

Ngày thi: **17/09/2023**

Thời gian làm bài: **180 phút** (không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm 05 trang, 06 bài

### Tổng quan đề thi

	Tên bài	Hạn chế thời gian	Hạn chế bộ nhớ
<b>Bài 1</b>	Đếm bit	2 giây	256 MB
<b>Bài 2</b>	Sắp xếp sách	1 giây	256 MB
<b>Bài 3</b>	Tỉa cây	2 giây	256 MB
<b>Bài 4</b>	CSC	3 giây	512 MB
<b>Bài 5</b>	Jelly Bear	2 giây	256 MB
<b>Bài 6</b>	Decrease XOR	15 giây	256 MB

Nhập xuất theo kiểu chuẩn - standardIO, không sử dụng nhập xuất file.

Hãy lập trình giải các bài toán sau:

### Bài 1. Số may mắn

Cho 1 mảng  $A$  gồm  $N$  số nguyên dương. Xét **biểu diễn nhị phân** của các phần tử trong  $A$  và tần suất được bật của từng vị trí bit.

Ví dụ: Xét mảng  $A = \{5, 6\} = \{101_2, 110_2\}$ . Bit vị trí 0 được bật 1 lần, bit vị trí 1 được bật 1 lần, bit vị trí 2 được bật 2 lần.

#### Yêu cầu

Đếm xem có bao nhiêu vị trí bit được bật lẻ lần.

#### Dữ liệu

- Dòng đầu chứa số nguyên dương  $N$  ( $N \leq 10^5$ ).
- Dòng thứ hai chứa  $N$  số nguyên dương của mảng  $A$  ( $A_i \leq 10^9$ ).

#### Kết quả

In ra 1 số nguyên duy nhất là số vị trí bit được bật lẻ lần trong mảng  $A$ .

#### Ví dụ

INPUT	OUTPUT	Giải thích
3 1 3 7	2	$\{1, 3, 7\} = \{001_2, 011_2, 111_2\}$ . Bit ở vị trí 0 được bật 3 lần (lẻ), vị trí 1 bật 2 lần (chẵn), vị trí 2 bật 1 lần (lẻ). Vì có 2 bit được bật lẻ lần nên đáp án là 2.

## Bài 2. Sắp xếp sách

Kệ sách  $A$  có  $N$  cuốn sách được xếp thành một hàng vào  $N$  vị trí trên kệ:  $A_1, A_2, \dots, A_N$ . Biết cuốn sách thứ  $i$  trong  $N$  cuốn này là của bộ môn  $A_i$ . Có  $M$  cuốn sách nằm trên bàn:  $B_1, B_2, \dots, B_M$ . Biết cuốn sách thứ  $j$  trong  $M$  cuốn này là của bộ môn  $B_j$ .

Bạn được phép chọn 1 cuốn sách trên kệ sách và 1 cuốn sách trên bàn và hoán đổi vị trí chúng cho nhau. Bạn được thực hiện hành động trên vô số lần nhưng không được đặt lên kệ những cuốn sách đã lấy xuống trước đó.

### Yêu cầu

Tìm số bộ môn ít nhất có thể đặt trên kệ sách sau khi thực hiện các thao tác trên.

### Dữ liệu

- Dòng đầu chứa 2 số nguyên dương  $N, M$  ( $N, M \leq 2 \times 10^5$ ).
- Dòng tiếp theo chứa  $N$  số nguyên không âm:  $A_1, A_2, \dots, A_N$  ( $A_i \leq 10^9$ ).
- Dòng tiếp theo chứa  $M$  số nguyên không âm:  $B_1, B_2, \dots, B_M$  ( $B_i \leq 10^9$ ).

### Kết quả

In ra một số nguyên duy nhất là số bộ môn ít nhất có thể đặt lên kệ sách sau khi thực hiện các thao tác theo yêu cầu đề bài.

### Ví dụ

INPUT	OUTPUT	Giải thích
9 4 1 2 5 4 8 9 3 5 5 2 5 5 5	3	Kệ sách trở thành $\{1, 2, 5, 5, 2, 5, 5, 5, 5\}$ . Số bộ môn trên kệ sách là 3.
3 5 4 2 3 1 2 3 4 5	2	Kệ sách trở thành $\{3, 2, 3\}$ . Số bộ môn trên kệ sách là 2.

## Bài 3. Tỉa cây

Cho  $n$  cây xanh liên tiếp nhau có chiều cao lần lượt là  $h_1, h_2, \dots, h_n$ .

Độ xấu của hàng cây là chênh lệch độ cao lớn nhất giữa 2 cây liên tiếp. Chi phí khi cắt tỉa 1 đơn vị độ cao của cây là  $P$  đồng.

### Yêu cầu

Với tối đa  $Q$  đồng, hãy tìm độ xấu nhỏ nhất có thể của hàng cây sau khi cắt tỉa.

### Dữ liệu

- Dòng đầu chứa 3 số nguyên dương  $N, P, Q$  ( $N, P, Q \leq 2 \times 10^5$ ).
- Dòng thứ hai chứa  $N$  số nguyên không âm ngăn cách bởi dấu cách:  $h_1, h_2, \dots, h_n$  ( $h_i \leq 2 \times 10^5$ ).

### Kết quả

In ra 1 số nguyên duy nhất là độ xấu bé nhất của hàng cây nếu như chỉ dùng nhiều nhất  $Q$  đồng.

## Ví dụ

INPUT	OUTPUT	Giải thích
6 3 33 1 5 6 7 10 2	2	Sau khi chặt, độ cao các cây trở thành $[1, 3, 5, 6, 4, 2]$ , chi phí tổng cộng là: $(0 + 2 + 1 + 1 + 6 + 0) \times 3 = 30$ ( $30 \leq 33$ ).

## Bài 4. CSC

Cho mảng  $A$  gồm  $N$  phần tử và  $Q$  truy vấn có dạng sau:

- $l \ r \ x$  ( $1 \leq l \leq r \leq N, x \geq 0$ )

Gọi  $u_1 = a_l, u_2 = a_{l+1}, \dots, u_{r-l+1} = a_r$ . Kiểm tra dãy  $u$  có phải hoán vị của một dãy cấp số cộng có công sai là  $x$  hay không.

Nói cách khác, sort mảng  $u$  theo thứ tự tăng dần và kiểm tra xem điều kiện sau có thỏa mãn hay không:  
 $u_i = u_{i-1} + x$  ( $\forall i : 1 < i \leq r - l + 1$ ).

### Yêu cầu

Trả lời  $Q$  truy vấn trên. Với mỗi truy vấn, nếu truy vấn thỏa điều kiện trên thì xuất ra "YES", ngược lại xuất ra "NO".

### Dữ liệu

- Dòng đầu chứa 2 số nguyên dương  $N, Q$  ( $N, Q \leq 4 \times 10^5$ ).
- Dòng thứ hai chứa  $N$  số nguyên không âm cách nhau bởi dấu cách:  $a_1, a_2, \dots, a_N$  ( $a_i \leq 10^9$ ).
- $Q$  dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa 3 số nguyên không âm  $l, r, x$  ( $1 \leq l \leq r \leq n, x \leq 10^9$ ) là các truy vấn.

### Kết quả

Xuất ra  $Q$  dòng, dòng thứ  $i$  xuất ra "YES" / "NO" (không có ngoặc kép) tương ứng với câu trả lời cho truy vấn thứ  $i$  ( $1 \leq i \leq Q$ ).

## Ví dụ

INPUT	OUTPUT	Giải thích
7 3	YES	Xét mảng $u$ ở truy vấn 1 sau khi đã sort lại, ta có $u = \{3, 5, 7\}$ . Dễ thấy $5 = 3 + 2, 7 = 5 + 2$ .
3 7 5 11 8 14 3	NO	
1 3 2	YES	
1 3 3		
3 6 3		

### Ràng buộc

- Subtask 1 (20%):  $n \leq 1000, q \leq 1000$ .
- Subtask 2 (20%):  $x \leq 1$  với tất cả truy vấn.
- Subtask 3 (60%): Không có ràng buộc gì thêm.

## Bài 5. Jelly Bear

Bạn được cho một đơn đồ thị vô hướng có  $n$  đỉnh - được đánh số từ 1 tới  $n$ , và  $m$  cạnh.

## Yêu cầu

In ra một đồ thị con của đồ thị đã cho sao cho:

- Mọi đỉnh của đồ thị con này có bậc là lẻ.
- Hoặc xác định không tồn tại đồ thị con thỏa mãn yêu cầu.
- Trong bài tập này, đồ thị  $A = (V_A, E_A)$  là đồ thị con của đồ thị  $B = (V_B, E_B)$  nếu và chỉ nếu  $V_A = V_B$  và  $E_A \subseteq E_B$ . Nếu có nhiều đáp án, in đáp án bất kỳ.

## Dữ liệu

- Dòng đầu chứa số nguyên dương  $t$  là số bộ test ( $t \leq 20$ ).
- $t$  nhóm dòng sau, mỗi nhóm dòng có định dạng:
  - + Dòng đầu chứa 2 số nguyên dương  $n, m$  ( $1 \leq n, m \leq 4 \times 10^5$ ).
  - +  $m$  dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa 2 số nguyên dương  $u, v$  biểu diễn 1 cạnh vô hướng ( $u, v$ ) ( $1 \leq u, v \leq n$ ). Đảm bảo đơn đồ thị.
- Đảm bảo tổng giá trị của  $n, m$  qua tất cả  $t$  bộ test không vượt quá  $4 \times 10^5$ .

## Kết quả

- Nếu không tồn tại, xuất 1 dòng duy nhất in "NO" (không có ngoặc kép).
- Nếu tồn tại, dòng đầu in "YES" (không có ngoặc kép). Dòng tiếp in  $k$  ( $0 \leq k \leq m$ ) là số lượng cạnh của đồ thị con.  $k$  dòng tiếp theo mỗi dòng in 2 số " $u v$ " là cạnh của đồ thị con này.

## Ví dụ

INPUT	OUTPUT
2	NO
3 2	YES
1 2	3
2 3	1 5
6 5	3 2
2 3	4 6
1 5	
4 6	
2 6	
4 2	

## Bài 6. Decrease XOR

Cho mảng  $a$  gồm  $n$  phần tử phân biệt và 2 số nguyên dương  $k, c$  ( $k \leq a_i < 2^c$ ). Thao tác sau sẽ được thực hiện đúng  $k$  lần:

- Chọn một phần tử bất kỳ trong mảng  $a$  với xác suất bằng nhau. Giảm phần tử đó đi 1 đơn vị.

## Yêu cầu

Với mỗi  $i$  từ 0 đến  $2^c - 1$  hãy cho biết xác suất tổng XOR của mảng  $a = i$  sau khi thực hiện  $k$  thao tác. Có thể chứng minh được các giá trị xác suất trên đều có thể được viết dưới dạng  $\frac{p}{q}$ , nên bạn hãy in ra giá trị  $p \cdot q^{-1} \text{ modulo } 998244353$  của nó, hay, giá trị nguyên  $x$  ( $0 \leq x < 998244353$ ) sao cho  $x \cdot q \equiv p \pmod{998244353}$ .

## Dữ liệu

- Dòng đầu nhập 3 số nguyên dương  $n, k, c$  ( $1 \leq n \leq (2^c - k)$ ,  $1 \leq k$ ,  $c \leq 16$ ).
- Dòng thứ hai nhập vào  $n$  số nguyên dương của mảng  $a$  ( $k \leq a_i < 2^c$ ).

## Kết quả

In ra  $2^c$  số nguyên dương như yêu cầu đề bài.

## Ví dụ

INPUT	OUTPUT	Giải thích
3 1 3 4 5 7	0 332748118 0 0 0 0 0 665496236	Có 3 cách thực hiện thao tác: – $\{4, 5, 7\} \rightarrow \{3, 5, 7\}$ , tổng XOR là 1 – $\{4, 5, 7\} \rightarrow \{4, 4, 7\}$ , tổng XOR là 7 – $\{4, 5, 7\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ , tổng XOR là 7 Như vậy: + Xác suất để tổng XOR = 1 là $\frac{1}{3}$ nên đáp án là 332748118. ( $332748118 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{998244353}$ ) + Xác suất để tổng XOR = 7 là $\frac{2}{3}$ nên đáp án là 665496236. ( $665496236 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{998244353}$ ) + Các trường hợp khác đều có xác suất là 0 nên đáp án là 0.

## Ràng buộc

- Subtask 1 (15%):  $n \leq 15$ ,  $k \leq 5$ .
- Subtask 2 (35%):  $c \leq 9$ .
- Subtask 3 (50%): Không có ràng buộc gì thêm.

— HẾT —

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.