DỰ ÁN THE GIFTED BATTLEFIELD **BAN CHUYÊN MÔN TOÁN HỌC**	**KÌ THI THỬ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN** **ĐỢT 3 – NĂM HỌC 2023 – 2024**
HƯỚNG DẪN CHẤM THI **Đề thi thử đợt 3**	Môn thi: **TOÁN (chuyên)** Ngày thi: **29/04/2023** Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian phát đề) Hướng dẫn chấm thi gồm 04 trang

I. Hướng dẫn chung

1. Giám khảo chấm đúng theo Hướng dẫn chấm của Dự án The Gifted Battlefield.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. Đáp án và biểu điểm

Bài	Ý	Hướng dẫn	Điểm
1		**Tính giá trị của biểu thức** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.	**1,5**
		Do $2x^3=3y^3=4y^3$ nên x,y,z cùng dấu. Lại có $xyz>0$ nên x,y,z là các số thực dương. Đặt $2x^3=3y^3=4y^3=t>0$ thì $\sqrt[3]{2x^2+3y^2+4z^2}=\sqrt[3]{t\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$.	0,5
		Ta cũng có $\sqrt[3]{2}x=\sqrt[3]{3}y=\sqrt[3]{4}z=\sqrt[3]{t}$, suy ra $$\sqrt[3]{2x^2+3y^2+4z^2}=2+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4})=\sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\sqrt[3]{t}.$$ Vậy $\sqrt[3]{t\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=\sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\sqrt[3]{t}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$.	1,0
2		**Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình** $x^2+xy+y^2=\left(\frac{x+y}{3}+1\right)^3$.	**2,0**
		Đặt $p=\frac{x+y}{3}$ và $q=xy$. Do vế trái của phương trình nguyên nên $p,q\in\mathbb{Z}$. Khi đó, phương trình đề bài trở thành $$9p^2-q=(p+1)^3\Leftrightarrow -q=p^3-6p^2+3p+1.$$	0,5
		Theo định lí Vieta, x,y là nghiệm của phương trình $$t^2-3pt+q=0. \qquad (1)$$ Do $x,y\in\mathbb{N}^*$ nên biệt thức Δ của phương trình trên phải là một số chính phương, hay với k là số nguyên, $$\begin{aligned}\Delta=k^2&=9p^2-4q\\&=9p^2-4(p^3-6p^2+3p+1)\\&=4p^3-15p^2-12p+4.\end{aligned}$$	0,5

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Đẳng thức trên tương đương với

$$(4p+1)(p-2)^2 = k^2,$$

suy ra $4p+1$ là một số chính phương.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Do $4p+1$ lẻ nên đặt $4p+1=(2n+1)^2, n \in \mathbb{Z}$ thì $p = n^2+n$. Khi đó,

$$\Delta = k^2 = (4p+1)(p-2)^2 = (2n+1)^2(n^2+n-2)^2 = (2n^3+3n^2-3n-2)^2.$$

Từ đó, ta tìm được các nghiệm nguyên x, y của phương trình (1) là:

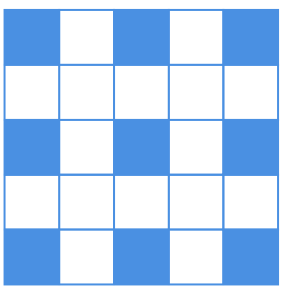
$$(x,y) = \left(\frac{3n^2+3n-|2n^3+3n^2-3n-2|}{2}, \frac{3n^2+3n+|2n^3+3n^2-3n-2|}{2}\right)$$

và hoán vị của nó.

Do x, y có vai trò như nhau nên ta suy ra phương trình ban đầu có nghiệm nguyên

$$(x,y) = (-n^3+3n+1, n^3+3n^2-1), (n^3+3n^2-1, -n^3+3n+1), n \in \mathbb{Z}.$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>a</td><td>Chứng minh rằng với mọi số thực a, ta luôn có $-\frac{1}{2} \le \frac{a}{a^2+1} \le \frac{1}{2}$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$(a-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2+1 \ge 2a \Leftrightarrow \frac{a}{a^2+1} \le \frac{1}{2}$
$(a+1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2+1 \ge -2a \Leftrightarrow \frac{a}{a^2+1} \ge -\frac{1}{2}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>b</td><td>Chứng minh rằng trong 2023 số thực bất kỳ, luôn tồn tại hai số thực a, b thỏa mãn $2022|a-b||1-ab| \le (1+a^2)(1+b^2)$.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bất đẳng thức được nêu trong mệnh đề tương đương với

$$\frac{|(a-b)(1-ab)|}{(1+a^2)(1+b^2)} \le \frac{1}{2022} \Leftrightarrow \frac{|a(b^2+1)-b(a^2+1)|}{(1+a^2)(1+b^2)} \le \frac{1}{2022} \Leftrightarrow \left|\frac{a}{a^2+1} - \frac{b}{b^2+1}\right| \le \frac{1}{2022}.$$

Trên trục số thực, chia khoảng $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ thành 2022 khoảng bằng nhau. Khoảng cách giữa hai số thực trên mỗi khoảng sẽ luôn nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{2022}$. Do có 2023 số thực nên theo nguyên lí Dirichlet, luôn tồn tại hai số $\frac{a}{a^2+1}$ và $\frac{b}{b^2+1}$ cùng chung một khoảng, tức điều phải chứng minh.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>Chứng minh rằng để lát được hình vuông trên mà không có viên gạch nào chồng lên nhau thì phải sử dụng ít nhất $4n-1$ viên gạch loại A.</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

Đánh số các ô vuông dưới dạng (i,j), trong đó i là cột của ô vuông (tính từ trái sang phải) và j là hàng của ô vuông (tính từ trên xuống dưới). Tô màu xanh cho các ô vuông có i và j cùng lẻ, và tô các ô vuông còn lại màu trắng.
Do có $(2n-1)^2$ ô vuông nên sẽ có n^2 ô vuông được tô màu xanh và $3n^2-4n+1$ ô vuông được tô màu trắng.</td><td>0,5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Quan sát hình dạng của các loại gạch, ta có các nhận xét sau:

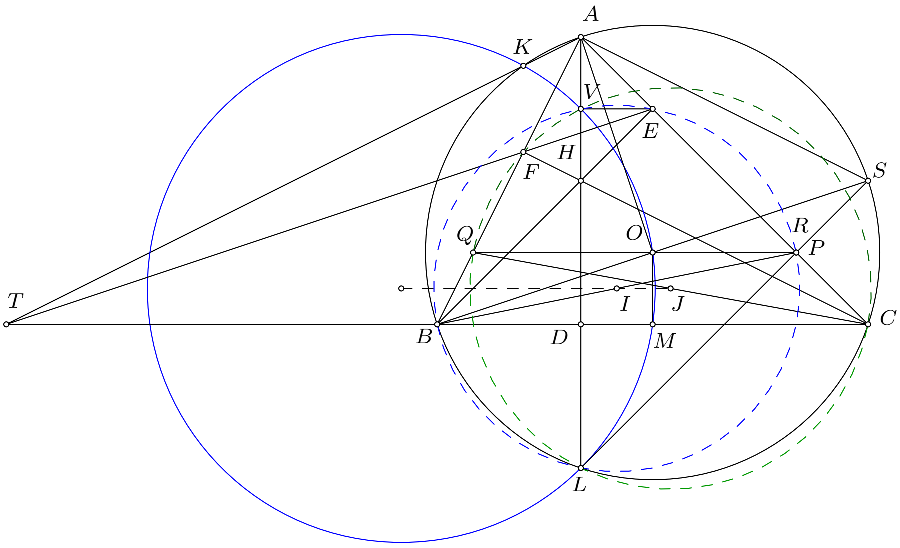
Gạch loại A sẽ luôn che phủ không quá 1 ô vuông màu xanh.
Hai loại gạch B và C sẽ luôn che phủ đúng 1 ô vuông màu xanh.
</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Vì vậy, ta gọi:

x là số viên gạch loại A che phủ đúng 1 ô vuông màu xanh;
y là số viên gạch loại A không che phủ ô vuông màu xanh nào;
z là tổng số viên gạch loại B và C.

Vì n^2 ô vuông được tô màu xanh và $3n^2 - 4n + 1$ ô vuông được tô màu trắng nên:

$$\begin{cases} x + z = n^2 \\ 2x + 3y + 3z = 3n^2 - 4n + 1 \end{cases} \Rightarrow 4n - 1 = 3n^2 - (3n^2 - 4n + 1) = x - 3y \leq x + y.$$

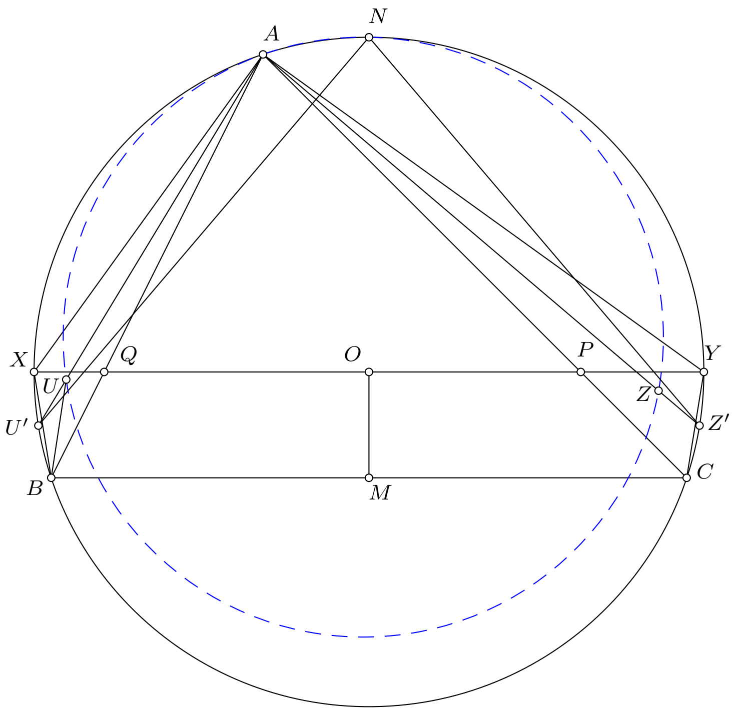
Chú ý rằng $x + y$ là tổng số viên gạch loại A nên ta có điều phải chứng minh.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>a</td><td>Chứng minh rằng I, G và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMK thẳng hàng.</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Xét thế hình như hình vẽ.



Do I, J lần lượt là trung điểm của BP và CQ nên IJ là đường trung bình của hình thang $BQPC$, suy ra IJ chia đôi OM. Mặt khác, vì $OM \perp BC$ và $BC \parallel IJ$ nên $IJ \perp OM \Rightarrow IJ$ là đường trung trực của $OM \Rightarrow IJ$ đi qua tâm (OMK).</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td></td><td>b</td><td>Chứng minh rằng các đường tròn đường kính BP, CQ cắt nhau tại một điểm trên (O) và cùng đi qua V.</td><td>1,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>AH cắt lại (O) tại L ($L \not\equiv A$). Kẻ đường kính BS của (O), LS cắt AC tại R. Ta có $\widehat{BSL} = \widehat{BAL} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{AOC}\right) = \widehat{OAC}$ nên tứ giác $ASRO$ nội tiếp, suy ra

$$\widehat{SOR} = \widehat{SAR} = \widehat{SBC} \Rightarrow OR \parallel BC \Rightarrow R \equiv P \Rightarrow BL \perp LP.$$

Vậy L thuộc đường tròn đường kính BP. Chứng minh tương tự, ta có L thuộc đường tròn đường kính CQ. Vậy các đường tròn đường kính BP, CQ cắt nhau tại điểm $L \in (O)$.</td><td>0,75</td></tr>
</table>

		Ta có biến đổi góc: $\widehat{BEV}=\widehat{AHE}=\widehat{ACB}=\widehat{ALB}=\widehat{VLB},$ suy ra tứ giác $BLEV$ nội tiếp, hay V thuộc đường tròn đường kính BP. Chứng minh tương tự, ta cũng có V thuộc đường tròn đường kính CQ. Vậy các đường tròn đường kính BP, CQ cùng đi qua V.	0,5
	c	**Chứng minh rằng $UU'=ZZ'$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác AUZ đi qua một điểm cố định khi A di động trên cung BC lớn.**	**1,0**
		Xét thế hình như hình vẽ.  Áp dụng định lí về góc ngoài của tam giác cho $\triangle ABU$, ta có biến đổi góc $\widehat{U'UB}=\widehat{U'AB}+\widehat{ABU}=\widehat{U'AX}+\widehat{UBU'}=\widehat{U'BX}+\widehat{UBU'}=\widehat{U'BU},$ suy ra $\Delta U'UB$ cân tại U', tức $U'U=U'B=U'X$. Tương tự, ta có $Z'Z=Z'C=Z'Y$. Do $BC \parallel XY$ nên $\overset{\frown}{BX}=\overset{\frown}{CY}$, mà U' và Z' lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ $\overset{\frown}{BX}, \overset{\frown}{CY}$ nên $\overset{\frown}{BU'}=\overset{\frown}{U'X}=\overset{\frown}{Z'Y}=\overset{\frown}{Z'C}$, suy ra $UU'=U'X=Z'Y=ZZ'$.	0,5
		Chú ý rằng $\overset{\frown}{U'X}=\overset{\frown}{Z'Y}$ nên $U'XYZ'$ là hình thang cân. Mặt khác, do $BCYX$ cũng là hình thang cân ($\overset{\frown}{BX}=\overset{\frown}{CY}$) nên $BC, XY, U'Z'$ có chung đường trung trực. Gọi N là điểm chính giữa của cung BC lớn thì N thuộc đường trung trực vừa nêu, suy ra $U'N=Z'N$. Lại có $UU'=ZZ'$ và $\widehat{NU'U}=\widehat{NZ'Z}$ nên $\triangle NUU'=\triangle NZZ'$, suy ra $\widehat{UNU'}=\widehat{ZNZ'} \Rightarrow \widehat{UNZ}=\widehat{U'NZ'}=\widehat{U'AZ'}=\widehat{UAZ}.$ Vậy tứ giác $AUZN$ nội tiếp, hay (AUZ) đi qua N cố định.	0,5
		Tổng điểm bài thi	**10,00**