=f\left(y+f(y)\right)+f(x)\ \ (4)$$

Giả sử tồn tại a,b để $f(a)=\ f(b)$.

$P_{(3)}(a,b)$: $f\left(a+b+f(b)\right)=2b+f(a)$

$P_{(3)}(b,a)$: $f\left(a+b+f(a)\right)=2a+f(b)$

Do đó $a=b$, f đơn ánh, suy ra f song ánh (f toàn ánh đã chứng minh trên) nên f có hàm ngược là f^{-1} và hàm này song ánh,

Từ (2), tác động f^{-1} lên hai vế ta thu được :

$$y+f(y)=f^{-1}(2y)$$

Vì vậy $y+f(y)$ song ánh.

Thay $y+f(y)$ thành y trong (4) thì suy ra f cộng tính. Lại có :

$$f(2021x^3)=2021f(x^3)=2021x^2f(x)$$

Suy ra $f(x^3)=x^2f(x)$. Kết hợp với f cộng tính thì $f(x)=ax$ (a là hằng số).

Thử lại vào (2) thì $(a^2+a-2)y=0$ với mọi y nên $a=1$ hoặc $a=-2$.

Thử lại vào (1), nhận cả hai TH.

Vậy $f(x)=x$ với mọi x hoặc là $f(x)=-2x$ với mọi x.

Lời giải + Nhận xét

Bài 3.10, 3.11

Bài 3.10. $f(x+y^2+z)=f\big(f(x)\big)+yf(x)+f(z)\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$ (1)

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn đề bài.

Dễ thấy rằng $f(x)\equiv 0$ là hàm số thỏa mãn đề bài, xét $f(x)\not\equiv 0$, nghĩa là tồn tại u thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $f(u)\neq 0$.

Thay $z=0, x=u$ vào (1), ta được:

$f(u+y^2)=f\big(f(u)\big)+yf(u)+f(0)$ với mọi y thuộc $\mathbb{R}$. (2)

Thay y bởi $\frac{y-f(f(u)-f(0)}{f(u)}$ vào (2), ta được:

$f(u+(\frac{y-f(f(u)-f(0)}{f(u)})^2)=y\ \forall y\in\mathbb{R}$, hay f là hàm toàn ánh trên $\mathbb{R}$.

Thay $y=z=0$ vào (1), ta được: $f(x)=f\big(f(x)\big)+f(0)$, vì f toàn ánh trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)=x-C$, C là 1 hằng số bất kì.

Thử lại vào (1), ta được $C=0$ hay $f(x)=x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Vậy có 2 hàm số thỏa mãn là $f(x)\equiv 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ hay $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 3.11. $f\big(x-y+f(y)\big)=f(x)+f(y)$

Trước hết ta nhận nghiệm hàm $f\equiv 0$.

Ta chứng minh nếu f không đồng nhất 0 thì f đơn ánh. Giả sử ngược lại, hay tồn tại $a>b$ sao cho $f(a)=f(b)$.

Từ 2 phép thế $P(x,a), P(x,b)$ ta được $f(x-a+c)=f(x-b+c)$ hay f tuần hoàn với chu kì $T=a-b\geq 1$.

Khi đó $f(x)=f(i)$ với i là số dư của phép chia x cho T, do đó $i\in\{0,1,\dots,T-1\}$

Do đó tập giá trị của $f(x)$ chính là tập $f(0),\dots,f(T-1)$. Tập này hữu hạn nên ta chọn được d sao cho $|f(d)|$ lớn nhất.

Khi đó từ $P(d,d)$ ta được $\big|f\big(f(d)\big)\big|=2|f(d)|\leq|f(d)|$ do cách chọn d, và do đó $f(d)=0$. Cũng từ cách chọn d ta được $f\equiv 0$. (trái giả thiết)

Vậy ta được f đơn ánh.

Từ $P(x,y)$ và $P(y,x)$ ta được

$$f\big(x-y+f(y)\big)=f(x)+f(y)=f\big(y-x+f(x)\big)$$

Suy ra $x-y+f(y)=y-x+f(x)$. Thay $y=0$ ta lại được $f(x)=2x+f(0)$. Thử lại vào phương trình hàm đề bài ta nhận $f(0)=0$.

Kết luận: Vậy tất cả nghiệm hàm của phương trình này là

$$f(x)\equiv 0 \text{ và } f(x)=2x$$

Lời giải + Nhận xét
Bài 3.12, 3.13

Bài 3.12. $f\left(x^3 f^3(x) + f(y)\right) = f^6(x) + y \; \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

$P(0, y)$: $f\left(f(y)\right) = f^6(0) + y \quad \forall y \in \mathbb{R}$ (2)

$\Longrightarrow f$ toàn ánh $\Longrightarrow$ Tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) = 0$.

P(a, a): $f(0) = a$ (3)

$P(0, a)$: $a = a^6 + a$ (do (3)) $\Longrightarrow a^6 = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$.

$P(x, 0)$: $f\left(x^3 f^3(x)\right) = f^6(x)$ (4)

(2), (3) $\Longrightarrow f\left(f(y)\right) = y$ (5)

$P(f(x), 0)$: $f\left(x^3 f^3(x)\right) = x^6$ (6) (do (5))

(4), (6) $\Longrightarrow f^6(x) = x^6$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ ta có $f(x) = x$, $f(x) = -x$ hoặc $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow f(0) = 0$

Giả sử tồn tại $a, b \neq 0$ sao cho $f(a) = a$, $f(b) = -b$:

$P(a, b)$: $f(a^6 - b) = a^6 + b$

$f(a^6 - b) = a^6 - b \Rightarrow a^6 - b = a^6 + b \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$ (vô lý)

$f(a^6 - b) = b - a^6 \Rightarrow b - a^6 = a^6 + b \Rightarrow 2a^6 = 0 \Rightarrow a = 0$ (vô lý)

Vậy $f(x) = x \; \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -x \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.13. $x^2[f(x) + f(y)] = (x + y) f\left(y f(x)\right) \; \forall x, y \in (0; +\infty)$ $(*)$

Ta chứng minh f đơn ánh.

Giả sử tồn tại 2 số $a, b > 0$ sao cho $f(a) = f(b)$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x^2}{x + y} = \frac{f\left(y f(x)\right)}{f(x) + f(y)} \quad \forall x, y \in (0; +\infty)$$

Thế $x \to a, y \to b$ và $x \to b, y \to b$ vào $(*)$, ta được:

$$\frac{a^2}{a + b} = \frac{f\left(b f(a)\right)}{f(a) + f(b)} = \frac{f\left(b f(b)\right)}{f(b) + f(b)} = \frac{b^2}{2b}$$

Suy ra $2a^2 b = b^2(a + b) \Rightarrow b(2a + b)(a - b) = 0 \Rightarrow a = b \; (a, b > 0)$

Do đó, f là hàm đơn ánh.

$P(1,1)$: $2f(1) = 2f\left(f(1)\right) \Rightarrow f(1) = 1$

$P(1, x)$: $1 + f(x) = (x + 1) f(x)$, suy ra $f(x) = \frac{1}{x} \; \forall x > 0$

Thử lại vào $(*)$, ta nhận nghiệm hàm duy nhất $f(x) = \frac{1}{x} \; \forall x > 0$

Lời giải + Nhận xét
Bài 3.14

Bài 3.14. $f\big(x+f(x+2y)\big)=f(2x)+2f(y)$ với mọi $x,y>0$

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Từ (1), ta có: $f\big(x+f(x+2y)\big)\neq f(2x)$ hay $f(x)\neq x-2y\ \forall x,y>0$ (2)

Giả sử tồn tại x_0 sao cho $f(x_0)<x_0$, đặt $c=x_0-f(x_0)>0$, thay $x=x_0,\ y=\frac{c}{2}$, ta được: $0\neq 0$ (vô lý).

Vậy $f(x)\geq x$ với mọi $x>0$.

Tiếp theo ta chứng minh f là hàm đơn ánh trên ℝ+.

Giả sử tồn tại 2 giá trị a,b thuộc ℝ+, $a\neq b$ sao cho $f(a)=f(b)$.Không mất tính tổng quát, giả sử $b>a>0$, thay lần lượt $y=a, y=b$ vào (1), kết hợp với $f(a)=f(b)$, ta được:

$f\big(x+f(x+2a)\big)=f\big(x+f(x+2b)\big)$. (3)

Thay lần lượt y bởi $\frac{f(x+2a)}{2},\frac{f(x+2b)}{2}$ vào (1), kết hợp với (3), ta thu được:

$f\left(\frac{f(x+2a)}{2}\right)=f\left(\frac{f(x+2b)}{2}\right)\ \forall x>0$. (4)

Thay x bởi $x-2b$ vào (4), ta được:

$f\left(\frac{f(x)}{2}\right)=f\left(\frac{f(x+2b-2a)}{2}\right)$ với mọi $x>2a$, cho $a>0$ đủ nhỏ, vậy điều này đúng với mọi $x>0$.

Suy ra $f\left(\frac{f(x)}{2}\right)=f\left(\frac{f\big(x+2n(b-a)\big)}{2}\right)\geq\frac{x+2n(b-a)}{2}$, với mọi n thuộc ℕ*, $x>0$.

Cố định $x>0$, cho $n\to+\infty$, vì $b-a>0$ nên ta thu được điều vô lý.

Vậy điều giả sử là sai, hay nói cách khác $a=b$, khi đó f đơn ánh trên ℝ+.

Lời giải + Nhận xét
Bài 3.14

Từ (1) ta có: $(x+f(x+2y))+2f(z)=f(2x)+2f(y)+2f(z)$ $\forall x,y,z>0$.

$\Rightarrow f\left(\frac{x+f(x+2y)}{2}+f\left(\frac{x+f(x+2y)}{2}+2z\right)\right)=f(2x)+2f(y)+$ $2f(z)\forall x,y,z>0(5)$Thay y bởi z, z bởi y vào (5), kết hợp với (5), ta có:

$\Rightarrow f\left(\frac{x+f(x+2y)}{2}+f\left(\frac{x+f(x+2y)}{2}+2z\right)\right)=f\left(\frac{x+f(x+2z)}{2}+\right.$ $\left.f\left(\frac{x+f(x+2z)}{2}+2y\right)\right)$.Vì f đơn ánh trên R⁺ nên:

$\Rightarrow 2f\left(\frac{x+f(x+2y)}{2}+2z\right)+f(x+2y)=2f\left(\frac{x+f(x+2z)}{2}+2y\right)+$ $f(x+2z).\Rightarrow f\left(\frac{x+2y}{2}+f\left(\frac{x+2y}{2}+x+f(x+2y)+4z\right)\right)=f\left(\frac{x+2z}{2}+\right.$ $\left.f\left(\frac{x+2z}{2}+x+f(x+2z)+4y\right)\right)$.Vì f đơn ánh trên R⁺ nên:

$\frac{x+2y}{2}+f\left(\frac{x+2y}{2}+x+f(x+2y)+4z\right)=\frac{x+2z}{2}+f\left(\frac{x+2z}{2}+x+\right.$ $\left.f(x+2z)+4y\right)$Hay $f(s)-f(t)=z-y$ với mọi $s,t,y,z>0$.

Với $z-y$ bất kì thuộc $\mathbb{R}$, tồn tại $s,t>0$ sao $f(s)=f(t)+2021$, ta hoàn tất chứng minh.

<u>Nhận xét:</u>

+ Đối với những hàm $\mathbb{R}^+$ mà 2 bên hàm đều có f , việc suy nghĩ đến bất phương trình dạng $f(x)\geq cx$, $c>0$ là 1 hướng tiếp cận dễ dàng nghĩ đến. Sử dụng bất phương trình này.

+ Phương pháp thêm biến là hướng tiếp cận phổ biến trong các bài toán $\mathbb{R}^+$ bởi ta có thể lợi dụng tính đối xứng để đưa về đơn ánh, từ đó giải quyết yêu cầu bài toán.

Lời giải + Nhận xét
Bài 3.15, 3.16

Bài 3.15. $f(x+y^2+z)=f\big(f(x)\big)+yf(x)+f(z)\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$ (1)
Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn đề bài.
Dễ thấy rằng $f(x)\equiv 0$ là hàm số thỏa mãn đề bài, xét $f(x)\not\equiv 0$, nghĩa là tồn tại u thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $f(u)\neq 0$.
Thay $z=0, x=u$ vào (1), ta được:
$f(u+y^2)=f\big(f(u)\big)+yf(u)+f(0)$ với mọi y thuộc $\mathbb{R}$. (2)
Thay y bởi $\frac{y-f(f(u)-f(0))}{f(u)}$ vào (2), ta được:
$f\left(u+\left(\frac{y-f\left(f(u)-f(0)\right)}{f(u)}\right)^2\right)=y$ với mọi y thuộc $\mathbb{R}$, hay f là hàm toàn ánh trên $\mathbb{R}$.
Thay $y=z=0$ vào (1), ta được: $f(x)=f\big(f(x)\big)+f(0)$, vì f toàn ánh trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)=x-C$, C là 1 hằng số bất kì.
Thử lại vào (1), ta được $C=0$ hay $f(x)=x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.
Vậy có 2 hàm số thỏa mãn là $f(x)\equiv 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ hay $f(x)=x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Bài 3.16. $f\big(x+f(y)\big)=f(x+y)+f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+$ (1)
$P_{(1)}(f(x),y)$: $f\big(f(x)+f(y)\big)=f(f(x)+y)+f(y)$ (2)
$P_{(1)}(y,x)$: $f\big(y+f(x)\big)=f(x+y)+f(x)$
Thay vào (2), ta có $f\big(f(x)+f(y)\big)=f(x+y)+f(x)+f(y)$ (3)
Tác động f lên hai vế ở (1), ta có

$$\begin{aligned} f\Big(f\big(x+f(y)\big)\Big) &= f\big(f(x+y)+f(y)\big)\\ &= f(x+2y)+f(x+y)+f(y)\ (4)\end{aligned}$$

$P_{(4)}(f(x),x)$:

$$\begin{aligned} f\Big(f\big(f(x)+f(y)\big)\Big) &= f(f(x)+2y)+f(f(x)+y)+f(y)\\ &= f(x+2y)+f(x)+f(x+y)+f(x)\\ &= f(2x+y)+f(y)+f(x+y)+f(x)\end{aligned}$$

(Thế đối xứng)

$$\Rightarrow f(x+2y)+f(x)=f(2x+y)+f(y)\ (*)$$

Lời giải + Nhận xét
Bài 3.16

Xét (1): Giả sử tồn tại a để $f(a) < a$

$P_{(1)}(a - f(a), a)$: $f(a) = f\big(2a - f(a)\big) + f(a)$

$\Rightarrow f\big(2a - f(a)\big) = 0$ và $2a - f(a) \in \mathbb{R}^+$ (vô lý)

Vậy với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ thì $f(x) \geq x$

Xét (1): Giả sử tồn tại a, b thực dương để $f(a) = f(b)$ $(b > a)$

$P_{(1)}(x, a)$: $f\big(x + f(a)\big) = f(x + a) + f(a)$

$P_{(1)}(x, a)$: $f\big(x + f(b)\big) = f(x + b) + f(b)$

Suy ra: $f(x + a) = f(x + b)\ \ (x \in \mathbb{R}^+)\ \ (5)$

$P_{(5)}(t - a)$: $f(t) = f(t + b - a)\ \ (t \in \mathbb{R}^+, t \geq a)$

$\Rightarrow c = f(a) = f(b) = \cdots = f\big(a + n(b - a)\big)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow c \geq a + n(b - a)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Đẩy n ra vô cùng thì vô lý (vì c là hằng số). Vì vậy f đơn ánh

$P_{(1)}(2x, y)$: $f\big(2x + f(y)\big) = f(2x + y) + f(y)$

$P_{(1)}(2y, x)$: $f\big(2y + f(x)\big) = f(2y + x) + f(x)$

Áp dụng (*), ta có $f\big(2x + f(y)\big) = f\big(2y + f(x)\big)$

Do f đơn ánh nên $2x + f(y) = 2y + f(x)$

$$\Rightarrow f(y) - 2y = f(x) - 2x = f(1) - 2 = c$$

$\Rightarrow f(x) = 2x + c$ (c là hằng số)

Thử lại $2x + 2y + 3c = VT = VP = 2x + 2y + 2c$. Do đó $c = 0$

Vậy $f(x) = 2x\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải + Nhận xét
Bài 4.1

Bài 4.1. $\begin{cases} f\big(x-g(y)\big)=f\big(-x+2g(y)\big)+xg(y)-6 & (1) \\ g(y)=g(2f(x)-y) & (2) \end{cases}$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$

a) $P_{(1)}(x;2020)$:

$$f\big(x-g(2020)\big)=f\big(-x+2g(2020)\big)+xg(2020)-6$$

$\Rightarrow f\big(x-g(2020)\big)-f\big(-x+2g(2020)\big)=xg(2020)-6$ là hàm bậc nhất theo x (do $g(2020)>0$).

Vậy với mọi $t\in\mathbb{R},\exists a,b$ sao cho $f(a)-f(b)=t$. (*)

$P_{(2)}(z,y)$: $g(2f(z)-y)=g(y)=g(2f(x)-y)$.

Thay y thành $2f(x)-y$ ta được $(2f(z)-2f(x)+y)=g(y)$.

Từ (*) suy ra $g(y)=g(y+2t)$ $\forall y,t\in\mathbb{R}$, từ đây dễ dàng suy ra g là hàm hằng.

b) Ta suy ra được $g(x)=c$ $\forall x\in\mathbb{R}$ với c là số thực dương nào đó (do $g(2021)>0$)

Thế vào (1) ta được $f(x-c)=f(-x+2c)+cx-6$

Thay $x=\frac{3c}{2}$, ta được $\frac{3c^2}{2}=6$ hay $c=2$ (do c dương).

Vậy ta có $f(x-2)=f(-x+4)+2x-6$. Thay x thành $x+3$ ta được $f(x+1)=f(-x+1)+2x$

Hay $f(x+1)-(x+1)=f(-x+1)-(-x+1)$ hay $h(1+x)=h(1-x)$ tức là điều phải chứng minh.

<u>Nhận xét:</u> *Nếu biết phương pháp thì việc chứng minh $f(x)-f(y)$ toàn ánh rồi thêm biến vào (2) là khá tự nhiên (vì nhu cầu tạo $f(x)-f(y)$ mà không ảnh hưởng đến biến y đang khá tự do trong biểu thức) từ đó có lời giải trên. Câu a) có một cách giải khác bằng việc thay $x=\frac{3}{2}g(y)$ vào (1) rồi loại trường hợp $g(y)=-2$, bạn đọc có thể thử.*

Lời giải + Nhận xét
Bài 4.2

Bài 4.2. $f^2(x) + 2yf(x) + f(y) = f(y + f(x))$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$ (1)

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn đề bài.

Nếu $f(x) \equiv 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, thử lại vào (1), ta nhận.

Giả sử tồn tại giá trị x_0 thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$, thay x bởi x_0 vào (1), ta được: $f^2(x_0) + 2yf(x_0) + f(y) = f(y + f(x_0))\ \forall y \in \mathbb{R}$. (2)

Thay y bởi $\frac{y-f^2(x_0)}{2f(x_0)}$ vào (2): $y + f\left(\frac{y - f^2(x_0)}{2f(x_0)}\right) = f\left(\frac{y - f^2(x_0)}{2f(x_0)} + f(x_0)\right)$

Suy ra $f\left(\frac{y - f^2(x_0)}{2f(x_0)} + f(x_0)\right) - f\left(\frac{y - f^2(x_0)}{2f(x_0)}\right) = y$ với mọi y thuộc $\mathbb{R}$.

Vì vế phải của biểu thức trên là 1 hàm bậc nhất nên $f(x) - f(y)$ toàn ánh với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Thay y bởi $-f(x)$ vào (1), ta được:

$f(-f(x)) - f^2(x) = f(0)$ hay $f(-f(x)) = f^2(x) + f(0)\ \forall x \in \mathbb{R}$

Thay y với $-f(y)$ vào (1), ta được:

$$f(f(x) - f(y)) = f^2(x) - 2f(x)f(y) + f(-f(y))$$
$$= f^2(x) - 2f(x)f(y) + f^2(y) + f(0) = \left(f(x) - f(y)\right)^2 + f(0)$$

Vì $f(x) - f(y)$ toàn ánh với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$ nên $f(x) = x^2 + c$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $c = f(0)$, thử lại ta nhận.

Vậy có duy nhất 1 hàm số thỏa đề bài là $f(x) = x^2 + c$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, c là hằng số bất kì.

Lời giải + Nhận xét
Bài 4.3, 4.4

Bài 4.3. $f(x+f(y)) = 3f(x) + f(y) - 2x \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Đặt $f(0) = a$.

$P(0,x): f(f(x)) = 3a + f(x)$

$P(x,0): f(x+a) = 3f(x) + a - 2x \Rightarrow f(x+a) - 3f(x) = a - 2x$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \exists a, b \in \mathbb{R}: x = f(a) - 3f(b) \qquad (*)$$

$P(-f(x), x)$: $a = f(-f(x) + f(x)) = 3f(-f(x)) + f(x) + 2f(x)$

$\Rightarrow f(-f(x)) = -f(x) + \frac{a}{3}$

$P(-2f(x), x): -f(x) + \frac{a}{3} = f(-f(x)) = 3f(-2f(x)) + f(x) + 4f(x)$

$\Rightarrow f(-2f(x)) = -2f(x) + \frac{a}{9}$

$P(-3f(x), x): -2f(x) + \frac{a}{9} = f(-2f(x)) = 3f(-3f(x)) + f(x) + 6f(x) \Rightarrow f(-3f(x)) = -3f(x) + \frac{a}{27}$

$P(-3f(x), y): f(f(y) - 3f(x)) = 3f(-3f(x)) + f(y) + 6f(x)$

$\Rightarrow f(f(y) - 3f(x)) = f(y) - 3f(x) + \frac{a}{9}$

Mà có $(*)$ nên $f(x) = x + \frac{a}{9} \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại vào giả thiết: $a = 0$.

Vậy $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 4.4. $f(x+f(y)) = f(x) + (x+f(y))^4 - x^4 \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Nếu f hằng: suy ra $f \equiv 0$, thử lại thỏa đề bài.

Xét f khác hằng: tồn tại $a \in \mathbb{R}: f(a) \neq 0$.

$P(x,a): f(x+f(a)) - f(x) = (x+f(a))^4 - x^4 \qquad (1)$

Vế phải (1) là 1 đa thức bậc 3 theo ẩn x (do $f(a) \neq 0$) nên nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \exists a, b \in \mathbb{R}: x = f(a) - f(b) \qquad (*)$

$P(-f(x), x): f(0) = f(-f(x)) + 0^4 - f^4(x)$

$P(-f(x), y): f(f(y) - f(x)) = f(-f(x)) + (f(y) - f(x))^4 - f^4(x)$

$$\Rightarrow f(f(y) - f(x)) = f(0) + (f(y) - f(x))^4$$

Mà có $(*)$ nên $f(x) = x^4 + c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Thử lại nhận với mọi $c \in \mathbb{R}$.

Vậy có 2 nghiệm hàm là $f \equiv 0$ và $f(x) = x^4 + c$ với c tùy ý.

Lời giải + Nhận xét

Bài 4.5

Bài 4.5. $f(f(x)-y^2)=f(x)^2-2f(x)y^2+f\big(f(y)\big)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Dễ thấy hàm $f\equiv 0$ thỏa mãn phương trình hàm. Ta xét các hàm f không đồng nhất 0, hay $\exists a$: $f(a)\neq 0$

$$P(0;0):\ f\big(f(0)\big)=f(0)^2+f\big(f(0)\big)\Rightarrow\ f(0)=0.$$

$P(x;0)$: $f\big(f(x)\big)=f(x)^2$. Thay $y=a$ ta được $f\big(f(a)\big)=f(a)^2>0$.

$P(0;y)$: $f(-y^2)=f\big(f(y)\big)$.

$P(a;y)$: $f(f(a)-y^2)-f\big(f(y)\big)=f(a)^2-\ f(a)y^2$ là hàm bậc nhất theo y^2 có hệ số bậc nhất âm, hệ số tự do dương (do cách chọn a) nên toàn ánh trên $\mathbb{R}_{\leq 0}$. (*)

$P(z;y)$: $f(f(z)-y^2)=f(z)^2-2f(z)y^2+f\big(f(y)\big)$ (2)

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được

$$f(f(x)-y^2)-f(f(z)-y^2)=f(x)^2-2f(x)y^2-(f(z)^2-2f(z)y^2)$$
$$=(f(x)-y^2)^2-(f(z)-y^2)^2$$

Thay x thành $f(a)-x^2$, z thành $f(x)$ trong phương trình trên ta được

$$f(f(f(a)-x^2)-y^2)-f\big(f\big(f(x)\big)-y^2\big)$$
$$=(f(f(a)-x^2)-y^2)^2-\big(f\big(f(x)\big)-y^2\big)^2\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Do $f\big(f(x)\big)=f(x)^2\geq 0$ với mọi x thực nên ta có thể thay y^2 thành $y^2+f^2(x)$ trong phương trình trên, được

$$f\big(f(f(a)-x^2)-f\big(f(x)\big)-y^2\big)-f(-y^2)$$
$$=\big(f(f(a)-x^2)-f\big(f(x)\big)-y^2\big)^2-(-y^2)^2$$

Do (*) nên ta có thể thay $f(f(a)-x^2)-f\big(f(x)\big)$ thành $-t^2$, ta được

$f(-t^2-y^2)-f(-y^2)=(-t^2-y^2)^2-(-y^2)^2\ \forall y,t$ thực.

Thay $y=0$ vào ta được $f(-t^2)=t^4$ hay $f(x)=x^2\ \forall x$ không dương .

Mà $f\big(f(x)\big)=f(x)^2$ nên $f(x^2)=x^4\ \forall x$ không dương hay $f(x)=x^2\ \forall x$ không âm. Vậy $f(x)=x^2\ \forall x$ thực.

Kết luận: Các nghiệm hàm của phương trình (1) là $f\equiv 0$ và $f(x)=x^2$.

<u>Nhận xét:</u> *Câu này có phần phức tạp hơn các câu trước do x^2 không toàn ánh trên $\mathbb{R}$, do đó cần cẩn thận trong việc nhận xét về sự toàn ánh của $f(x)-f(y)$, tuy nhiên nếu đã nắm được ý tưởng của phương pháp này, cùng với các tính chất về dấu của biểu thức trong bài thì chỉ cần sự cẩn thận để có thể xử lý điều kiện một cách ổn thỏa.*

Lời giải + Nhận xét
Bài 4.6, 4.7

Bài 4.6. $f(x)^2 + 2yf(x) + f(y) = f\big(y + f(x)\big)$

Ta nhận hàm $f \equiv 0$. Bây giờ ta xét hàm số f không đồng nhất 0, hay $\exists c: f(c) \neq 0$.

$P(c; y)$: $f\big(y + f(c)\big) - f(y) = 2yf(c) + f(c)^2$ là hàm bậc nhất theo y (do $f(c) \neq 0$) nên toàn ánh. (1)

$P\big(x; -f(x)\big)$: $-f(x)^2 + f\big(-f(x)\big) = f(0)$

$\Rightarrow f\big(-f(x)\big) = f(0) + f(x)^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$P\big(x; -f(y)\big)$: $f(x)^2 - 2f(x)f(y) + f(y)^2 + f(0) = f\big(f(x) - f(y)\big)$.

Do (1) nên ta có $f(x) = x^2 + f(0) = x^2 + a \ \ \forall a \in \mathbb{R}$. Thử lại ta nhận hàm.

Vậy tất cả hàm thỏa mãn phương trình hàm trên là $f(x) = x^2 + a$, với a là số thực bất kì.

Bài 4.7. $f(f(x) + y^2) = f\big(f(x)\big) + yf(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

$P(0, x)$: $f(f(0) + x^2) = f\big(f(0)\big) + xf(x)$

$P(0, -x)$: $f(f(0) + x^2) = f\big(f(0)\big) - xf(-x)$

$P(0, x) - P(0, -x) \Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow P(0, x)$: $f(x^2) = xf(x)$

$\Rightarrow f(f(x) + y^2) = f\big(f(x)\big) + f(y^2)$ (1)

$P(-x, y)$: $f(f(-x) + y^2) = f\big(f(-x)\big) + yf(y)$

$\Rightarrow f(f(x) - y^2) = f\big(f(x)\big) - yf(y) = f\big(f(x)\big) - f(y^2)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $f(f(x) + y) = f\big(f(x)\big) + f(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (3)

Lời giải + Nhận xét
Bài 4.7

Kí hiệu $Q(x, y)$ là phép thế vào (3)

$Q(1, x)$: $f(x+1) = f(x) + 1$

$P(0, x+1)$:

$$f(x^2+2x+1) = (x+1)f(x+1) = x(f(x)+1) + f(x+1)$$
$$= f(x^2) + f(x+1) + x$$
$$\Rightarrow x = f(x^2+2x+1) + f(-x^2) + f(-x-1)$$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \exists a, b, c \in \mathbb{R}: x = f(a) + f(b) + f(c) \qquad (*)$$

$Q(x, f(y)+f(z))$: $f\big(f(x)+f(y)+f(z)\big) = f\big(f(x)\big) + f\big(f(y) + f(z)\big) = f\big(f(x)\big) + f\big(f(y)\big) + f\big(f(z)\big)$ (4)

$Q(x, f(y)+f(z)+t)$: $f(f(x)+f(y)+f(z)+t) = f\big(f(x)\big) + f(f(y)+f(z)+t) = f\big(f(x)\big) + f\big(f(y)\big) + f\big(f(z)\big) + f(t)$ (5)

Lấy (5) – (4): $f(f(x)+f(y)+f(z)+t) = f\big(f(x)+f(y)+f(z)\big) + f(t)$

Mà có $(*)$ nên $f(x+t) = f(x) + f(t)$ hay f cộng tính trên $\mathbb{R}$.

Ta tính $f\big((x+1)^2\big)$ bằng 2 cách:

$$f\big((x+1)^2\big) = (x+1)f(x+1) = (x+1)(f(x)+1)$$
$$f\big((x+1)^2\big) = f(x^2) + f(2x) + f(1) = (x+2)f(x) + 1$$

Từ đó: $(x+1)(f(x)+1) = (x+2)f(x) + 1 \Rightarrow f(x) = x$

Vậy $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét: Bài này tổng quát ý tưởng toàn ánh theo $f(x) - f(y)$ thành toàn ánh theo 1 hàm $g(f)$ (ở đây $g(f) = f(a) + f(b) + f(c)$).

Lời giải + Nhận xét
Bài 4.8

Bài 4.8. $f(x^2)+f(y^2)+2xf(y)=f^2\big(x+f(y)\big)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

Dễ thấy hàm $f\equiv 0$ thỏa đề bài.

Xét $f\neq 0$: tồn tại $a\in R$: $f(a)\neq 0$. Đặt $f(0)=b$.

$P(b,x)$: $f(b^2)+f(x^2)+2bf(x)=f^2\big(b+f(x)\big)$

$P(f(x),0)$: $f\big(f^2(x)\big)+b+2f(x).b=f^2(f(x)+b)$

$\Rightarrow f\big(f^2(x)\big)=f(x^2)-b+f(b^2)=f(x^2)+c$ (với $c=-b+f(b^2)$)

$P(-f(x),x)$: $f\big(f^2(x)\big)+f(x^2)-2f(x).f(x)=f^2\big(-f(x)+f(x)\big)=b^2$

$\Rightarrow f(x^2)+c+f(x^2)-2f^2(x)=b^2\Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}^2)=\mathrm{f}^2(\mathrm{x})+\mathrm{d}$ (với $d=\frac{b^2-c}{2}$)

$P(x,a)$: $f(x^2)+f(a^2)+2xf(a)=f^2\big(x+f(a)\big)=f\left(\big(x+f(a)\big)^2\right)-d$

$\Rightarrow f\left(\big(x+f(a)\big)^2\right)-f(x^2)=f(a^2)+2xf(a)+d$

$\Rightarrow \{f(x)-f(y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$ (do $\{f(a^2)+2xf(a)+d\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$) $(*)$

$P(-f(x),y)$: $f\big(f^2(x)\big)+f(y^2)-2f(x)f(y)=f^2\big(-f(x)+f(y)\big)$

$\Rightarrow f^2(x)+c+d+f^2(y)+d-2f(x).f(y)=f\left(\big(f(y)-f(x)\big)^2\right)-d$

$\Rightarrow \big(f(y)-f(x)\big)^2+c+3d=f\left(\big(f(y)-f(x)\big)^2\right)$

Mà do $(*)$ nên $f(x^2)=x^2+e$ với $e=c+3d\Rightarrow f(x)=x+e\ \ \forall x\geq 0$

Thế lại $x,y\geq 0$ vào giả thiết, ta được $e=0\Rightarrow f(x)=x\quad \forall x\geq 0$

Lại có: $f^2(x)=f(x^2)-d=f^2(-x)$ nên $f(-x)=\pm f(x)$

Thử lại trực tiếp vào giả thiết ta nhận nghiệm hàm f như sau:

$$f(x)=x\ \forall x\geq 0,\qquad f(x)=i(x).x\ \forall x<0$$

với $i(x)$: $(-\infty,0)\to\{1,-1\}$ bất kì.

Tài liệu tham khảo

[1] *Diễn đàn AOPS:* [*https://artofproblemsolving.com/community*](https://artofproblemsolving.com/community)

[2] *Bài toán hàm số qua các kỳ thi Olympic – Nguyễn Trọng Tuấn*

[3] *Tuyển tập đề thi chọn đội tuyển các tỉnh, thành phố năm 2017-2018*

[4] *Phép thế đối xứng trong phương trình hàm:* [*https://lovetoan.wordpress.com/2019/05/25/phuong-phap-doi-xung-su-dung-trong-giai-phuong-trinh-ham/*](https://lovetoan.wordpress.com/2019/05/25/phuong-phap-doi-xung-su-dung-trong-giai-phuong-trinh-ham/)

[5] *Chuyên khảo Phương trình hàm – ThS. Nguyễn Tài Chung, ThS.NGƯT. Lê Hoành Phò*