DỰ ÁN CHICKEN MINDS BAN CHUYÊN MÔN TOÁN HỌC	KỲ THI THỬ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2024 – 2025
HƯỚNG DẪN CHẤM THI **Đề thi thử đợt 1**	Môn thi: **TOÁN (chuyên)** Ngày thi: **16/3/2024 – 30/3/2024** Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian phát đề) Hướng dẫn chấm thi gồm 06 trang

I. Hướng dẫn chung

1. Giám khảo chấm đúng theo Hướng dẫn chấm của Dự án Chicken Minds – Tổ chức The Gifted Battlefield.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. Đáp án và biểu điểm

Bài	Ý	Hướng dẫn	Điểm
1		**Giải hệ phương trình:** $$\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 & (1) \\ 9x^3=xy^2+70(x-y) & (2) \end{cases}$$	**1,25**
		Nếu $x=y$, hệ phương trình trở thành $$\begin{cases} 3x^2=7 \\ 8x^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{7}{3}} \\ x=0, \end{cases}$$ vô lí. Do đó $x \neq y$. Nhân cả hai vế của phương trình cho $x-y\neq 0$ ta được $$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=7(x-y)\\ &\Leftrightarrow x^3-y^3=7(x-y)\\ &\Leftrightarrow 10(x^3-y^3)=70(x-y).\end{aligned}$$ Thay vào phương trình (2) ta có: $$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow 9x^3=xy^2+10(x^3-y^3)\\ &\Leftrightarrow x^3+xy^2-10y^3=0\\ &\Leftrightarrow (x-2y)(x^2+2xy+5y^2)=0.\end{aligned}$$	0,75
		Trường hợp 1: $x-2y=0 \Leftrightarrow x=2y$. Thay $x=2y$ vào phương trình (1), ta thu được $$7y^2=7 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &y=1 \Rightarrow x=2\\ &y=-1 \Rightarrow x=-2.\end{aligned}\right.$$ **Trường hợp 2:** $x^2+2xy+5y^2=0 \Leftrightarrow (x+y)^2+4y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$, không thỏa (1). Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,y)=(2,1),(-2,-1)$.	0,5

2	**Cho a, b, c là 3 số thực không âm thoả mãn $a^2+3b^2+5c^2+2abc=15$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:** $$P=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{2}.$$	**2**
	Ta sẽ tính a theo b và c. Coi $a^2+3b^2+5c^2+2abc=15$ như một phương trình bậc hai, ẩn a thì a là nghiệm không âm của phương trình. Do đó, $$a=-bc+\sqrt{\Delta'}=-bc+\sqrt{b^2c^2-3b^2-5c^2+15}=-bc+\sqrt{(b^2-5)(c^2-3)}.$$ Vậy $$P=-bc+\sqrt{(b^2-5)(c^2-3)}+b\sqrt{2}+c\sqrt{2}.$$	0,5
	Do $a, b, c \geqslant 0 \Rightarrow b^2 \leqslant 5, c^2 \leqslant 3$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $$\begin{aligned} P &= -bc+\sqrt{(b^2-5)(c^2-3)}+b\sqrt{2}+c\sqrt{2} \\ &\leqslant -bc+\frac{5-b^2+3-c^2}{2}+(b+c)\sqrt{2} \\ &= 5-\frac{(b+c-\sqrt{2})^2}{2} \\ &\leqslant 5. \end{aligned}$$	1,0
	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $$\begin{cases} b^2-5=c^2-3 \\ b+c=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\sqrt{2} \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow a=3.$$ Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 5, đạt được khi $a=3, b=\sqrt{2}, c=0$.	0,5
3	**Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $a^2+b^2=n$ với a, b là số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và ab chia hết cho mọi số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{n}$.**	**1,75**
	Đầu tiên ta chứng minh a và b bằng nhau hoặc là hai số nguyên dương liên tiếp. Thật vậy, trước hết ta giả sử $a=b$, khi đó do $(a,b)=1$ nên suy ra $a=b=1$. Với $a=b=1$ ta được $n=2$, khi đó không có số nguyên tố nào nhỏ hơn $\sqrt{2}$. Như vậy $n=2$ là một giá trị cần tìm.	0,25
	Giả sử $a>b$, ta có $(a-b)^2<a^2+b^2=n$. Khi đó $a-b<\sqrt{n}$. Nếu $a-b\neq 1$ thì $a-b$ có một ước số nguyên tố p và khi đó thì theo giả thiết $ab \vdots p$. Mà $(a,b)=1$ nên suy ra a hoặc b chia hết cho p. Mà $a-b$ chia hết cho p nên cả a, b đều chia hết cho p. Từ đó suy ra p là một ước chung của a và b, điều này mâu thuẫn với $(a,b)=1$. Vậy a, b là hai số nguyên dương liên tiếp hay $a=b+1$.	0,75
	Mặt khác ta có $(b-1)^2<b^2<n$. Giả sử p là ước nguyên tố của $b-1$, khi đó $ab=b(b+1)$ chia hết cho mọi số nguyên tố p. Do $b-1$ và b nguyên tố cùng nhau nên b không thể chia hết cho p. Từ đó suy ra $b+1$ chia hết cho p, do đó ta được $p=2$. Ngoài ra nếu $b-1$ chia hết cho 4 thì $b(b+1)$ không chia hết cho 4 nên ta được $b-1\in\{0;1;2\}$ do đó $b\in\{1;2;3\}$. Đến đây tương ứng ta tìm được $a\in\{2;3;4\}$. Do đó ta được các cặp số $(a;b)=(2;1),(3;2),(4;3)$. Từ đó ta được $n\in\{5;13;25\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy các tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n\in\{2;5;13;25\}$	0,75

<table>
<tr><td>4</td><td>a</td><td>Với $n = 6$, xác định người chơi luôn có chiến thuật thắng.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Với $n = 6$, ta thiết lập chiến thuật sau: Ở lượt đầu, người chơi A lấy 2 viên sỏi. Ta chia hai trường hợp:
• Trường hợp 1: Nếu B lấy 2 viên sỏi ở lượt thứ hai thì A chỉ cần lấy 2 viên sỏi còn lại $\Rightarrow A$ là người thắng.
• Trường hợp 2: Nếu B lấy 1 viên sỏi tại lượt thứ hai, từ lượt đó trở đi, A chỉ lấy 1 viên sỏi, dẫn đến B cũng chỉ có thể lấy 1 viên sỏi. Mà do còn 4 viên sỏi nên viên sỏi cuối cùng được lấy bởi $A \Rightarrow A$ là người thắng.
Vậy với $n = 6$ thì A là người chơi luôn có chiến thuật thắng.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>b</td><td>Tùy theo giá trị của n, hãy xác định người chơi luôn có chiến lược thắng.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Ta xét ba trường hợp:
• Trường hợp 1: n là số lẻ,
• Trường hợp 2: n là lũy thừa của 2, và
• Trường hợp 3: n là số chẵn nhưng không là lũy thừa của 2.
Ta sẽ chứng minh rằng ở trường hợp 1 và 3, A là người có chiến lược thắng, còn ở trường hợp 2, B là người có chiến lược thắng.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Trường hợp 1: n là số lẻ.
Trong trường hợp này, A là người có chiến thuật thắng. Ở lượt đầu tiên, A chỉ việc bốc một viên sỏi. Khi đó, ở mỗi lượt tiếp theo, hai người đều sẽ chỉ bốc một viên sỏi (do quy tắc trò chơi). Vì số sỏi là số lẻ và A là người chơi đầu tiên nên A sẽ là người bốc viên sỏi sau cùng.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Trường hợp 2: n là lũy thừa của 2.
Trong trường hợp này, B là người có chiến thuật thắng. Thật vậy, giả sử $n = 2^k$ với k nguyên dương.
• Với $k = 1$, theo luật chơi thì A phải bốc một viên đầu tiên nên B sẽ là người bốc viên sỏi cuối cùng, B thắng.
• Với $k > 1$, nếu ở lượt đầu tiên của A, A bốc không ít hơn một nửa số sỏi thì ở lượt tiếp theo, B sẽ bốc được tất cả số sỏi còn lại và A sẽ thua. Do đó, A sẽ bốc ít hơn 2^{k-1} ở lượt đầu tiên của mình. Giả sử A bốc $2^r + s$ viên sỏi với r, s là hai số tự nhiên thỏa mãn $2^r + s < 2^{k-1}$ và $s < 2^r$, khi đó B sẽ bốc $2^r - s$ viên sỏi. Lúc này, số sỏi còn lại là $2^k - 2^{r+1} = 2^{r+1}(2^{k-r-1} - 1) > 0$ và A chỉ được bốc không quá $2^r - s \leqslant 2^r$ viên sỏi ở lượt tiếp theo của mình. Vì $2^{k-r-1} - 1 > 0$ nên $2^{k-r-1} - 1 \geq 1$, suy ra
$$2^{r+1}(2^{k-1-r} - 1) \geqslant 2^{r+1} = 2 \cdot 2^r.$$
Vậy ở lượt tiếp theo của mình, số sỏi mà A bốc không quá một nửa số sỏi trong đống sỏi. Giả sử A bốc $2^{r_1} + s_1$ viên sỏi với r_1, s_1 là hai số tự nhiên thỏa mãn $2^{r_1} + s_1 \leqslant 2^r - s \leqslant 2^r$ và $s_1 < 2^{r_1}$. Khi đó, B sẽ bốc $2^{r_1} - s_1$ viên sỏi. Lúc này số sỏi còn lại là
$$2^{r+1}(2^{k-1-r} - 1) - 2^{r_1+1} = 2^{r_1+1}[2^{r-r_1}(2^{k-1-r} - 1) - 1] \geqslant 0.$$
Nếu số sỏi trở về 0 thì B thắng. Còn nếu số sỏi chưa trở về 0 thì ta có thể lặp lại chiến thuật như trên. Vì số sỏi giảm dần và A không thể bốc quá nửa số sỏi ở mỗi lượt của mình nên đến một lúc nào đó B sẽ là người bốc những viên sỏi cuối cùng. Vậy B thắng.</td><td>0,75</td></tr>
</table>

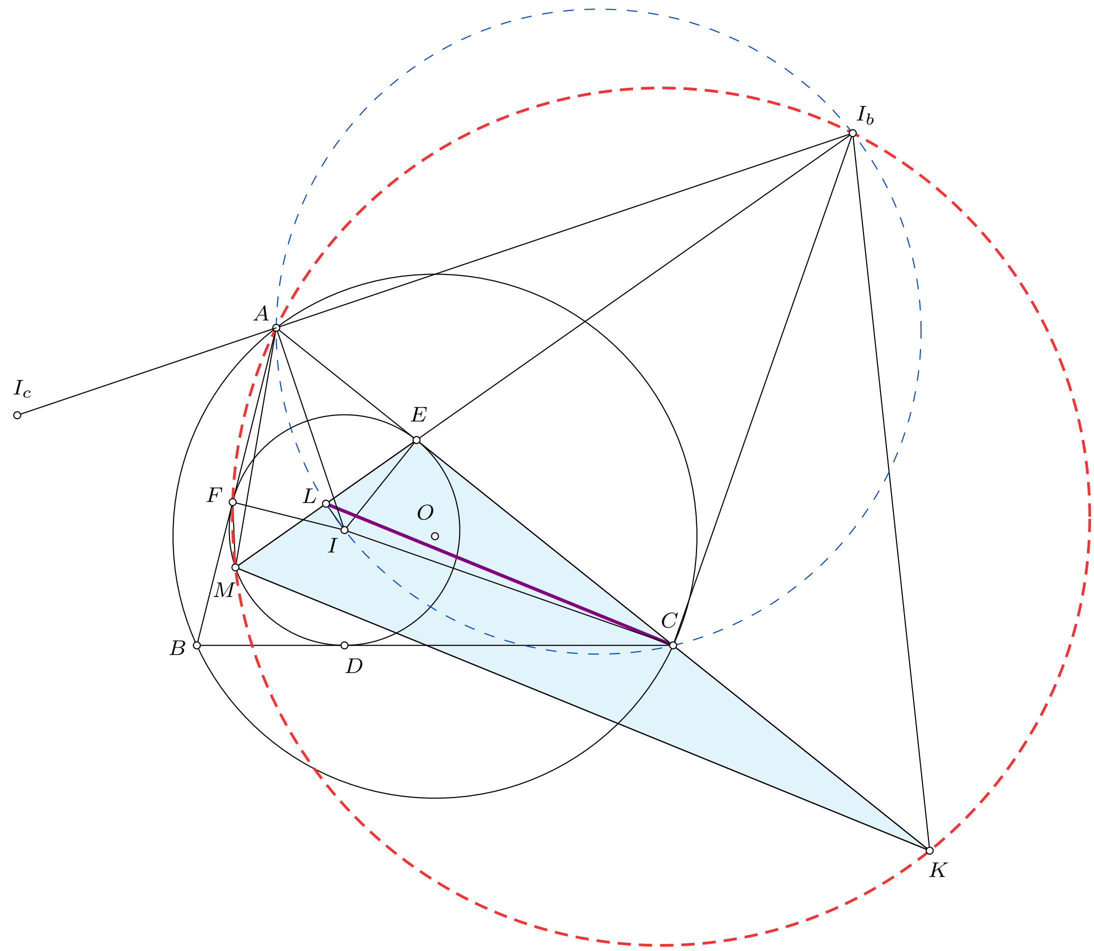
Trường hợp 3: n là số chẵn nhưng không là lũy thừa của 2. 0,5

Trong trường hợp này, A là người có chiến lược thắng. Giả sử $n = 2^k + r$ với k, r là các số tự nhiên, r chẵn và $0 < r < 2^k$. Ở lượt đầu tiên, A sẽ bốc r viên sỏi. Lúc này, số sỏi còn lại là 2^k viên. Bài toán trở về trường hợp 2 với B là người đi trước, do đó A có chiến lược thắng trong trường hợp này.

Tóm lại, nếu n không là lũy thừa của 2 thì A là người có chiến thuật thắng, còn nếu n là lũy thừa của 2 thì B là người có chiến thuật thắng.

5 a **Gọi R_b là bán kính của đường tròn bàng tiếp góc B của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng $R_b = \dfrac{S_{ABC}}{p - AC}$ với p là nửa chu vi của $\triangle ABC$.** **0,75**

Xét thế hình như hình vẽ. 0,75



Ta có: $S_{ABC} = S_{BAI_b} + S_{BCI_b} - S_{AI_bC}$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot R_b + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot R_b - \frac{1}{2} \cdot AC \cdot R_b$$

$$= \frac{1}{2} \cdot R_b \cdot (AB + BC - AC)$$

$$= R_b \cdot (p - AC)$$

Từ đó ta suy ra $R_b = \dfrac{S_{ABC}}{p - AC}$.

b **Gọi K là điểm đối xứng với E qua C. Chứng minh rằng tứ giác $AFKI_b$ nội tiếp.** **1,25**

Cho I_bE cắt lại (I) tại M khác E thì ta có 0,75

$$\widehat{I_cAF} = 90^\circ - \widehat{IAB} = \widehat{AIF} = \frac{1}{2}\widehat{EIF} = \widehat{EMF} = \widehat{I_bMF},$$

suy ra tứ giác $AFMI_b$ nội tiếp.

Gọi L là trung điểm ME thì $IL \perp ME$ hay $\widehat{ILI_b} = 90^\circ$. Vậy L nằm trên đường tròn đường kính II_b, hay tứ giác $ALCI_b$ nội tiếp, dẫn đến **0,5**

$$\widehat{ACL} = \widehat{AI_bL}. \qquad (1)$$

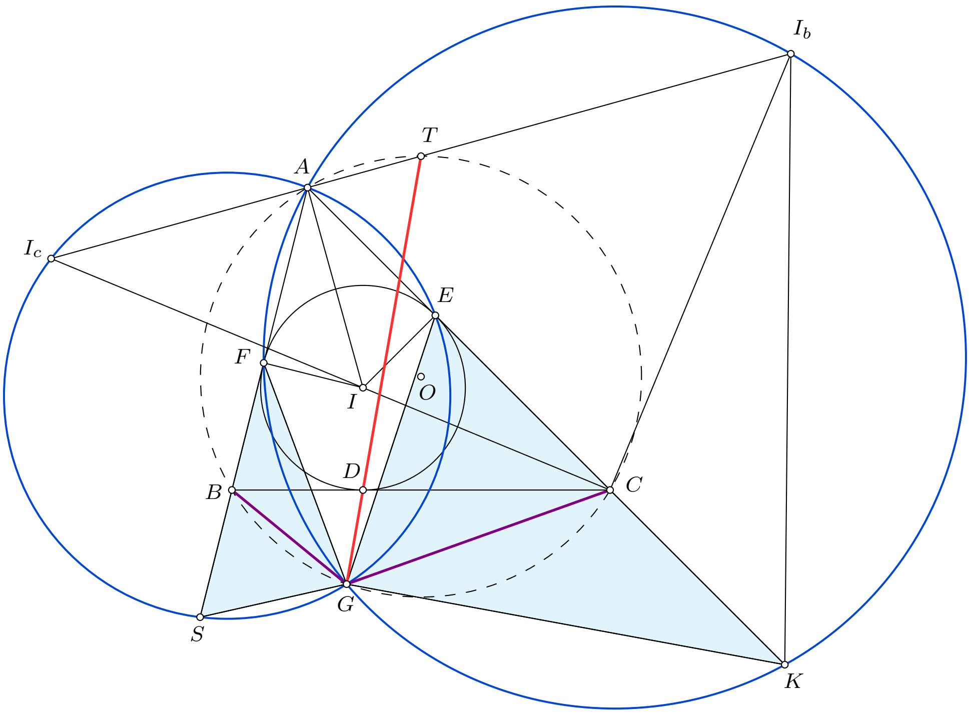
Mặt khác, $\triangle EKM$ có C,L lần lượt là trung điểm các cạnh EK, EM nên CL là đường trung bình của $\triangle EKM$ hay $CL \parallel MK$, suy ra

$$\widehat{ACL} = \widehat{AKM}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AI_bL} = \widehat{AKM}$, suy ra $AMKI_b$ nội tiếp. Lại có tứ giác $AFMI_b$ nội tiếp nên năm điểm A, F, M, K, I_b cùng thuộc một đường tròn, kéo theo tứ giác $AFKI_b$ nội tiếp.

c **Chứng minh rằng (AFI_b),(AEI_c),(AID),(O) đồng quy tại hai điểm.** **1,0**

Xét thế hình như hình vẽ. Dễ thấy $(AFI_b), (AEI_c), (AID)$ và (O) cùng đi qua A. **0,5**



Gọi G là giao điểm khác A của (AFI_b) và (AEI_c). Gọi S đối xứng với F qua B thì tương tự câu b) ta có năm điểm A, E, G, S, I_c cùng thuộc một đường tròn. Từ đó ta có $\widehat{GEK} = \widehat{GSF}$ và $\widehat{GKE} = \widehat{GFS}$, suy ra

$$\triangle GEK \sim \triangle GSF.$$

Hai tam giác này lại có B, C lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng FS,EK nên $\triangle GCE \sim \triangle GBS$, suy ra

$$\frac{GB}{GC} = \frac{BS}{CE} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD},$$

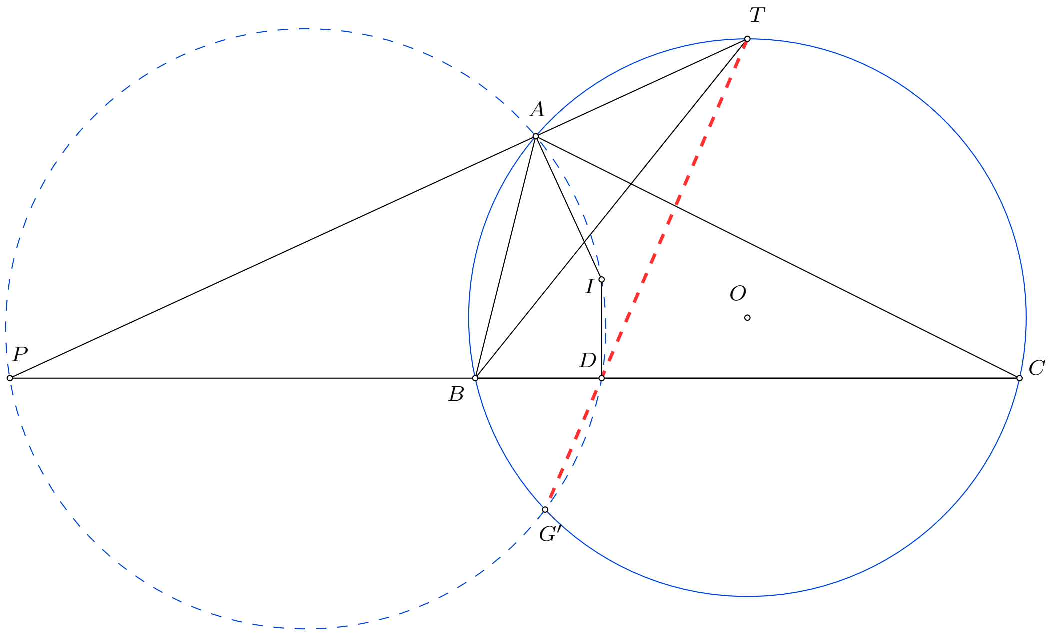
kéo theo GD là phân giác của $\widehat{BGC}$. Mặt khác, cũng từ $\triangle GCE \sim \triangle GBS$ ta có

$$\widehat{GCE} = \widehat{GBS}$$

nên G nằm trên (O). Vậy GD đi qua T là điểm chính giữa cung lớn BC của (O), hay nói cách khác, G là giao điểm khác T của TD và (O).

Xét thế hình như hình vẽ. Gọi G' là giao điểm khác A của (AID) và (O) thì ta chỉ cần chứng minh G trùng G', hay G',D,T thẳng hàng là hoàn tất bài toán. Ta thực hiện điều này bằng cách chứng minh $\widehat{AG'D} = \widehat{AG'T}$.

0,5



Cho AT cắt BC tại P thì $\widehat{IDP} = \widehat{IAP} = 90^\circ$ nên tứ giác $AIDP$ nội tiếp hay P nằm trên (AID), suy ra

$$\widehat{AG'D} = \widehat{APD}. \tag{3}$$

Với chú ý ΔTBC cân tại T, ta có

$$\widehat{TAB} = 180^\circ - \widehat{TCB} = 180^\circ - \widehat{TBC} = \widehat{TBP},$$

suy ra $\Delta TAB \sim \Delta TBP$, dẫn đến

$$\widehat{APD} = \widehat{TBA} = \widehat{TG'A}. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta suy ra $\widehat{AG'D} = \widehat{AG'T}$, kéo theo G', D, T thẳng hàng, hay $G \equiv G'$. Vậy bốn đường tròn $(AFI_b), (AEI_c), (AID)$ và (O) đồng quy tại A và giao điểm khác T của TD và (O). $\square$

Tổng điểm bài thi	**10,00**