The Gifted Battlefield

TỈ SỐ KÉP- HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA

THỰC HIỆN BỞI:

BAN CHUYÊN MÔN TOÁN HỌC
DỰ ÁN THE GIFTED BATTLEFIELD

I. Lý thuyết

a) Tỉ số kép

Định nghĩa 1. *Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Tỉ số đơn của A, B, C là một số, kí hiệu là (ABC), được xác định:* $(ABC) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

Định nghĩa 2. *Bộ bốn điểm khác nhau đôi một, có kể thứ tự, cùng nằm trên một đường thẳng được gọi là hàng điểm. Tỉ số kép của hàng điểm A, B, C, D, kí hiệu là $(ABCD)$ được xác định như sau:* $(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

Như vậy, từ định nghĩa trên có thể thấy ngay các tính chất cơ bản của một tỉ số kép:

- $(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA)$.
- $(ABCD) = \frac{1}{(BACD)}$.
- $(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - (DBCA)$.
- $(ABCD) = (ABCD')$ thì D' trùng D.

Định nghĩa 3. *Bộ bốn đường thẳng đôi một khác nhau, có kể đến thứ tự, cùng thuộc một chùm đầy đủ đường thẳng được gọi là chùm đường thẳng.*

Định lý 1. *Cho chùm đường thẳng a, b, c, d tâm S. Một đường thẳng Δ không qua S lần lượt cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Khi đó $(ABCD)$ không phụ thuộc vào cách chọn Δ, số không đổi nói trên được gọi là tỉ số kép của chùm a, b, c, d. Kí hiệu là (ab, cd).*

Phép chiếu xuyên tâm

Định nghĩa 4. *Cho hai đường thẳng* d, d' *và một điểm* S *không thuộc* d, d'. *Xét ánh xạ* f *đi từ đường thẳng* d *vào đường thẳng* d', *xác định như sau: Với* A *thuộc* d, $f(A) = A'$ *sao cho* S, A, A' *thẳng hàng. Khi đó* f *được gọi là phép chiếu xuyên tâm. Điểm* S *được gọi là tâm chiếu của* f.

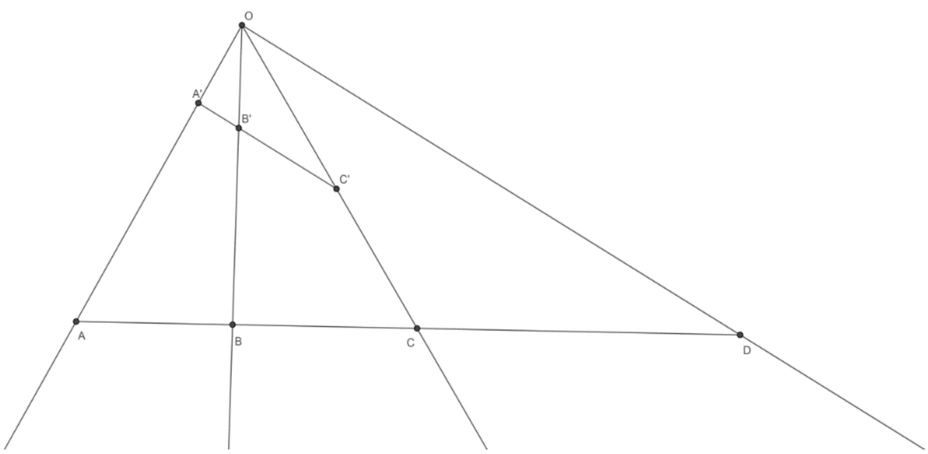
Từ đó, định lý 1 có thể hiểu đơn giản hơn: *Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỉ số kép của hàng điểm.*

Nhận xét.

1. Trên mặt phẳng, mỗi phương đều có một điểm vô cùng ứng với phương đó. Vì vậy ta có thể xem các đường thẳng song song đồng quy tại điểm vô cùng ứng với phương của các đường thẳng đó.
2. Nhờ những cách chọn tâm chiếu khác nhau, ta có thể thu được vô số hàng điểm có cùng tỉ số kép với hàng điểm A, B, C, D ban đầu.
3. Từ đó, ta có thể quy ước tỉ số đơn $(ABC) = (ABC\infty)$.

Như vậy, ta có định lý sau:

Định lý 2. *Cho chùm đường thẳng* a, b, c, d *tâm* O. *Một đường thẳng* Δ *không đi qua* O *lần lượt cắt* a, b, c, d *tại* A, B, C, D. *Một đường thẳng* $\Delta' || d$ *khi và chỉ khi* $(ABCD) = (A'B'C')$ $\big(= O(ABCD) = (A'B'C'\infty) = (A'B'C')\big)$.



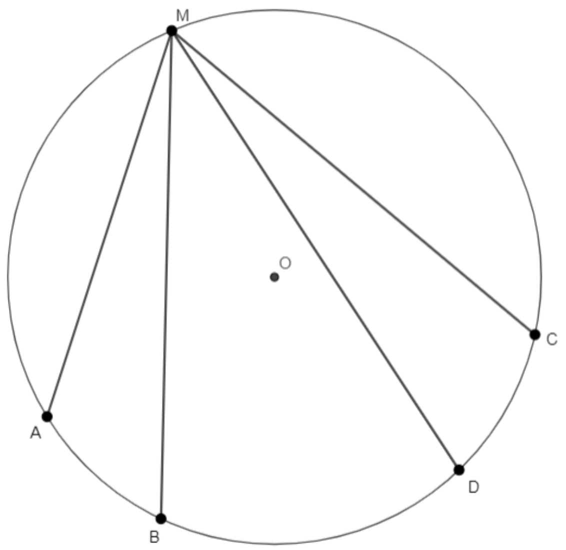
Tỉ số kép của bốn điểm trên đường tròn

Trước hết, ta phát biểu một định lý sau:

Định lý 3. *Với mọi chùm $S(ABCD)$, ta có:* $S(ABCD) = \frac{\sin(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SA})}{\sin(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SB})} : \frac{\sin(\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SA})}{\sin(\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SB})}$.

Chú ý rằng trong định lý 3, các điểm A, B, C, D không nhất thiết cùng nằm trên một đường thẳng.

Định lý 4. *Cho bốn điểm A, B, C, D cố định trên đường tròn (O) và một điểm M chuyển động trên (O). Khi đó $M(ABCD)$ không đổi.*



Chứng minh. Dễ thấy định lý 4 là hệ quả trực tiếp của định lý 3.

Định nghĩa 5. *Tỉ số kép $M(ABCD)$ được gọi là tỉ số kép của bốn điểm A, B, C, D trên đường tròn (O).Do tính bất biến của nó khi tâm chiếu di động trên (O), ta kí hiệu là $(ABCD)$.*

Khảo sát vị ví tương đối của cặp C, D và cặp A, B trên (O), ta thấy dấu của $\frac{\sin(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA})}{\sin(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB})} : \frac{\sin(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MA})}{\sin(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB})}$ luôn dương khi C, D đối với đường thẳng AB là luôn âm trong trường hợp còn lại. Vậy ta có nhận xét sau.

Nhận xét. Kết hợp với định lý 3, ta có thể viết lại $(ABCD)$ dưới dạng

$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ khi C, D nằm cùng phía với đường thẳng AB.

$(ABCD) = -\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ khi C, D nằm khác phía đối với đường thẳng AB.

Như vậy, với trường hợp tâm chiếu nằm trên đường tròn, ta có thể chiếu từ đường tròn lên đường thẳng, đường thẳng lên đường tròn và đường tròn lên đường tròn (Nếu tâm chiếu là giao điểm của hai đường tròn).

Ngoài ra, như đã biết, phép nghịch đảo bảo toàn tỉ số kép nên ta có tính chất sau: Cho đường tròn (O) và điểm S không nằm trên (O). Cho bốn điểm A, B, C, D nằm trên (O). Khi đó, SA, SB, SC, SD lần lượt cắt (O) tại A', B', C', D' thì $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Tính chất cơ bản của tỉ số kép

Tính chất 1. *Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O. Các điểm A, B, C trên d và các điểm A', B', C' trên d'. Khi đó AA', BB', CC' đồng quy hoặc đôi một song song khi $(OABC) = (OA'B'C')$.*

Tính chất 2. *Cho ba điểm A, B, C trên mặt phẳng và hai điểm O, O'. Khi đó A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow O(O'ABC) = O'(OABC)$.*

Tính chất 3. *Nếu hai chùm $O(ABCD)$ và $O'(A'B'C'D')$ có $OA \perp O'A'$, $OB \perp O'B'$, $OC \perp O'C'$, $OD \perp O'D'$* thì $O(ABCD) = O'(A'B'C'D')$ (Tính chất về chùm trực giao).

Tính chất 4. *Các phép biến hình thông thường (các phép dời hình, đồng dạng, phép nghịch đảo) đều bảo toàn tỉ số kép.*

b) Hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa

Định nghĩa 6. *Nếu* $(ABCD) = -1$ *thì* A, B, C, D *được gọi là một hàng điểm điều hòa. Nói cách khác* A, B, C, D *là một hàng điểm điều hòa* $\Leftrightarrow$ $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

Nhận xét. Nếu $(ABCD) = -1$ thì $(BACD) = (BADC) = (ABDC) = (CDBA) = (CDAB) = (DCAB) = (DCBA) = -1$.

Định lý 5. *Cho hàng điểm* $(ABCD)$ *với* I *là trung điểm của* AB. *Khi đó các điều sau tương đương.*

i) $(ABCD) = -1$

ii) $\overline{IA}^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$ *(hệ thức Newton)*

iii) $\overline{CI}.\overline{CD} = \overline{CA}.\overline{CB}$ *(hệ thức Maclaurin)*

iv) $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$ *(hệ thức Descartes)*

Các chùm điều hòa cơ bản

Định lý 6. *Cho tam giác* ABC *với* AD, AE *lần lượt là phân giác trong, ngoài của góc* A $(D, E \in BC)$. *Khi đó* $(DEBC) = -1$.

Định lý 7. *Cho điểm* P *bất kì không nằm trên cạnh của tam giác* ABC. AP, BP, CP *cắt các cạnh đối diện tại* D, E, F. EF *cắt* BC *tại* K. *Gọi* L *là giao điểm của* AD *và* EF. *Khi đó* $(BCDK) = (EFLK) = (APLD) = -1$.

Định lý 8. *Cho điểm* P *nằm ngoài đường tròn* (O). *Từ* P *kẻ các tiếp tuyến* PA, PB *và cát tuyến* PCD *tới* (O); Q *là giao* CD *với* AB. *Khi đó* $(PQCD) = -1$.

Các tính chất cơ bản của hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa

Tính chất 5. *Cho chùm* a, b, c, d *và một đường thẳng* Δ. *Khi đó nếu có 2 trên 3 tính chất sau thì sẽ có tính chất còn lại:*

i) $(ab, cd) = -1$

ii) Δ *song song với một đường của chùm*

iii) Δ *định ra trên 3 đường của chùm 2 đoạn thẳng bằng nhau*

Tính chất 6. *Cho chùm điều hòa* a, b, c, d. *Các điều kiện sau đây là tương đương:*

i) $c \perp d$

ii) c *là phân giác của góc tạo bởi* a, b

iii) d *là phân giác của góc tạo bởi* a, b

c) Tứ giác điều hòa

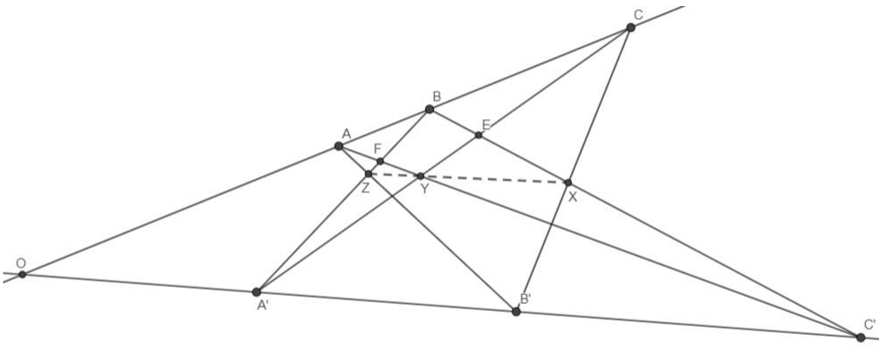
Định nghĩa 7. *Tứ giác $ABCD$ được gọi là điều hòa nếu $(ACBD) = -1$ hay $AB.CD = AD.BC$.*

Định lý 9. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Các điều kiện sau là tương đương:*

i) $(ACBD) = -1$
ii) *AC là đối trung của tam giác BAD và BCD*
iii) *BD là đối trung của tam giác ABC và ADC*
iv) *Tiếp tuyến tại A và C cắt nhau trên BD*
v) *Tiếp tuyến tại B và D cắt nhau trên AC*

Tiếp theo, ta sẽ đi tới phần chứng minh các định lý quen thuộc và quan trọng sau:

Định lý Pappus: Cho A, B, C nằm trên cùng 1 đường thẳng và A', B', C' nằm trên cùng 1 đường thẳng khác. BC' cắt CB' tại X, CA' cắt AC' tại Y, AB' cắt BA' tại Z. Khi đó X, Y, Z thẳng hàng.



Chứng minh.

Vẽ AB cắt $A'B'$ tại O, BC' cắt CA' tại E, AC' cắt BA' tại F.

Ta có:

$(BEXC') = C(BEXC') = C(OA'B'C') = A(OA'B'C') = A(BA'ZF) = (BA'ZF)$

$\Rightarrow$ $EA', XZ, C'F$ đồng quy $\Rightarrow X, Y, Z$ thẳng hàng.

Một cách tương tự ta thu được **định lý Pascal:**

Cho 6 điểm A, B, C, A', B', C' cùng thuộc một đường tròn. Khi đó giao điểm các cặp đường thẳng $(AB', BA'), (AC', CA'), (BC', B'C)$ thẳng hàng. Để tránh bị ngộ nhận người ta thường kí hiệu 6 điểm như sau $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$.

Trong trường hợp 2 điểm $A \equiv B'$, ta có thể coi đường thẳng AB' là tiếp tuyến của đường tròn tại A.

Định lý Desargues: Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. BC cắt $B'C'$ tại X, CA cắt $C'A'$ tại Y, AB cắt $A'B'$ tại Z. Chứng minh X, Y, Z thẳng hàng khi và chỉ khi AA', BB', CC' đồng quy hoặc đôi một song song.

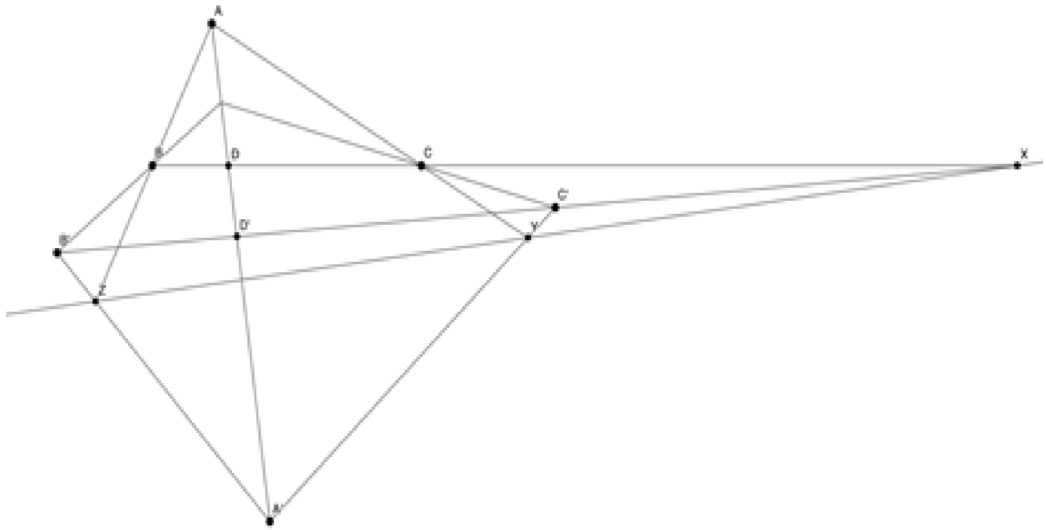
Vẽ AA' cắt $BC, B'C'$ lần lượt tại D và D', ta có:

X, Y, Z thẳng hàng

$\Leftrightarrow A(A'XZY) = A'(AXZY)$

$\Leftrightarrow A(DXBC) = A'(D'XB'C') \Leftrightarrow (DXBC) = (D'XB'C')$

$\Leftrightarrow AA'$, BB', CC' đồng quy hoặc đôi một song song.



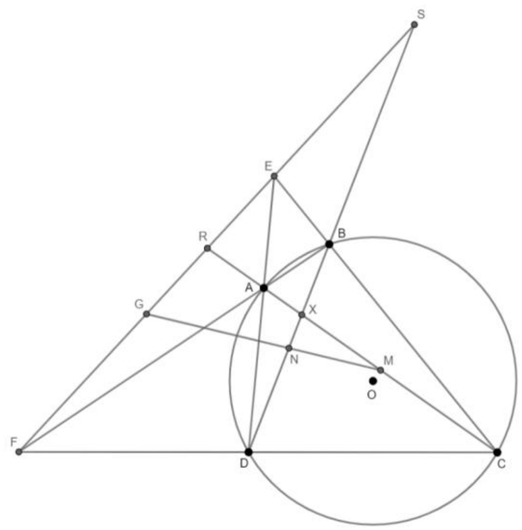
II. Ví dụ và bài tập

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp khác hình thang cân có $AD \cap BC = E$, $AB \cap CD = F$, $AC \cap EF = R$, $BD \cap EF = S$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BD. Chứng minh rằng:

a) M, N, R, S đồng viên

b) EF là tiếp tuyến chung của (EMN), (FMN)

Lời giải. Gọi X = $AC \cap BD$.



Ta có: Theo tính chất về hàng điểm của tứ giác toàn phần:

$(SXBD)$ = $(RXAC)$ = -1 mà M, N lần lượt là trung điểm AC, BD

$\Rightarrow \overline{XR} \cdot \overline{XM} = \overline{XA} \cdot \overline{XC} = \overline{XB} \cdot \overline{XD} = \overline{XN} \cdot \overline{XS}$ (hệ thức Maclaurin)

$\Rightarrow M, N, R, S$ đồng viên

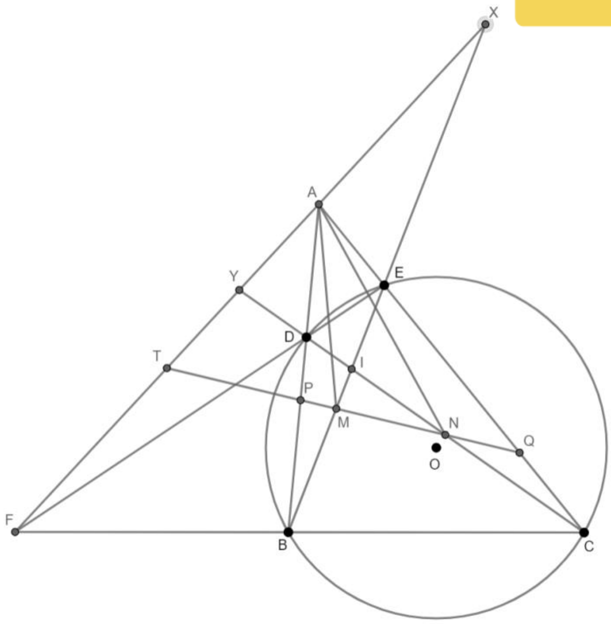
Mặt khác, gọi $G = MN \cap EF$ thì theo tính chất của đường thẳng Gauss, G là trung điểm EF mà $(SREF)$ = -1

$\Rightarrow GE^2 = GF^2 = \overline{GR} \cdot \overline{GS} = \overline{GN} \cdot \overline{GM}$

$\Rightarrow EF$ tiếp xúc (EMN) và (FMN)

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn không cân và (O) đi qua các đỉnh B, C cắt các cạnh AB, AC ở D, E. Giả sử $BE \cap CD = I$. Gọi M, N là trung điểm BE, CD và MN cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh AI là đối trung $\triangle APQ$.

Lời giải. Ta gọi $\{F\} = \cap BC$, $\{T\} = MN \cap AF$ và kéo dài BE, CD cắt AF ở X, Y



$\Rightarrow$ Áp dụng ví dụ 1 ở trên, ta có TA tiếp xúc (AMN) và $MNXY$ là tứ giác nội tiếp

Tiếp theo ta có $\triangle AEB \sim \triangle ADC$ (g.g) $\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle ANC$

$\Rightarrow AM, AN$ đẳng giác trong $\angle APQ$.

$\Rightarrow (AMN)$ tiếp xúc (APQ)

$\Rightarrow TA$ tiếp xúc (APQ).

Mặt khác $(YIDC)$ = -1 nên $A(YIDC) = A(TIBC)$ = -1 mà TA là tiếp tuyến $(APQ) \Rightarrow AI$ là đối trung $\triangle APQ$.

Bài 1. Cho ΔABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của AD và K là giao điểm của AD và EF. Chứng minh rằng K là trực tâm ΔMBC.

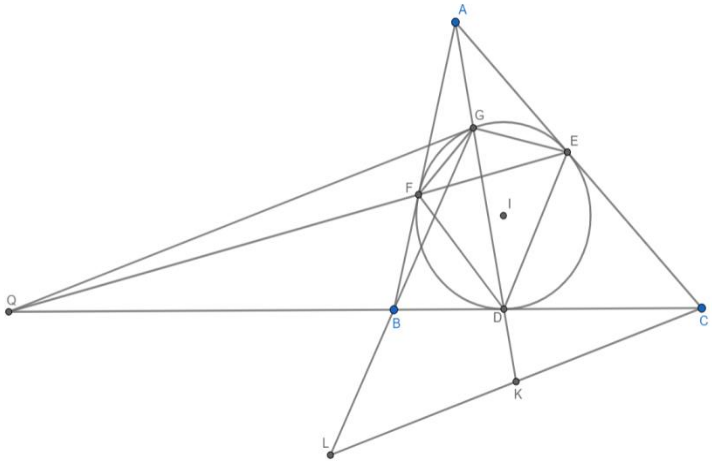
Bài 2. Cho ΔABC và đường trong (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Một đường thẳng bất kì đi qua I cắt BC và EF lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng AI là phân giác $\angle MAN$.

Bài 3. (China TST 2002) Cho $ABCD$ là tứ giác lồi. AB giao CD tại E; AD giao BC tại F; AC giao BD tại P. Gọi O là hình chiếu của P lên EF. Chứng minh $\angle BOC = \angle AOD$.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi T là giao của AC và BD, E là giao của AD và BC. Gọi M, N là trung điểm AB, CD. Chứng minh rằng TE tiếp xúc (TMN).

Ví dụ 3. (China TST 2008) Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$ và đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC ở D. Trên AD lấy điểm K sao cho $CD = CK$. Giả sử AD cắt (I) lần nữa tại G và $GB \cap CK = L$. Chứng minh K là trung điểm CL.

Lời giải. ta gọi E, F lần lượt là giao của (I) với AC, AB và $Q = EF \cap CB$.



$\Rightarrow GEDF$ là tứ giác điều hòa mà QFE là cát tuyến còn QD là tiếp tuyến của (I)

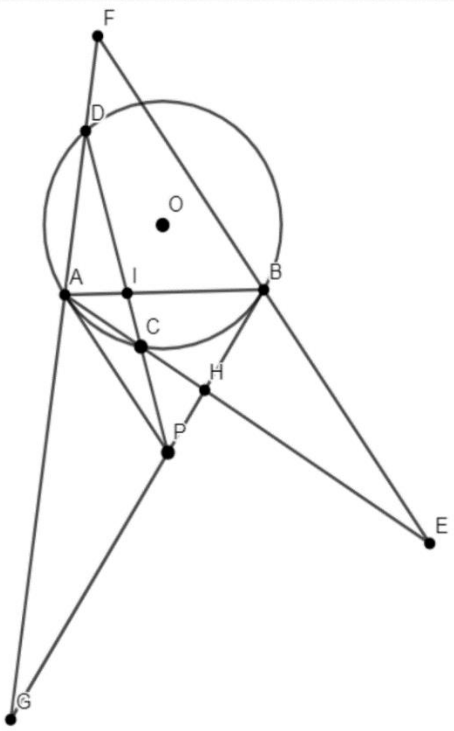
$\Rightarrow QG$ là tiếp tuyến $(I) \Rightarrow QG = QD$

$\Rightarrow \angle QGD = \angle QDG = \angle KDC = \angle DKC$

$\Rightarrow QG \parallel LC$ mà $G(QDBC) = -1$

$\Rightarrow K$ là trung điểm CL.

Ví dụ 4. (Philippines 2008) Cho P nằm ngoài đường tròn (O); hai tiếp tuyến kẻ từ P đến (O) *tiếp xúc* (O) tại A, B. Điểm C bất kỳ trên cung nhỏ AB. PC cắt (O) tại D. Đường thẳng qua B song song PA cắt AC, AD tại E, F. Chứng minh B trung điểm EF.



Theo tính chất tứ giác điều hòa, $(ACBD) = -1$

Dùng phép chiếu xuyên tâm B từ đường tròn lên đường thẳng PD:

$(ACBD) = (ICPD) = -1$ (do B cũng thuộc (O) nên khi chiếu sẽ là tiếp tuyến PB chiếu)

Tiếp tục dùng phép chiếu xuyên tâm A lên đường thẳng GB:

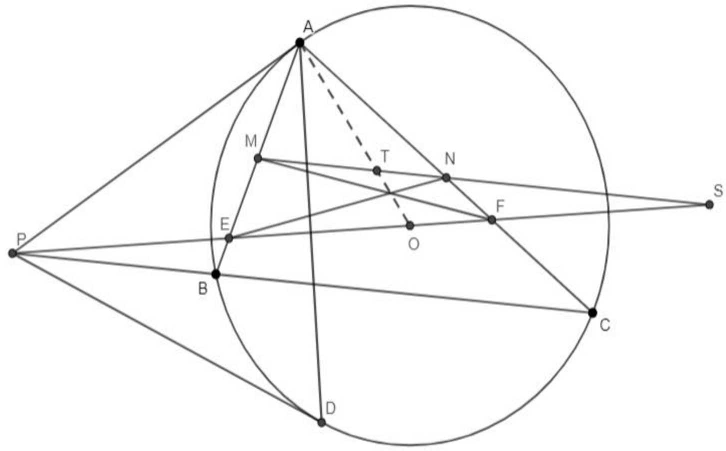
$$(\text{ICPD}) = (\text{BHPG}) = -1 \ \Rightarrow \frac{HP}{HB} = \frac{GP}{GB}$$

Mặt khác, theo định lý Thales: $\frac{HP}{HB} = \frac{AP}{BE}$ và $\frac{GP}{GB} = \frac{AP}{BF}$

$\Rightarrow BE = BF \Rightarrow B$ trung điểm EF

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC; P là giao điểm của tiếp tuyến tại A của (O) và BC. PO cắt AB, AC tại E, F. Chứng minh rằng EN, FM, AO đồng quy.

Phân tích. Gọi S là giao MN với PO



EN, FM, AO đồng quy $\Leftrightarrow (SOFE) = -1$

Nếu gọi T là giao của AO với MN

Ta chỉ cần chứng minh $(STNM) = -1$

Hay: $O(STNM) = -1$

Để ý: $OM \perp AB, ON \perp AC, OA \perp AP$

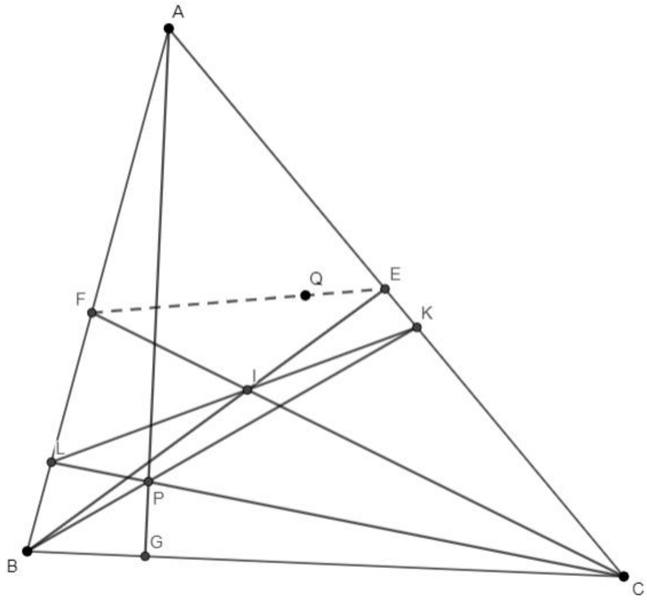
Nên ta kẻ $AD \perp OS$ $\big(D \in (O)\big)$

Khi đó theo tính chất của chùm trực giao thì $A(BCPD) = O(MNAS)$

Mà $A(BCPD) = -1$ hiển nhiên $\Rightarrow EN, FM, AO$ đồng quy.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp (I) và P, Q là hai điểm liên hợp đẳng giác với tam giác ABC. Gọi E, F là giao điểm của BI, CI với AC, AB. Gọi G, K, L là giao điểm của AP, BP, CP với BC, AC, AB. Chứng minh rằng I thuộc KL khi và chỉ khi Q thuộc EF khi và chỉ khi G thuộc IQ.

Lời giải. Giả sử ta có $I \in KL$



Ta chứng minh: F, Q, E thẳng hàng

$\Leftrightarrow B(CFQE) = C(BFQE)$

Xét phép đối xứng trục phân giác BI:

$BC \to BA, BF \to BC, BQ \to BP, BE \to BE$

$\Leftrightarrow B(CFQE) = B(ACPE) = (ACKE)$

Tương tự ta có:

$\Leftrightarrow C(BFQE) = (AFLB)$

Mà $(AFLB) = (ACKE)$ do FC, LK, BE đồng quy.

$\Leftrightarrow F, Q, E$ thẳng hàng

Theo bài toán 2 dưới ví dụ 1, 2 ta có AI là phân giác $\angle GAQ \Leftrightarrow G \in IQ$

Bài 1. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thuộc BC. Các điểm P, Q lần lượt thuộc $AC, AB. MP$ cắt NQ tại O, BO cắt NP tại K, CO cắt MQ tại L. Chứng minh AO, BL, CK đồng quy.

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại A, B, C của (O) lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

Bài 3. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có T là giao điểm hai tiếp tuyến tại B và C. Một đường thẳng d đi qua T sao cho d cắt đoạn thẳng AB ở D và cắt tia đối tia AC ở E. Gọi M là trung điểm DE. Đường thẳng MA cắt lại (O) ở K. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔTMK tiếp xúc với (O).

Bài 4. Cho tam giác ABC có (I) nội tiếp, (J) bàng tiếp góc A. IJ cắt BC tại K. Chứng minh (I), (J) và (ω) đường kính AK đồng trục.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường cao BE và CF. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm $BC, CA, AB. NF$ cắt PE tại X. AX cắt (AEF) tại K khác A. Chứng minh KM, OX cắt nhau tại (AEF).

Bài 6. (Olympic Chuyên KHTN 2017) Cho ΔABC không cân có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại các điểm D, E, F. Trên đường thẳng E, F lấy các điểm M, N sao cho $CM \parallel BN \parallel DA$. DM, DN lần lượt cắt đường tròn (I) tại P, Q khác D.

a) Chứng minh rằng BP, CQ, AD đồng qui tại điểm J
b) Gọi X là trung điểm PQ. Chứng minh JX đi qua trung điểm MN

Bài 7. (APMO 2013) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). P nằm trên tia AC sao cho PB, PD tiếp xúc với (O). Tiếp tuyến của (O) tại C cắt PD tại Q, AD tại R. E là giao điểm thứ hai của AQ và (O). Chứng minh rằng B, E, R thẳng hàng.

Bài 8. (Kosovo 2020) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có phân giác ngoài $\angle BAC$ cắt (O) tại D. Gọi X là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống AD và F là giao điểm phân giác trong $\angle BAC$ với BC. Chứng minh BX đi qua trung điểm AF.

Bài 9. (Thầy Trần Quang Hùng) Cho tam giác ABC nhọn và D là 1 điểm bất kỳ thuộc đoạn AC. Giả sử rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn thẳng BC tại E khác B. Tiếp tuyến tại B, D của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt nhau tại T. AT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tại F khác A. Cho CF giao DE tại G, AG giao BC tại H. Gọi M là trung điểm của AF, AE giao MD tại N. Chứng minh $HN || AT$.

Bài 10. Cho tam giác ABC. P là điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Qua P kẻ đường thẳng vuông góc PA cắt BC tại A_1, tương tự xác định B_1, C_1. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Bài 11. (Thầy Trần Quang Hùng) Cho ΔABC nội tiếp (O), trực tâm H. Gọi AD là đường cao, M là trung điểm BC. Lấy I, J lần lượt thuộc BC, AD sao cho $HI \,//\, AO,\ IJ \,//\, AM$. Lấy K đối xứng I qua J. Chứng minh rằng AK, OH, BC đồng quy.

Bài 12. Cho tam giác ABC nhọn có đường tròn tâm M đường kính BC cắt AC, AB tại E, F. Đường cao qua A của tam giác cắt (M) tại P. Gọi

$(I_1),(I_2)$ là đường tròn nội tiếp tam giác MPE, MPF. Chứng minh rằng giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của $(I_1),(I_2)$ thuộc BC.

Bài 13. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BD cắt đường tròn đường kính AC tại N, Q (Q nằm ngoài tam giác); đường cao CE cắt đường tròn đường kính AB tại M, P (P nằm ngoài tam giác). Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng PN, MQ, BC đồng quy tại K và BM, CN, HK đồng quy.

Bài 14. Cho tam giác ABC. E, F, K thuộc cạnh BC, CA, AB sao cho AE, BF, CK đồng quy tại I. Đường thẳng qua I song song EF lần lượt cắt EB, EK tại D, M. Chứng minh M là trung điểm ID.

Bài 15. (Thầy Lê Bá Khánh Trình) Cho tứ giác $ABCD$ thỏa tồn tại (I) có tâm I trên đoạn AB và (I) tiếp xúc AD, BC lần lượt tại E, F. BE cắt CF tại K, AD cắt BC tại T. Lấy H bất kì trên đoạn TK. Tia đối tia HA, HB lần lượt cắt (I) tại M, N. Chứng minh rằng tâm của (IMN) thuộc 1 đường cố định khi H chạy trên TK.

Bài 16. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. M trung điểm CD và N là điểm nằm trên (ABM) thỏa $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$. Chứng minh E, F, N thẳng hàng với E là giao điểm AC và BD; F là giao điểm BC và AD.

Bài 17. (Chọn đội tuyển Hà Nam) Cho tam giác ABC nhọn, không cân có trọng tâm G, tâm ngoại tiếp O. Gọi D, E, F lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB. Chứng minh rằng O là trọng tâm tam giác DEF.

Bài 18. (Chọn đội tuyển Bình Thuận) Cho tam giác ABC nhọn không cân có điểm D nằm trong tam giác sao cho $\angle ADB = \angle ADC$. Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng với D qua các cạnh AB, AC. Gọi AH là đường cao của tam giác và (ADH) cắt lại BC ở T. Chứng minh rằng các điểm M, N, T thẳng hàng.

Bài 19. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (AB không song song CD). M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q. Chứng minh rằng AC, BD, PQ đồng quy.

Bài 20. (Thầy Trần Quang Hùng) Cho tam giác ABC nội tiếp (O), có các tâm bàng tiếp ứng với các đỉnh A, B, C lần lượt là I_a, I_b, I_c. Các chân phân giác ngoài trên các cạnh của tam giác ABC cùng nằm trên đường thẳng d. Các đường thẳng qua I_a vuông BC, qua I_b vuông AC, qua I_c vuông AB lần lượt cắt d tại X, Y, Z. Chứng minh AX, BY, CZ, OI đồng quy.

Bài 21. (Dự tuyển PTNK 2012 – 2013) Cho đường tròn (O) và AB là dây cung cố định, khác đường kính. Gọi C là điểm chính giữa cung lớn AB. Đường thẳng d thay đổi qua C cắt tiếp tuyến tại A và tại B của (O) lần lượt tại D, E. Gọi P là giao điểm khác C của d và $(O), Q$ là giao điểm của AE, BD. Chứng minh PQ đi qua điểm cố định khi d thay đổi.

Bài 22. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và điểm D thay đổi trên cung BC nhỏ, DC, DB cắt AB, AC tại E, F và EF cắt BC tại K. Đường tròn qua D tiếp xúc AK tại A lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh MN đi qua điểm cố định.

Bài 23. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), có I là tâm nội tiếp; P,Q là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC và nằm trên AI, T là hình chiếu của Q trên BC. Chứng minh khi P,Q di chuyển trên AI thì đường thẳng qua T vuông góc OP đi qua một điểm cố định.

Bài 24. Cho đường tròn nội tiếp (O) của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC. AM cắt (O) tại hai điểm K, L (K nằm giữa A, L). Qua K kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại điểm thứ hai là X. Qua L, kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại điểm thứ hai là Y. AX, AY cắt BC tại Q, P. Chứng minh M là trung điểm của PQ.

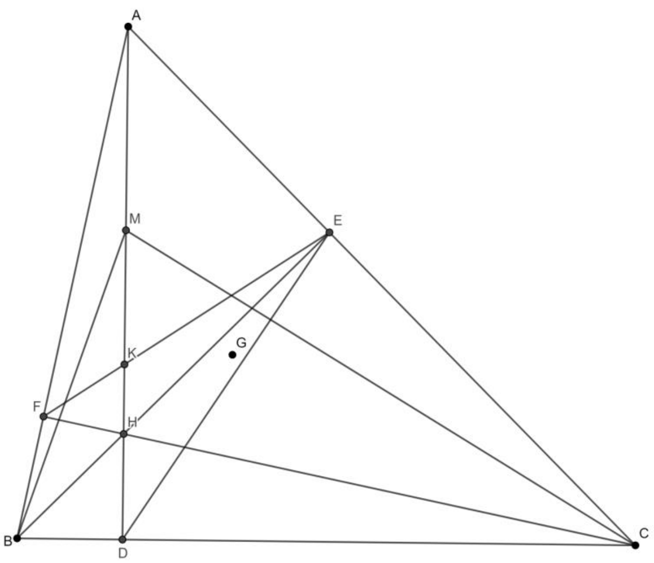
III. Lời giải tham khảo

Bài tập ví dụ 1 - 2

Bài 1. Dễ thấy $(AHKD) = -1$ (Hàng điều hòa cơ bản)

Lại có M là trung điểm AH nên $DK.DM = DH.DA$ (Hệ thức Maclaurin)

Mà $DB.DC = DH.DA$ nên $DK.DM = DB.DC$, vậy K là trực tâm ΔMBC (đpcm).

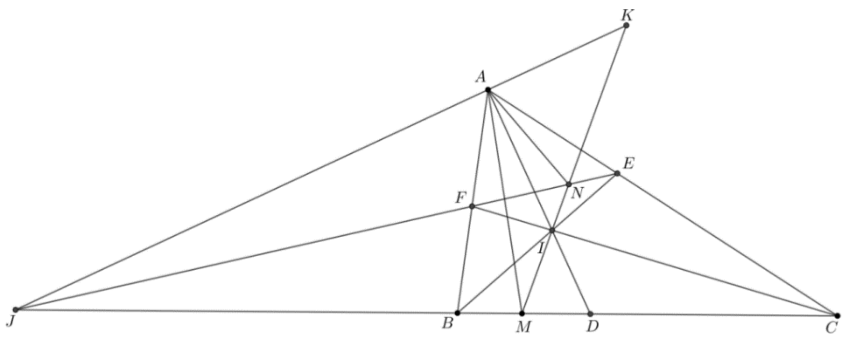


Bài 2. Phân giác ngoài của $\angle A$ của ΔABC cắt BC và MN lần lượt tại J và K.

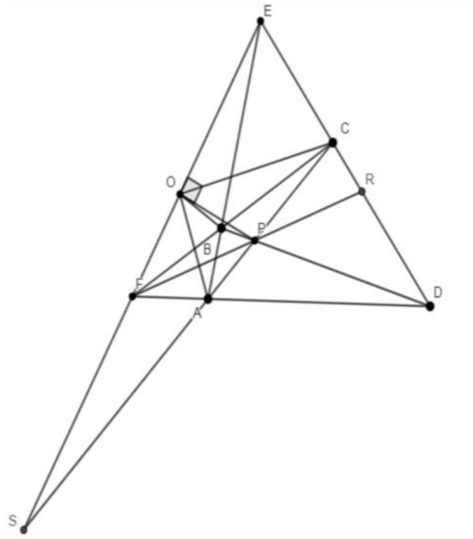
Dễ dàng chứng minh J, F, E nên ta xét ΔJEC có CF, BE, JI đồng qui, FE cắt EC tại A nên $J(AIEC) = -1$.

$\Rightarrow -1 = J(AIEC) = J(KINM) = (KINM)$

Lại có $AI \perp AK$ nên AI là phân giác $\angle AMN$.



Bài 3. Gọi R là giao điểm FP với CD; S là giao điểm AC với EF.



Ta có $(CDRE) = -1$

Dùng phép chiếu xuyên tâm F lên đường thẳng CS: $(CDRE) = (CAPS) = -1$

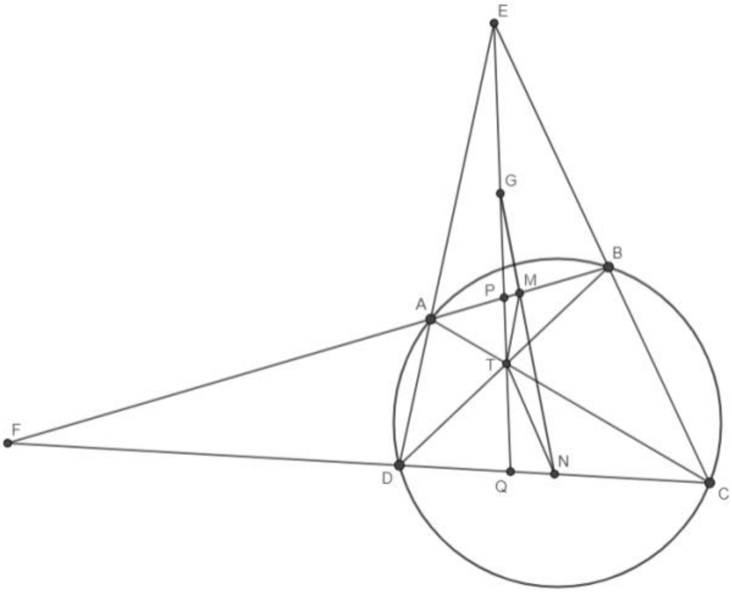
Mặt khác, do $OS \perp OP$

$\Rightarrow OP$ là phân giác $\angle AOC \quad (1)$

Chứng minh tương tự, OP phân giác $\angle BOD \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow \ \angle BOC = \angle AOD$

Bài 4. Gọi P, Q là giao điểm của ET với AB, CD và F là giao của AB và CD.



Gọi G là trung điểm TE.

Dễ thấy $(FPAB) = (FQDC) = -1$

$\Rightarrow \overline{FA}.\overline{FB} = \overline{FP}.\overline{FM} = \overline{FD}.\overline{FC} = \overline{FQ}.\overline{FN}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $PQMN$ nội tiếp

Bổ đề: Cho tứ giác $ABCD$, gọi M, N là trung điểm của AB, CD. Gọi E, T là giao điểm AD và BC, AC và BD. Khi đó, M, N qua trung điểm của TE.

Rõ ràng bổ đề là hệ quả trực tiếp của đường thẳng Gauss.

$\Rightarrow \overline{M, N, G}$ thẳng hàng.

Ta có: $(ATPQ) = -1 \Rightarrow GT^2 = \overline{GP}.\overline{GQ} = \overline{GM}.\overline{GN}$

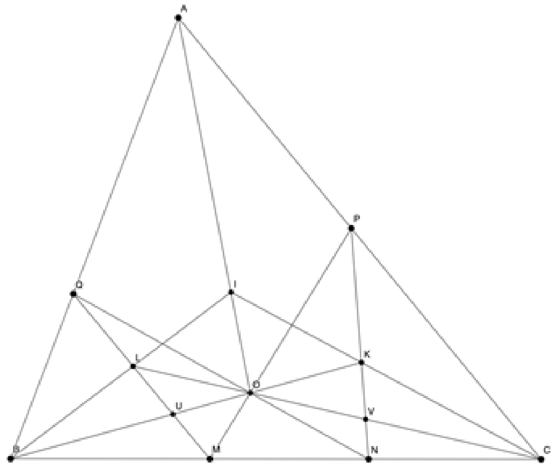
$\Rightarrow TE$ tiếp xúc (TMN)

Bài tập ví dụ 3, 4, 5, 6

Bài 1. Gọi BL cắt CK tại I, BO cắt MQ tại U, CO cắt NP tại V, ta có:

$B(AIOC) = B(QLUM) = O(QLUM) = O(NVKP) = O(VNPK) = O(PKVN) = C(PKVN) = C(AIOB)$

$\Rightarrow A, I, O$ thẳng hàng $\Rightarrow AO, BL, CK$ đồng quy.

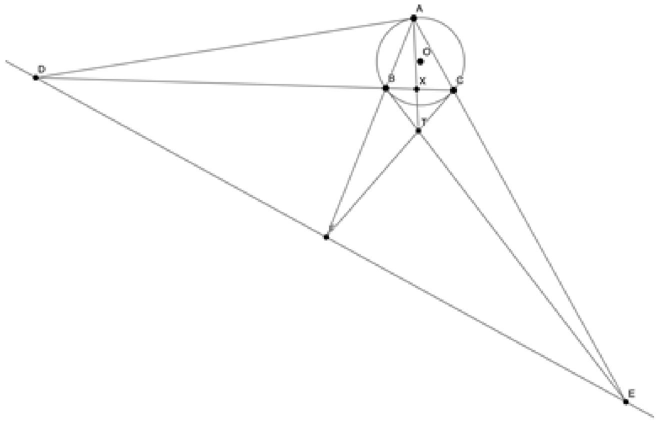


Bài 2. Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại T, AT cắt BC tại $X \Rightarrow AT$ là đường đối trung tam giác ABC

$\Rightarrow -1 = A(DTBC) = (DXBC) = (DXCB) = T(DAFE)$.

Mà $A(DTBC) = A(DTFE)$

$\Rightarrow D, E, F$ thẳng hàng.



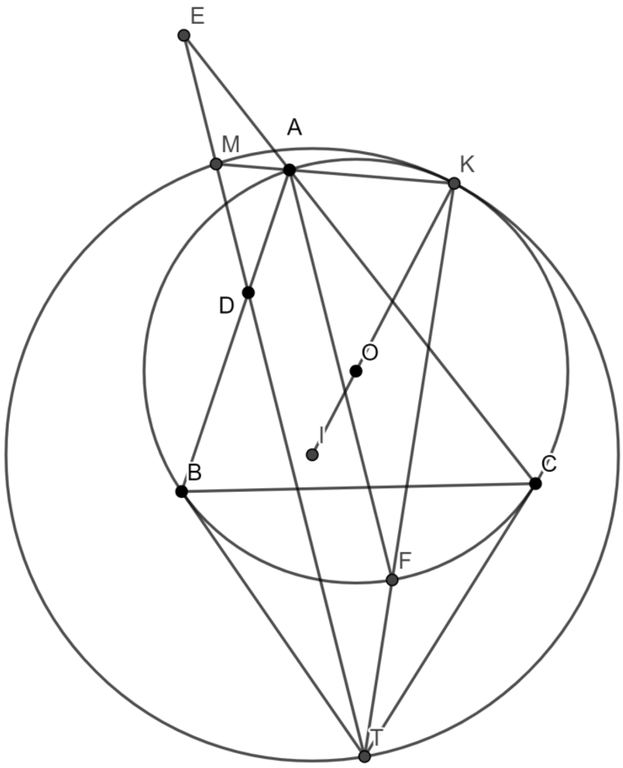
Bài 3. Đường thẳng qua A song song với DE cắt lại (O) ở F. ΔADE có M là trung điểm DE và $AF \parallel DE$ nên $A(EDMF) = -1$.

$\Rightarrow -1 = A(EDMF) = A(CBKF)$

Do đó tứ giác $BFCK$ là tứ giác điều hòa.

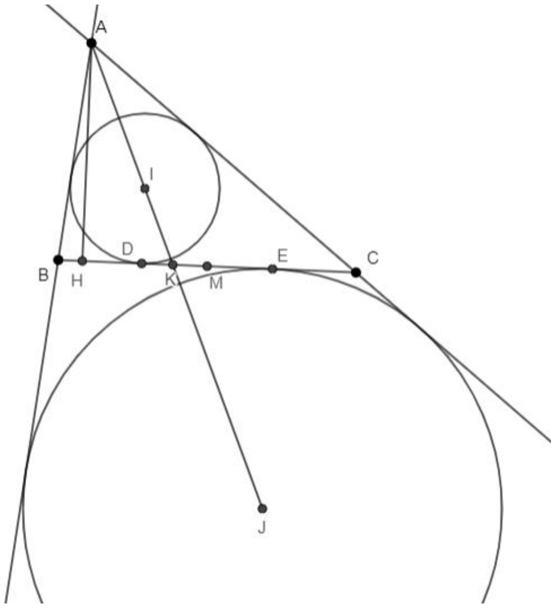
Suy ra KF đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến tại B và C của (O), hay K, F, T thẳng hàng.

Ta có $AF \parallel MT$ nên phép vị tự tâm K tỉ số $\frac{KA}{KM}$ biến ΔKMT thành ΔKAF và biến tâm đường tròn (KMT) thành tâm đường tròn (KEF) nên K nằm trên đường nối tâm của (KMT) và (KEF) và K thuộc cả hai đường tròn nên (KMT) tiếp xúc (KEF).



Bài 4. Gọi (I), (J) lần lượt tiếp xúc BC tại $D, E, AH \perp BC$ tại H, M là trung điểm $BC \Rightarrow ID \perp BC$ và $JE \perp BC \Rightarrow AH \parallel ID \parallel JE$.

AB, AC là 2 tiếp tuyến chung ngoài của $(I)$$v$à (J)



$\Rightarrow$ Phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{AI}{AJ}$ biến J thành I, (J) thành (I), E thành F

$\Rightarrow A$, F, E thẳng hàng, F thuộc (I) và $FI \parallel EJ$

$\Rightarrow F, I, D$ thẳng hàng

$\Rightarrow FD$ là đường kính $(I) \Rightarrow I$ là trung điểm FD

$\Rightarrow A(HIDF) = -1 \Rightarrow A(HKDE) = -1$.

M là trung điểm $BC \Rightarrow MB = MC, \angle AHK = 90° \Rightarrow H$ thuộc (ω).

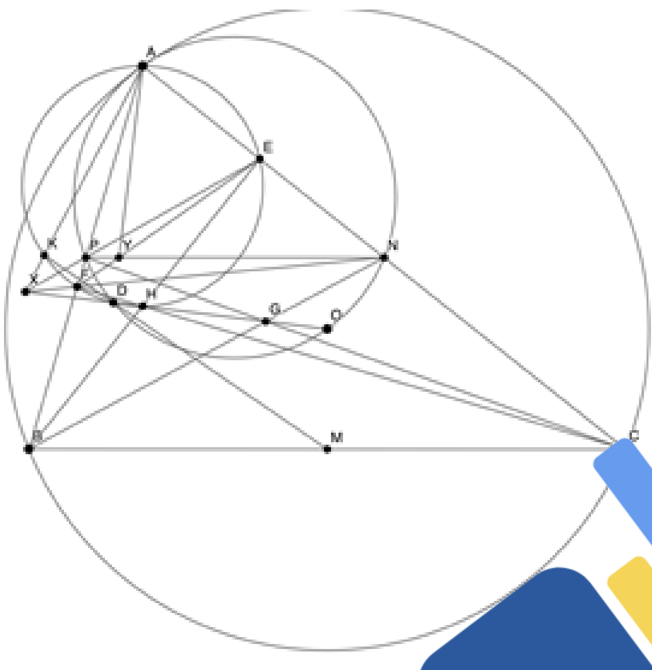
$BD = \frac{BA+BC-AC}{2} = CE \Rightarrow BM - BD = CM - CE \Rightarrow MD = ME \Rightarrow M$ là trung điểm DE.

Áp dụng hệ thức Newton $\Rightarrow MD^2 = ME^2 = \overline{MK}\,.\,\overline{MH}$

$\Rightarrow P_{M/(I)} = P_{M/(J)} = P_{M/(\omega)} \Rightarrow M$ thuộc 3 trục đẳng phương của (I),(J), (ω).

Mà 3 tâm của (I), (J), (ω) thẳng hàng $\Rightarrow (I)$, (J) và (ω) đồng trục.

Bài 5. Gọi BE cắt CF tại H, OH cắt (AEF) tại D khác H, BN cắt CP tại G, NP cắt EF tại $Y \Rightarrow H, G, O$ thẳng hàng.



$\angle AEH = \angle AFH = 90° \Rightarrow AH$ là đường kính (AEF)

$\Rightarrow \angle AKH = \angle ADH = 90°$.

$\angle AMO = \angle ANO = \angle ADO = 90° \Rightarrow A, D, M, N, O$ thuộc đường tròn đường kính AO.

N, E, P, F thuộc đường tròn Euler tam giác ABC

$\Rightarrow \overline{YE} \, . \, \overline{YF} = \overline{YN} \, . \, \overline{YP} \Rightarrow P_{Y/(AEF)} = P_{Y/(AMN)} \Rightarrow Y$ thuộc trục đẳng phương của (AEF) và $(AMN) \Longrightarrow A, Y, D$ thẳng hàng.

Áp dụng định lí Pappus: BE cắt CF tại H, BN cắt CP tại G, EP cắt FN tại $X \Rightarrow H, G, X$ thẳng hàng.

Ta có: $HE \perp AN, HF \perp AP, HO \perp AY, HK \perp AX$

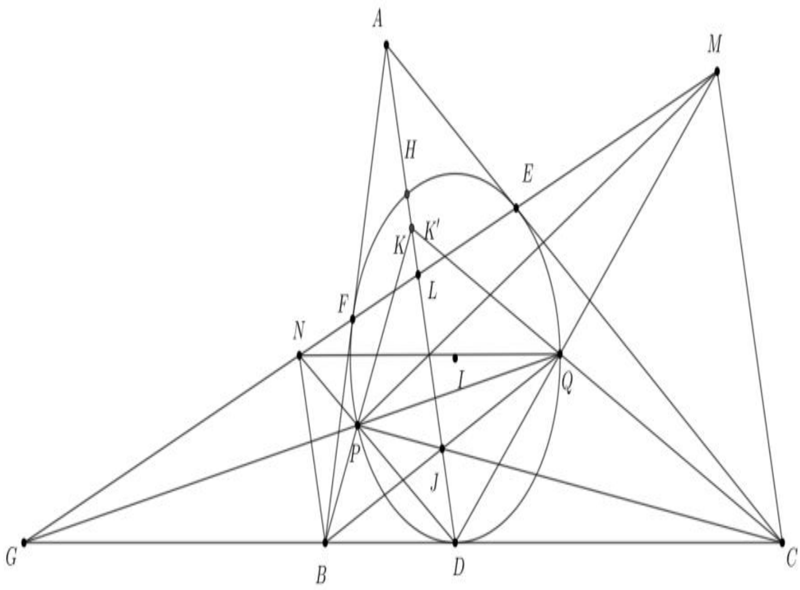
$\Rightarrow H(EFOK) = A(NPYX) = -1 \Rightarrow DEKF$ là tứ giác điều hoà.

$\angle BEC = \angle BFC = 90° \Rightarrow BCEF$ nội tiếp $(M; MB) \Rightarrow MB = MF$ và $\angle ABC = \angle AEF \Rightarrow \angle ABC = \angle BFM = \angle AEF \Rightarrow MF$ là tiếp tuyến (AEF).

Chứng minh tương tự: ME là tiếp tuyến $(AEF) \Rightarrow M, D, K$ thẳng hàng

$\Rightarrow KM, OX$ cắt nhau trên (AEF).

Bài 6. a) Gọi G, L lần lượt là giao điểm của MN với AD, BC.



Ta có $(GDBC) = -1$ và $CM \parallel BN \parallel DA$ nên $(GLNM) = -1$

Xét phép chiếu xuyên tâm D lên đường tròn (I) ta có:

$D(GLNM) = D(DHPQ) = (DHPQ) = -1$

Vậy $PDQH$ là tứ giác điều hòa nên PQ đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến tại H và D.

Ta cũng có tứ giác $FDEH$ điều hòa nên FE cũng đi qua giao điểm của 2 tiếp tuyến tại H và D.

Suy ra EF, PQ, BC đồng qui tại G.

ΔDMN có $L \in MN, P \in ND, Q \in MD, \{G\} = MN \cap PQ$ và $(GLNM) = -1$ nên DL, NQ, MP đồng qui.

Gọi K, K' lần lượt là giao điểm của BP, CQ với AD.

Ta đi chứng minh $K \equiv K'$ bằng cách chứng minh $DK = DK'$

Áp dụng định lý *Thales* ta có $\begin{cases} \dfrac{DK}{NB} = \dfrac{PD}{NP} \\ \dfrac{DK'}{MC} = \dfrac{DQ}{QM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DK = NB.\dfrac{PD}{NP} \\ DK' = MC.\dfrac{DQ}{QM} \end{cases}$

$$DK = DK' \Leftrightarrow NB.\frac{PD}{NP} = MC.\frac{DQ}{QM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{NB}{MC}.\frac{PD}{NP}.\frac{QM}{DQ} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{GN}{GM}.\frac{PD}{NP}.\frac{QM}{DQ} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{LN}{LM}.\frac{PD}{NP}.\frac{QM}{DQ} = 1$$

Áp dụng định lý *Ceva* vào ΔDMN với DL, NQ, MP đồng qui ta được:

$$\frac{LN}{LM}.\frac{PD}{NP}.\frac{QM}{DQ} = 1$$

Vậy $DK = DK'$ mà K và K' cùng thuộc 1 nửa mặt phẳng bờ BC nên $K \equiv K'$.

$\Delta KBC\ có\ D \in BC, P \in KB, Q \in KC, \{G\} = BC \cap PQ\ và\ (GDBC) = -1$

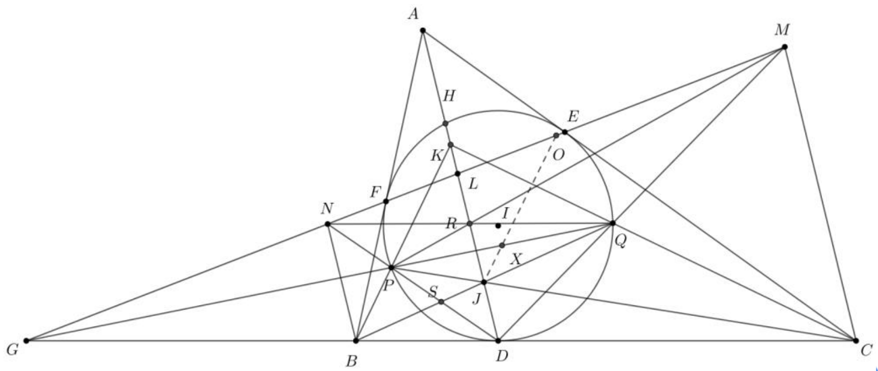
nên KD, CP, PQ đồng quy.

b) Gọi L là điểm đồng qui của MP, NQ, DL

Gọi S là giao điểm của ND và BQ.

Có: $P(GDBC) = P(QSBJ) = N(QSBJ) = N(RDBJ) = -1$

Mà $NB \parallel LD$ nên J là trung



điểm RD.

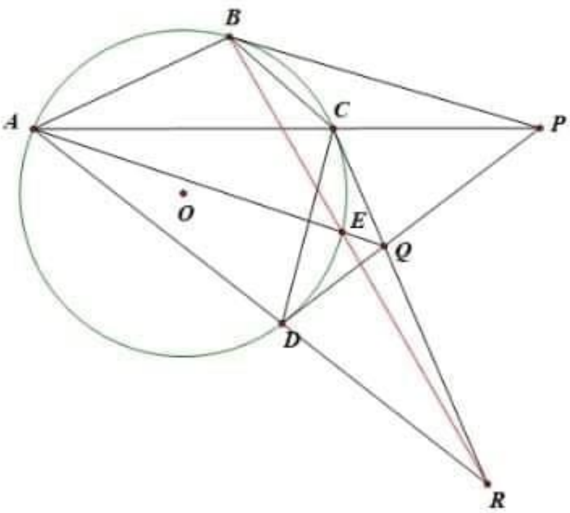
Gọi O là trung điểm MN

Xét tứ giác $RQDP$ có J là trung điểm RD, X là trung điểm PQ, O là trung điểm MN với M, N là hai giao điểm của hai cặp cạnh bên

Suy ra J, X, O thẳng hàng (Đường thẳng *Gauss*).

Vậy JX đi qua trung điểm MN.

Bài 7. Ta có tứ giác $ADEC$ điều hòa, vậy CD là đường đối trung của tam giác ACE.
Áp dụng bổ đề đối trung, ta có:
$(CA, CE, CR, CD) = -1$, vì A, D, R thẳng hàng nên

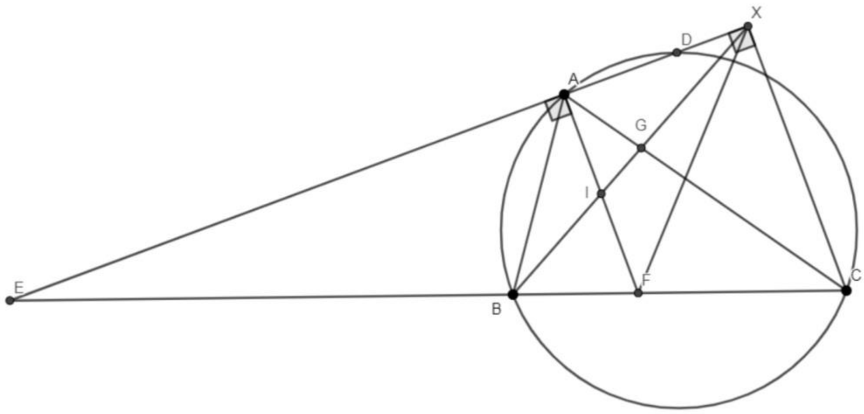


$(EA, EC, ER, ED) = (CA, CE, CR, CD) = -1$ (1)
Đồng thời: tứ giác $ABCD$ điều hòa, do đó

$(EA, EC, EB, ED) = -1$. (2)
(1) (2) suy ra: $(EA, EC, ER, ED) = (EA, EC, EB, ED) = -1$ hay $B; E; R$ thẳng hàng.

Bài 8.

Gọi I là giao điểm AF và BX; G là giao điểm AC với BX; E là giao điểm AX với BC



Ta có $(BCEF) = -1$

Chiếu hàng điểm $(BCEF)$ lên đường thẳng BX với tâm A, ta có

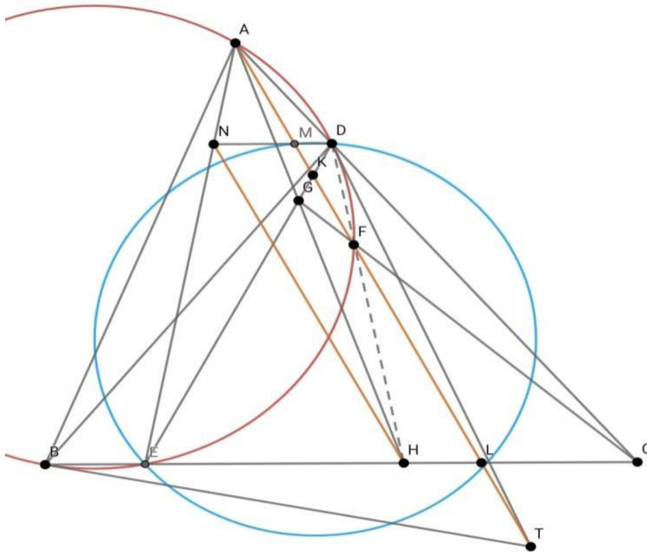
$(BCEF) = (BGXI) = -1$

$\Rightarrow \frac{IG}{GX} = \frac{BI}{BX}$ (1)

Mặt khác, theo định lý Thales, ta có: $\frac{IG}{GX} = \frac{AI}{CX}$; $\frac{BI}{BX} = \frac{IF}{CX}$ (2)

$(1)(2) \Rightarrow IA = IF \Rightarrow I$ là trung điểm AF

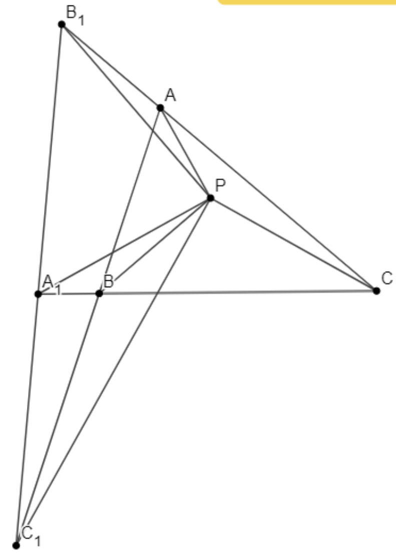
Vậy, BX đi qua trung điểm AF



Bài 9. Quy ước: Kí hiệu (ABC) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Gọi K, L lần lượt là giao điểm ED, BC với AT.
Nhận thấy rằng tứ giác $ABFD$ điều hòa, do vậy:
$(AFBD) = E(AFBD) = (AFLK) = C(AFLK) = (DGEK) = -1$ (vì E thuộc (ABD))
Với $(AFLK) = (DGEK) = (GDEK) = -1$, ta có: AG, DF, EL đồng quy tại H, kéo theo D, F, H thẳng hàng.
Ta có: $(DGEK) = A(DGEK) = A(DHNF) = -1$.
Vì D, F, H thẳng hàng nên:

$A(DHNF) = N(DHAF) = N(MHAF) = -1$, với M là trung điểm AF, theo tính chất hàng trung điểm, ta thu được: $HN || AT$

Bài 10. Ta có A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi $B(A_1B_1C_1P) = P(A_1B_1C_1B)$



Do PA_1, PB_1, PC_1, PB lần lượt vuông góc với PA, PB, PC, PB_1 nên $P(A_1B_1C_1B) = P(ABCB_1)$

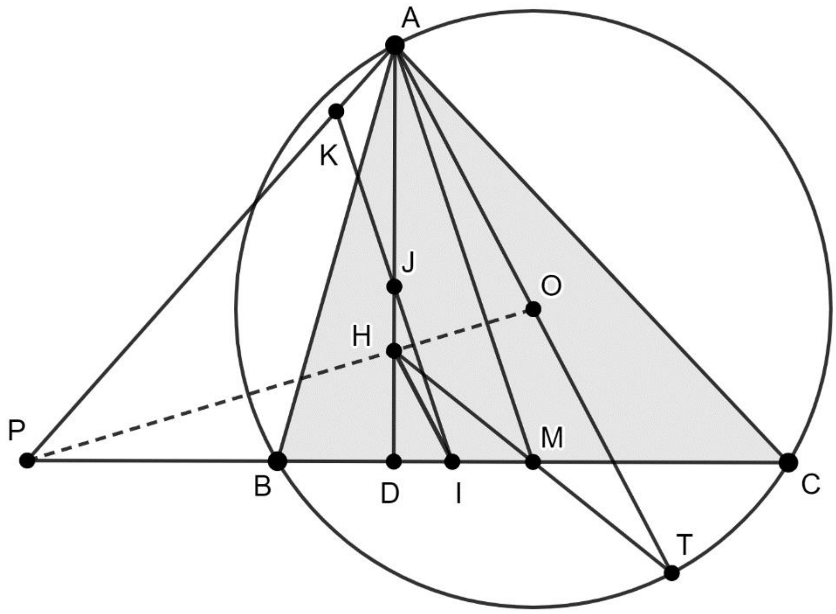
Do A, C, B_1 thẳng hàng nên

$$\begin{aligned} P(ABCB_1) &= B(APCB_1) = B(C_1PA_1B_1) \\ &= B(A_1B_1C_1P) \end{aligned}$$

Vậy ta có $B(A_1B_1C_1P) = P(A_1B_1C_1B)$

Suy ra điều phải chứng minh

Bài 11. Cho AK cắt BC tại P.



Có: $JK = JI,\ IJ \parallel AM$

$\Rightarrow (AJ, AM, AI, AK) = -1$

$\Rightarrow A(DMIP) = -1$

$\Rightarrow (DMIP) = -1$

Gọi AT là đường kính của (O).

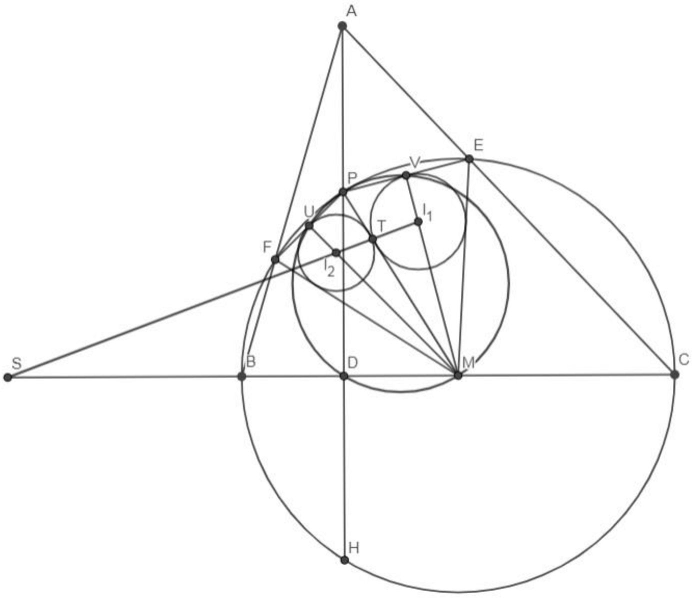
Theo tính chất quen thuộc: M là trung điểm của HT.

Có: O là trung điểm AT, $HI \parallel AO \Rightarrow (HA, HT, HI, HO) = -1$

$\Rightarrow (HD, HM, HI, HO) = -1$. Cho HO cắt BC tại P' thì $(DMIP') = -1 = (DMIP)$

Vậy $P' \equiv P$ nên AK, OH, BC đồng quy tại P.

Bài 12. Gọi S là giao của $I_1 I_2$ với BC.



Gọi U, V lần lượt là tiếp điểm của $(I_1), (I_2)$ với PE, PF.

Gọi T là giao $I_1 I_2$ với PM

$\Rightarrow T$ là tâm vị tự trong của $(I_1), (I_2)$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $(STI_2I_1) = -1$.

Vẽ tiếp tuyến Px tại P của (M)

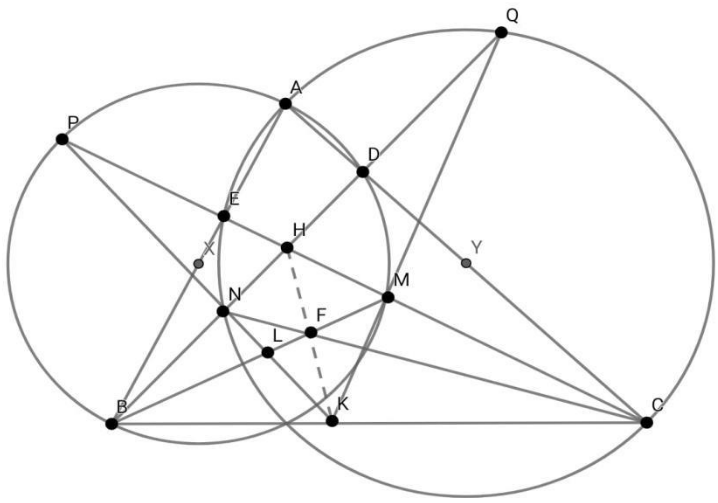
Để ý:

$MS \perp PD, MT \perp Px, MI_2 \perp PF, MI_1 \perp PE$

Khi đó $M(STI_2I_1) = P(DxFE) = (HPFE)$, với H là giao của đường cao AD lên đường tròn (M). Dễ thấy tứ giác $FHEP$ điều hòa

Vậy ta có S là tâm vị tự ngoài của $(I_1), (I_2)$.

Bài 13. Quy ước: Kí hiệu (OA) là đường tròn đường kính OA.



Với BD, CE là 2 đường cao của tam giác ABC lần lượt cắt (AB), (AC) tại 2 cặp điểm $(M; P)$, $(N; Q)$, ta có:
$EM^2 = EP^2 = EA.EB = EH.EC$ và
$DN^2 = DQ^2 = DA.DC = DH.DB$.
Theo hệ thức Newton về hàng điểm điều hòa, ta có:

$(HCMP) = (HBQN) = -1$, do vậy BC, MQ, NP đồng quy tại điểm K.
Gọi L, F lần lượt là giao điểm của PK, CN với BM.
Ta có:

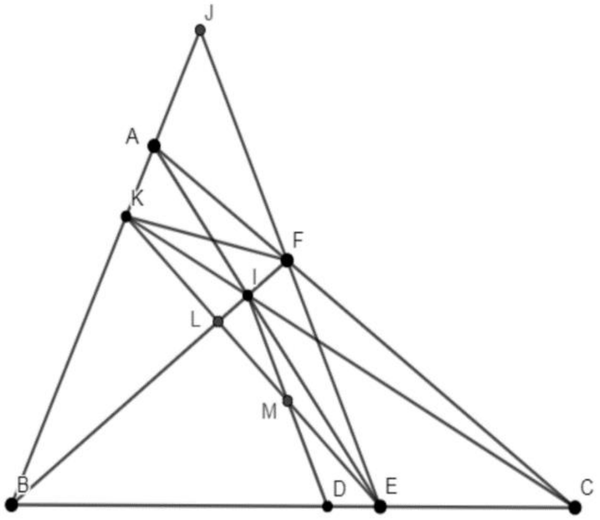
$(HCMP) = B(HCMP) = (NKLP) = C(NKLP) = (FBLM) = K(FBLM) = -1$.
Đồng thời: $(HBQN) = K(HBQN) = K(HBML) = K(HBLM) = -1$, vì

thế $K(FBLM) = K(HBLM) = -1$, hay H, F, K thẳng hàng, dẫn đến HK, CN, BM đồng quy tại F.

Bài 14. Gọi L là giao điểm BF và EK; J là giao điểm AB và EF.

Ta có $(BAKJ) = -1$

Dùng phép chiếu xuyên tâm E lên đường thẳng BE:



$(BAKJ) = (BILF) = -1$

$\Rightarrow -\frac{\overline{LB}}{\overline{LI}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FI}}$

Mà theo định lý Thales, $\frac{\overline{FB}}{\overline{FI}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ED}}$

$\Rightarrow \ -\frac{\overline{LB}}{\overline{LI}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ED}}$

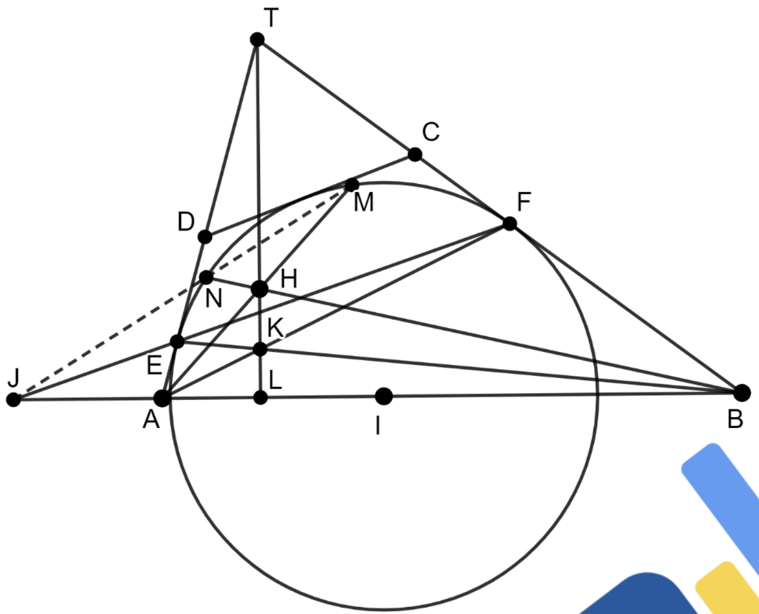
Theo định lý Menalaus đối với tam giác BDI có L, M, E thẳng hàng, ta có

$\frac{\overline{LB}}{\overline{LI}} . \frac{\overline{MI}}{\overline{MD}} . \frac{\overline{ED}}{\overline{EB}} = 1$

$\Rightarrow \frac{\overline{MI}}{\overline{MD}} = -1 \Rightarrow M$ là trung điểm ID

Bài 15. Cho EF cắt BC tại J.

Kẻ $TL \perp AB$ tại L.



$\Rightarrow E, F, L$ cùng thuộc đường tròn đường kính TI và LI, LT là phân giác $\angle ELF$

$\Rightarrow L(ITEF) = -1$

$\Rightarrow (LJ, LT, LE, LF) = -1$

$\Rightarrow (TJ, TL, TE, TF) = -1$

Mà $(TJ, TK, TE, TF) = -1$

Nên $\overline{T, K, L} \Rightarrow TK \perp AB$

Mà EF là đường đối cực của T với (I) mà $J \in EF$ nên T thuộc đối cực của J với (I)

Suy ra: TK là đối cực của J với (I).

Khi đó: $(TJ, TH, TN, TM) = -1 = (JLBA) = (HJ, HT, HN, HM) \Rightarrow \overline{J, M, N}$

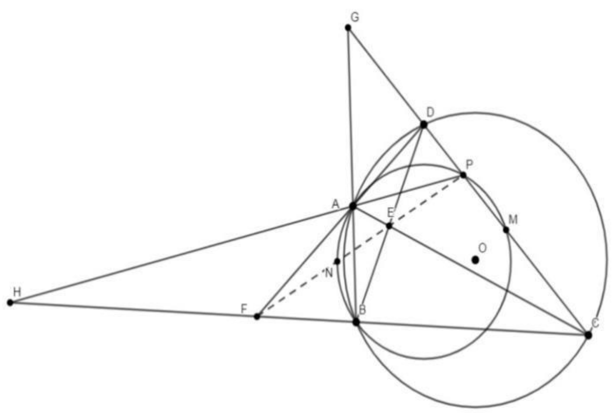
$\Rightarrow JM.JN = JI.JL \Rightarrow L \in (IMN) \Rightarrow$ tâm (IMN) thuộc trung trực của IL cố định.

Bài 16. Gọi P là giao điểm CM với (ABM) và G là giao điểm AB và CD

Ta có:

$$MP.MG = MG^2 - GP.GM = MG^2 - GA.GB = MG^2 - GC.GD = MC^2$$

$\Rightarrow$ Theo hệ thức Newton, $(CDPG) = -1$



Mặt khác, do $(CDPG) = -1$ nên dùng định lý Ceva với tam giác FCD thì F, E, P thẳng hàng

Gọi H là giao điểm AP và BC.

Do FP, AC, BD đồng quy nên $(CFBH) = -1$

Chiếu hàng điểm $(CFBH)$ lên đường tròn (ABM) qua tâm P, ta có

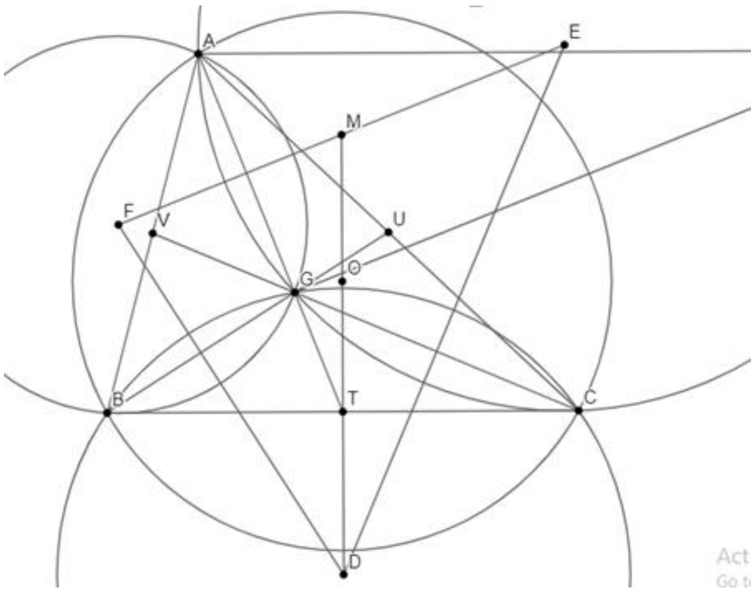
$(CFBH) = (MN'BA) = -1$ (với N' là giao điểm PF với (ABM))

$\Rightarrow AMBN'$ là tứ giác điều hòa mà theo định nghĩa về tứ giác điều hòa, $AMBN$ cũng là tứ giác điều hòa

$\Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow E, F, N$ thẳng hàng

Bài 17. Rõ ràng ta chỉ cần chứng minh DO chia đôi EF là đủ.

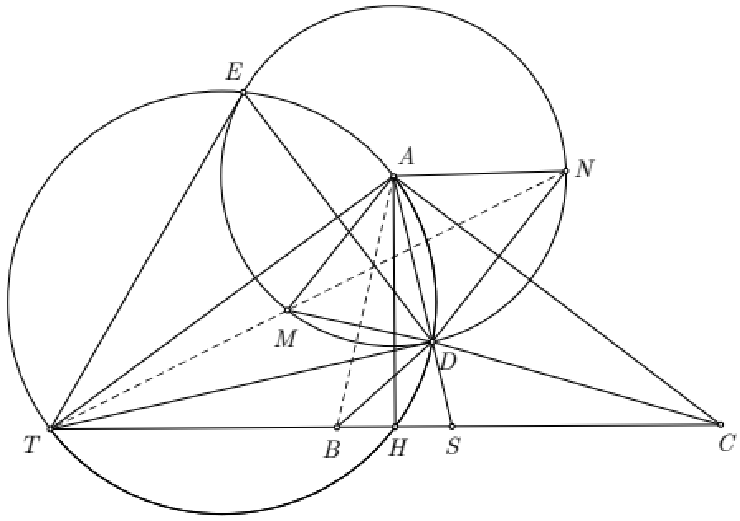
Kẻ Ox song song , dễ thấy rằng EF là trung trực của AG nên phải có EF vuông AG, suy ra Ox vuông góc AG.



Qua A, kẻ Ay song song BC thì $A(yTBC) = -1$ trong đó T là trung điểm BC. Trực giao đỉnh O, ta có $O(DxFE) = -1$ vì OF, OE lần lượt là trung trực của AB, AC.

Do Ox song song EF nên theo tính chất chùm điều hòa, ta có OD chia đôi BC. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 18.



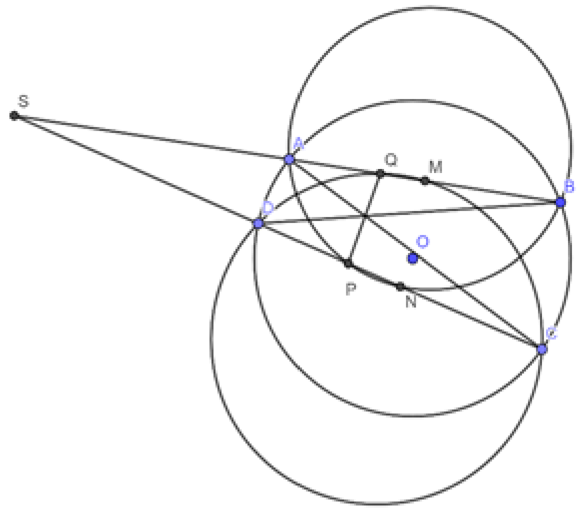
Ta có $AD = AM = AN$ nên các điểm M, N, D cùng thuộc đường tròn tâm A.

Đặt $S = AD \cap BC$, ta có DS là phân giác góc BDC.

Mặt khác, $\angle ADT = \angle AHT = 90°$ nên DT là phân giác ngoài của $\angle BDC$ và $(TS, BC) = -1$. Suy ra $A(TS, BC) = -1$. Trực giao từ đỉnh D, ta có $(Dx, DT, DM, DN) = -1$ với $Dx \perp AT$.

Giả sử $Dx \cap (A) = E \neq D$ thì tứ giác $DMEN$ điều hòa; trong khi đó, TD là tiếp tuyến của (A) nên TE cũng là tiếp tuyến của (A), điều này kéo theo MN đi qua T.

Bài 19. Đặt S là giao AB với CD.



Dễ thấy: $SA.SB = SC.SD = SQ.SM$.

$SC.SD = SA.SB = SP.SN$.

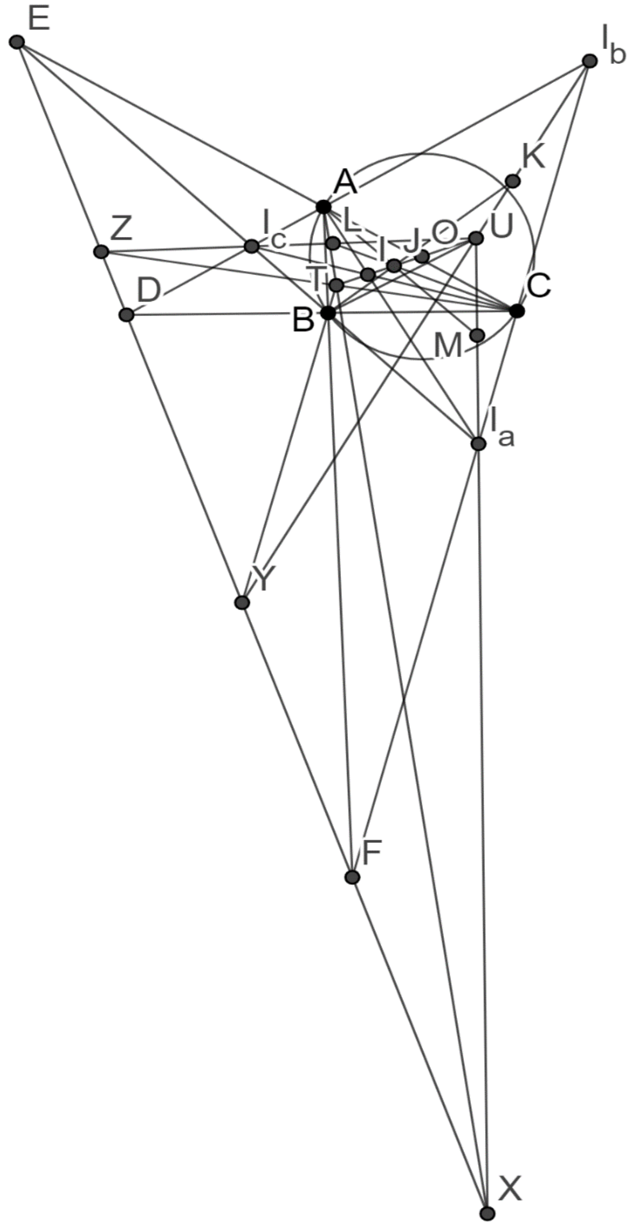
Mà M, N lần lượt là trung điểm AB, CD nên theo hệ thức Maclaurin, suy ra:

$(SQAB) = -1$

$(SPCD) = -1$

Vậy AC, BD, PQ đồng quy.

Bài 20. Gọi ba chân phân giác ứng với các đỉnh A, B, C lần lượt là D, E, F (Dễ dàng chứng minh chúng thẳng hàng bằng định lý Menelaus).



Các đường thẳng qua I_a vuông BC, qua I_b vuông AC, qua I_c vuông AB đồng quy tại U là tâm $(I_aI_bI_c)$ (Xem đây là mô hình tam giác $I_aI_bI_c$ với 3 đường cao I_aA, I_bB, I_cC). U nằm trên OI do 3 điểm này tạo thành đường thẳng Euler tam giác $I_aI_bI_c$.

Gọi J là một điểm bất kì trên OI và M, K, L lần lượt là giao điểm các cặp đường thẳng AJ, I_aU; BJ, I_bU; CJ, I_cU.

Xét hai tam giác CLI_c và BKI_b ta có BK cắt CL tại J, BI_b cắt CI_c tại I, KI_b cắt LI_c tại U. Ba điểm J, I, U thẳng hàng nên áp dụng định lý Desargues ta có I_bI_c, LK, BC đồng quy tại D, tức là K, L, D thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta được L, M, E thẳng hàng và M, K, F thẳng hàng.

Gọi giao điểm BY và OI là T_1, CZ với OI là T_2.

Ta có: $(T_1IJU) = (YI_bKU)$ (Chiếu tâm B lên KU)

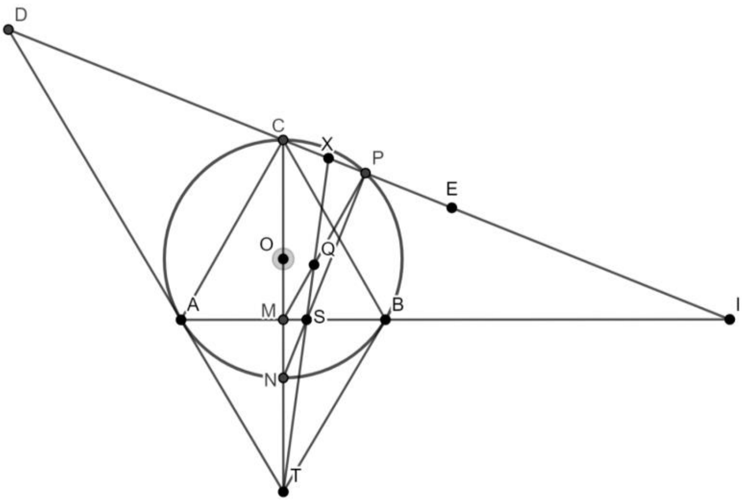
$= (ZI_cLU)$ (Chiếu tâm D lên LU)

$= (T_2IJU)$ (Chiếu tâm C là OI)

Do đó T_1 trùng T_2, nên BY, CZ, OI đồng quy. Tương tự ta có AX, BY, OI đồng quy nên ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Một mô hình khá thú vị, do chỉ yêu cầu chứng minh đồng quy nên chỉ cần chứng minh dùng tỉ số kép như trên là xong. Nhưng có một tính chất của điểm đồng quy, rằng nó là tâm vị tự ngoài của phép vị tự biến (I) thành (O), bạn đọc có hứng thú có thể thử chứng minh.

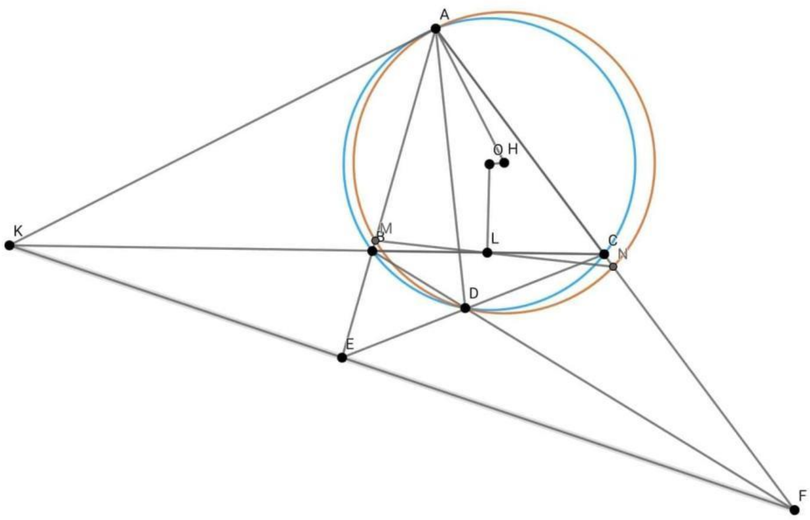
Bài 21.



Gọi giao điểm AD, BE là T, của AB, DE là I và TQ cắt DE, AB lần lượt tại X, S. Khi đó theo mô hình tứ giác toàn phần ta có $(IX, DE) = (IS, AB) = -1$. Ta lại có PI đi qua trung điểm cung lớn AB của (O) nên PS đi qua trung điểm cung nhỏ AB của (O) (gọi là N).

Gọi M là trung điểm AB thì ta có $OM.ON = OA^2 = OC^2 = ON^2$ nên $(TM, NC) = -1$, mà $(TQ, SX) = -1$ nên ta có NS, MQ, CX đồng quy tại P, hay P, Q, M thẳng hàng, tức là PQ đi qua trung điểm AB (là một điểm cố định).

Bài 22.

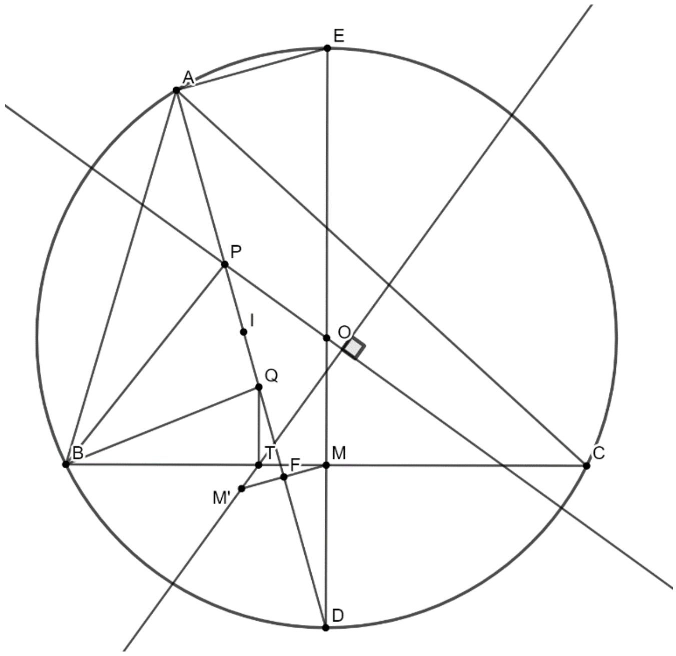


Xét trong tứ giác toàn phần $BEFCAK$ có D là giao điểm BF và CE, ta có:
$(AM, AN, AD, AF) = -1$, vì (AMN) tiếp xúc AF tại A nên theo bổ đề đối trung, ta có: AD là đường đối trung tam giác AMN.
Khi đó tứ giác $AMDN$ điều hòa (vì D thuộc (AMN)).
Gọi L là trung điểm của BC, L cố định:

Với tam giác DBM đồng dạng tam giác DCN, ta có: $\frac{BM}{CN} = \frac{DM}{DN} = \frac{AM}{AN}$.

Suy ra: $\frac{AM}{BM}.\frac{CN}{AN} = 1 = \frac{AM}{BM}.\frac{BL}{LC}.\frac{CN}{AN}$, theo định lý Menelaus đảo, ta có: M, L, N thẳng hàng, hay MN đi qua L cố định.

Bài 23. Ta gọi M là trung điểm BC, F là hình chiếu của M lên AI, D,E lần lượt là trung điểm cung BC nhỏ, lớn của (O). Ta chứng minh đường thẳng qua T vuông góc OP (gọi là d) đi qua M' là ảnh đối xứng của M qua AI (là điểm cố định).



Gọi d' là đường thẳng qua T vuông góc với AI.

Ta cần chứng minh d đi qua M' ⇔ d',TF,TM,d tạo thành chùm điều hòa.

⇔ PI,d_1, d_2 ,PO tạo thành chùm điều hòa (với d_1, d_2 lần lượt là các đường thẳng qua P vuông góc TF và qua P vuông góc BC).

⇒ Chiếu xuyên tâm P lên DE, điều này tương đương với việc d_1 đi qua E hay $PE \perp TF$.

Do P,Q liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC nên

$$\angle DBQ = \angle CBQ + \angle DBC = \angle ABP + \angle DAB = \angle DPB .$$

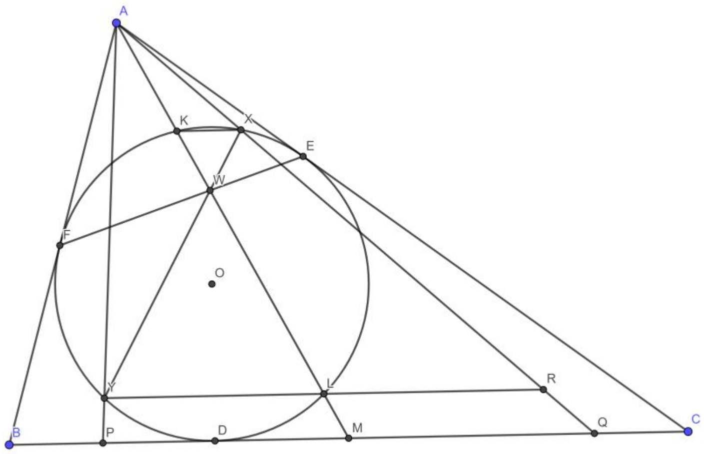
Từ đó ta được 2 tam giác DBQ và DPB đồng dạng với nhau (g.g), dẫn đến $\overline{DP}.\overline{DQ} = \overline{DB}^2 = \overline{DM}.\overline{DE}$ nên $MEPQ$ nội tiếp

⇒ $\angle DEP = \angle DQM = \angle FTM$ (do ,$T \in (MQ)$). Gọi giao FT, PE là G thì $MTGE$ nội tiếp, do đó $\angle EGP = 90^o$ nên $PE \perp TF$.

Kết hợp với lập luận trên ta có điều phải chứng minh.

<u>Nhận xét:</u> Lời giải trên được dựng nên khá tự nhiên do sử dụng tích chất về chùm điều hòa trực giao với giả thiết cho nhiều góc vuông. Bài toán này cũng có thể xử lý bằng cách biến đổi các tích vô hướng, bạn đọc có thể thử.

Bài 24. Ta phát biểu một bổ đề sau: Cho tam giác ABC ngoại tiếp (O), tiếp điểm của (O) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó AM, EF, OD đồng quy.



Bổ đề khá đơn giản, bạn đọc có thể tự chứng minh.

Trở lại bài toán.

Gọi R là giao của YL với AQ.

Theo bổ đề trên ta có AM, OD, EF đồng quy tại W hay KL, OD, EF đồng quy tại W. Mà $XKYL$ là hình thang cân có OD là trục đối xứng, lại có OD cắt KL ở W nên W cũng thuộc XY.

Ta có $(AWKL) = -1$ (hàng điều hòa về đường tròn) nên :

$X(AWKL) = X(RYKL) = -1$, mà $XK \parallel RY$ nên L là trung điểm của RY, tức $YL = LR$.

Từ đó dễ dàng suy ra M là trung điểm của PQ $(YR \parallel PQ)$
Ta có điều phải chứng minh.

<u>Nhận xét</u>: bài toán chủ yếu dùng mối liên hệ song song ⇔ trung điểm khi có hàng điểm điều hòa.

Tài liệu tham khảo:

[1]: Một số chủ đề hình học phẳng của thầy Nguyễn Văn Linh.

[2]: Kỹ thuật trực giao chùm điều hòa trong hình học của thầy Lê Phúc Lữ, tham khảo tại: https://thuvientoan.net/ky-thuat-truc-giao-chum-dieu-hoa-trong-giai-cac-bai-toan-hinh-phang-le-phuc-lu

[3]: Bài giảng thầy Lê Bá Khánh Trình trong đội tuyển PTNK 2020.

[4]: Lemmas in Olympiad Geometry (Titu Andreescu, Sam Korsky, Cosmin Pohoata).

[5]: Trường Đông Toán học Miền Nam 2020, một số chủ đề hình học phẳng – thầy Trần Quang Hùng.

[6]: Định hướng bồi dưỡng học sinh năng khiếu toán (Tập 2: Hình học) (Chủ biên: Lê Anh Vinh).

[7]: Diễn đàn AOPS: https://artofproblemsolving.com/community

[8]: Một số bài toán sử dụng hàng điều hòa: https://lovelobebaby.wordpress.com/2018/04/07/mot-so-bai-toan-su-dung-hang-dieu-hoa-suu-tam/

[9]: Tham khảo một số tài liệu của các thầy cô khác.