

ĐỀ THI THỬ ĐỢT 3

Môn thi: **TOÁN (chuyên)**

Ngày thi: **29/04/2023**

Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm 02 trang, 05 bài

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho ba số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn:

$$\begin{cases} 2x^3 = 3y^3 = 4z^3 \\ \sqrt[3]{2x^2 + 3y^2 + 4z^2} = 2 + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{16} \\ xyz > 0 \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Bài 2. (2,0 điểm)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3.$$

Bài 3. (1,5 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số thực a , ta luôn có

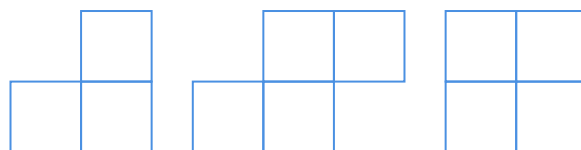
$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a}{a^2 + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

b) Chứng minh rằng trong 2023 số thực bất kỳ, luôn tồn tại hai số thực a, b thỏa mãn

$$2022|a - b||1 - ab| \leq (1 + a^2)(1 + b^2).$$

Bài 4. (2,0 điểm)

Với n là số nguyên dương, người ta lát hình vuông với kích thước $(2n - 1) \times (2n - 1)$ bằng ba loại gạch sau:



Loại A

Loại B

Loại C

Chứng minh rằng để lát được hình vuông trên mà không có viên gạch nào chồng lên nhau thì phải sử dụng ít nhất $4n - 1$ viên gạch loại A.

Bài 5. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) có dây BC cố định, điểm A di động trên cung BC lớn. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại T , đường thẳng AT cắt lại (O) tại điểm thứ hai là K ($K \neq A$). Gọi M là trung điểm của BC .

- a) Đường thẳng qua O song song với BC cắt AC, AB lần lượt tại P, Q . Gọi I, G lần lượt là trung điểm của BP, CQ . Chứng minh rằng I, G và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMK thẳng hàng.
- b) Gọi V là trung điểm AH . Chứng minh rằng các đường tròn đường kính BP, CQ cắt nhau tại một điểm trên (O) và cùng đi qua V .
- c) Đường thẳng PQ cắt (O) tại X, Y (X thuộc cung AB nhỏ). Gọi U, Z lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AXB và AZC . Các đường thẳng AU, AZ lần lượt cắt lại (O) tại U', Z' (U' và Z' khác A). Chứng minh rằng $UU' = ZZ'$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác AUZ đi qua một điểm cố định khi A di động trên cung BC lớn.

— HẾT —

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.