DỰ ÁN CHICKEN MINDS BAN CHUYÊN MÔN TOÁN HỌC	KỲ THI THỬ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2024 – 2025
HƯỚNG DẪN CHẤM THI **Đề thi thử đợt 2**	Môn thi: **TOÁN (chuyên)** Ngày thi: **28/4/2024** Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian phát đề) Hướng dẫn chấm thi gồm 05 trang

I. Hướng dẫn chung

1. Giám khảo chấm đúng theo Hướng dẫn chấm của Dự án Chicken Minds – Tổ chức The Gifted Battlefield.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. Đáp án và biểu điểm

Bài	Ý	Hướng dẫn	Điểm
1		**Giải phương trình $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$.**	**1,5**
		Phương trình đã cho tương đương với $$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+12}-4=3(x-2)+\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3}\\ \Leftrightarrow\ &(x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0\end{aligned}$$	0,75
		Từ phương trình ban đầu, vì $\sqrt{x^2+12}>\sqrt{x^2+5}$ nên $3x>5$ hay $x>\frac{5}{3}$, suy ra $$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}<\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}\Rightarrow\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3<0.$$ Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.	0,75
2	a	**2016 có phải số *tam giác* không?**	**0,5**
		Công thức tổng quát cho số tam giác thứ n $(n\in\mathbb{N}^*)$ là $$f(n)=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$ Do $f(63)=2016$ nên 2016 là số *tam giác*.	0,5
	b	**Tồn tại hay không vô số số nguyên dương vừa là số *tam giác*, vừa là số chính phương?**	**1,5**
		Gọi S là tập các số nguyên dương vừa là số *tam giác*, vừa là số chính phương. Ta sẽ chứng minh tập S có vô số phần tử bằng phản chứng. Giả sử rằng tập S có hữu hạn phần tử. Vì S khác rỗng (dễ thấy 1 và 36 cùng thuộc S) nên tồn tại phần tử lớn nhất thuộc S. Gọi số đó là $f(a)$ (dựa trên công thức ở câu trên) với $a\in\mathbb{N}^*$. Do $f(a)$ là số chính phương nên tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $$\frac{a(a+1)}{2}=x^2\Leftrightarrow a(a+1)=2x^2.$$	1,5

Nhận thấy rằng nếu ta chọn $b = 4a(a+1) > a$ thì $f(b) > f(a)$ và

$$f(b) = \frac{b(b+1)}{2} = \frac{4a(a+1)[4a(a+1)+1]}{2} = \frac{8x^2(4a^2+4a+1)}{2} = [2x(2a+1)]^2$$

nên $f(b)$ cũng thuộc S, mâu thuẫn do ta đã giả sử $f(a)$ là phần tử lớn nhất của S.

Vậy tập S có vô số phần tử, nghĩa là có vô số số nguyên dương vừa là số *tam giác*, vừa là số chính phương.

3	a	**Hỏi có bao giờ trên bảng có 2023 số -1?**	**0,5**

Dễ thấy khi ta chọn 1 hàng hoặc 1 cột hai lần thì trạng thái của các ô nằm trên hàng hay cột đó không đổi $\Rightarrow$ Ta chỉ cần xét tính chẵn lẻ của số lần các hàng và cột bị tác động. (0,5)

Gọi:

- a_1, a_2 lần lượt là số cột bị tác động chẵn lần và lẻ lần,
- b_1, b_2 lần lượt là số hàng bị tác động chẵn lần là lẻ lần.

Khi đó, ta có $a_1 + a_2 = 2024$ và $b_1 + b_2 = 2024$.

Ta có nhận xét: Một ô bị chuyển từ 1 thành -1 $\Leftrightarrow$ số lần tác động hàng và cột chứa ô đó khác tính chẵn lẻ. Do trên bảng có 2023 số -1 nên

$$a_1b_2 + a_2b_1 = 2023.$$

Do $a_1 \equiv a_2 \pmod 2$ và $b_1 \equiv b_2 \pmod 2$ nên $a_1b_2 \equiv a_2b_1 \pmod 2$, suy ra $a_1b_2 + a_2b_1 \equiv 0 \pmod 2$, vô lí. Vậy không bao giờ trên bảng có 2023 số -1.

	b	**Hỏi có bao giờ trên bảng có 2022 số -1?**	**1,5**

Giả sử ta có thể đạt được cấu hình được nêu ở đề bài. Tương tự, ta cũng có hệ: (1,5)

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 2024 \\ b_1 + b_2 = 2024 \\ a_1b_2 + a_2b_1 = 2022 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} 2024^2 - 2022 &= (a_1+a_2)(b_1+b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \\ &= a_1b_1 + (2024 - a_1)(2024 - b_1) \\ &\le \frac{(a_1+b_1)^2}{4} + \frac{(4048 - a_1 - b_1)^2}{4} \end{aligned}$$

Đặt $x = a_1 + b_1$. Nhận thấy rằng nếu a_1 và b_1 cùng chẵn thì a_2 và b_2 cũng đều là số chẵn, suy ra $a_1b_2 + a_2b_1$ phải chia hết cho 4, vô lí vì 2022 không chia cho 4. Vậy a_1 và b_1 không đồng thời chẵn.

Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ thì $1 \le a_1 \le 2023$ và $0 \le b_1 \le 2024$ nên $1 \le x \le 4047$. Khi đó, ta có:

$$2024^2 - 2022 \le \frac{x^2}{4} + \frac{(4048-x)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-2024)^2 + 2022 - \frac{2024^2}{2} \ge 0.$$

Chú ý rằng

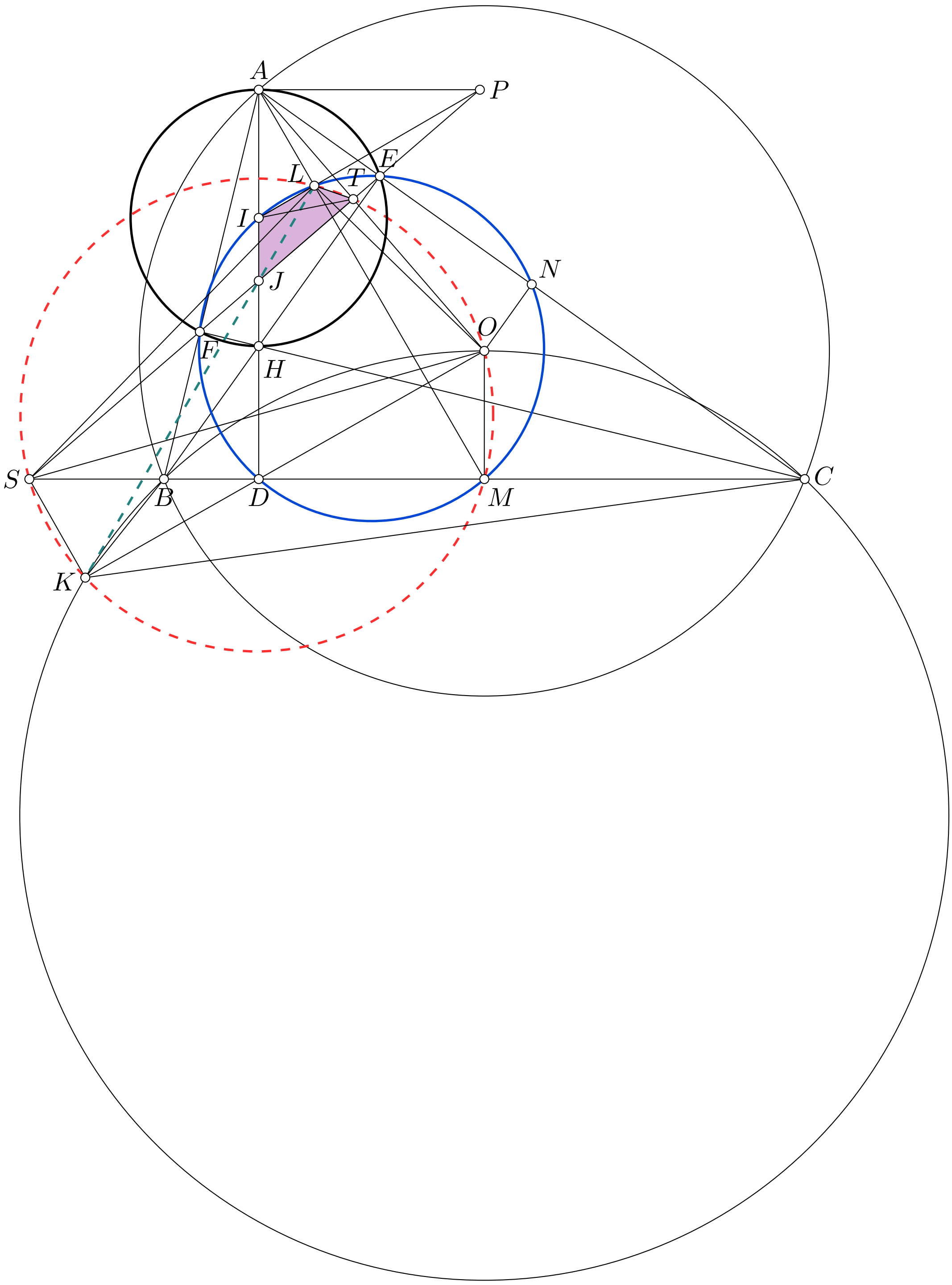
$$\begin{aligned} -2023 \le x \le 2023 &\Rightarrow \frac{1}{2}(x-2024)^2 \le \frac{2023^2}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-2024)^2 + 2022 - \frac{2024^2}{2} \le \frac{2023^2}{2} + 2022 - \frac{2024^2}{2} < 0, \end{aligned}$$

mâu thuẫn.

Vậy không bao giờ trên bảng có 2022 số -1.

<table>
<tr><td>4</td><td>a</td><td>Chứng minh KD là phân giác $\widehat{BKC}$. Từ đó suy ra $SK \perp OK$.</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

Xét thế hình như hình vẽ.



Xét đường tròn (BOC): Do số đo của hai cung nhỏ OB và OC bằng nhau nên $\widehat{BKO} = \widehat{OKC} \Rightarrow KD$ là phân giác trong $\widehat{BKC} \Rightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{KB}{KC}$.

Các tứ giác $BFEC$ và $AFDC$ nội tiếp nên $\widehat{SFB} = \widehat{AFE} = \widehat{ACB} = \widehat{BFD} \Rightarrow FB$ là phân giác trong của $\widehat{SFD}$. Ta lại có $FC \perp FB$ nên FC là phân giác ngoài của $\widehat{SFD}$, suy ra

$$\frac{SB}{DB} = \frac{SC}{DC} \Rightarrow \frac{SB}{SC} = \frac{DB}{DC} = \frac{KB}{KC}.$$

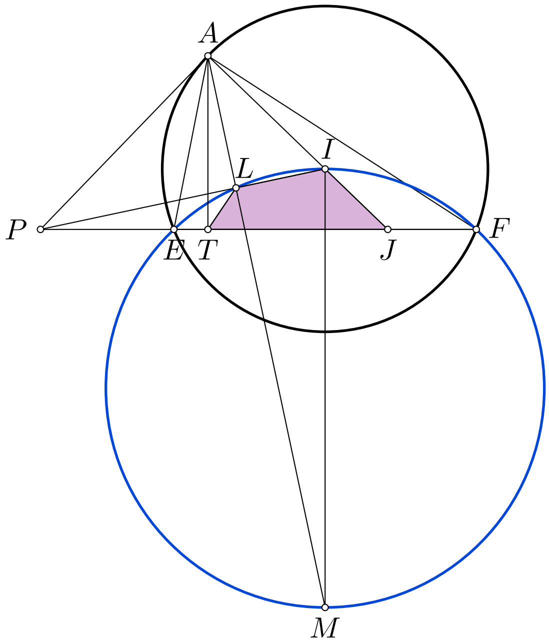
Vậy KS là phân giác ngoài của $\widehat{BKC} \Rightarrow SK \perp OK$.

</td><td>0,75</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>b</td><td>Đường thẳng AM cắt cung EF không chứa D của (DEF) tại L. Chứng minh tứ giác $LOMK$ nội tiếp.</td><td>1,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Gọi N là trung điểm của AC thì ta có các điểm D, E, F, L, M, N đồng viên (đường tròn Euler).

Cho AO cắt EF tại T thì $AO \perp EF$ tại T, mà $ON \perp AC$ nên $\widehat{OTE} = \widehat{ONE} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $TENO$ nội tiếp. Do đó,

$$AT \cdot AO = AE \cdot AN = AL \cdot AM,$$
suy ra tứ giác $LTOM$ nội tiếp.</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Ta lại có tứ giác $SKOM$ nội tiếp ($\widehat{SKO} = \widehat{SMO} = 90^\circ$) nên sáu điểm L, T, M, O, S, K cùng thuộc đường tròn đường kính OS. Vậy tứ giác $LOMK$ nội tiếp đường tròn đường kính OS.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>c</td><td>AD cắt EF tại J. Chứng minh K, L, J thẳng hàng.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Gọi I là trung điểm của AH thì I là tâm của (AEF); gọi P là giao điểm của IL và EF. Xét tam giác AEF với thế hình như hình vẽ.



Trước hết, ta chứng minh tứ giác $ILTJ$ nội tiếp. Vì tứ giác $ELIF$ nội tiếp đường tròn Euler nên

$$PL \cdot PI = PE \cdot PF = PI^2 - R^2_{(AEF)} = PI^2 - IA^2 \Leftrightarrow PI^2 - PI \cdot PL = IA^2$$
$$\Leftrightarrow PI(PI - PL) = IA^2$$
$$\Leftrightarrow PI \cdot IL = IA^2,$$
suy ra $\triangle ILA \sim \triangle IAP$ (c – g – c). Vậy $\widehat{IAP} = \widehat{ILA} = 90^\circ$ ($IL \perp IM$), tức là PA là tiếp tuyến tại A của (AEF). Hai tam giác PAI và PAJ cùng vuông tại A và lần lượt có các đường cao AL, AT nên

$$PL \cdot PI = PA^2 = PT \cdot PJ,$$
suy ra tứ giác $ILTJ$ nội tiếp.

Quay trở lại thế hình ban đầu. Với chú ý rằng tứ giác $ITOD$ nội tiếp ($AT \cdot AO = AE \cdot AN = AI \cdot AD$), ta có

$$\widehat{JLT} = \widehat{JIT} = 180^\circ - \widehat{TOK} = \widehat{TLK},$$
suy ra K, L, J thẳng hàng.</td><td>1,0</td></tr>
</table>

5	**Cho các số thực không âm a, b, c và không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng** $$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2\sqrt{1+\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$	**1,5**
	Kí hiệu $$\sum_{cyc} f(a,b,c) = f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b).$$ Nhân hai vế của bất đẳng thức cho $\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}$, ta được $$\sum_{cyc} \sqrt{a(a+b)(a+c)} \geq 2\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$ Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức trên bằng cách chứng minh $$\sum_{cyc} \sqrt{a(a+b)(a+c)} \geq \sqrt{(a+b+c)^3+9abc} \geq 2\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$	
	Ta có $$\sum_{cyc} \sqrt{a(a+b)(a+c)} \geq \sqrt{(a+b+c)^3+9abc}$$ $$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{cyc} \sqrt{a(a+b)(a+c)}\right)^2 \geq (a+b+c)^3+9abc$$ $$\Leftrightarrow \quad \sum_{cyc}(a+b)\sqrt{(ab+ac)(ab+bc)} \geq \sum_{cyc} ab(a+b)+6abc$$ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $$\sqrt{(ab+ac)(ba+bc)} \geq ab+c\sqrt{ab}$$ nên $$\begin{aligned}\sum_{cyc}(a+b)\sqrt{(ab+ac)(ab+bc)} &\geq \sum_{cyc}(a+b)(ab+c\sqrt{ab}) \\ &= \sum_{cyc} ab(a+b)+\sum_{cyc} c(a+b)\sqrt{ab} \\ &\geq \sum_{cyc} ab(a+b)+\sum_{cyc} c\cdot 2\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab} \\ &= \sum_{cyc} ab(a+b)+6abc\end{aligned}$$	0,75
	Vậy ta chỉ cần chứng minh $$\sqrt{(a+b+c)^3+9abc} \geq 2\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$ Bất đẳng thức này tương đương với $$(a+b+c)^3+9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca) \Leftrightarrow \sum_{cyc} a(a-b)(a-c) \geq 0$$ Do bất đẳng thức trên là bất đẳng thức đối xứng 3 biến nên không mất tính tổng quát, giả sử a là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c. Khi đó, $$\sum_{cyc} a(a-b)(a-c) = a(a-b)(a-c)+(b-c)^2(b+c-a) \geq 0.$$ Vậy bất đẳng thức ở đề bài đã được chứng minh.	0,75
	Tổng điểm bài thi	**10,00**