DỰ ÁN THE GIFTED BATTLEFIELD
BAN CHUYÊN MÔN TOÁN HỌC

KÌ THI THỬ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
ĐỢT 2 - NĂM HỌC 2023 - 2024

HƯỚNG DẪN CHẤM THI
Đề thi thử đợt 2

Môn thi: **TOÁN (chuyên)**
Ngày thi: **09/04/2023 – 16/04/2023**
Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)
Hướng dẫn chấm thi gồm 05 trang

I. Hướng dẫn chung

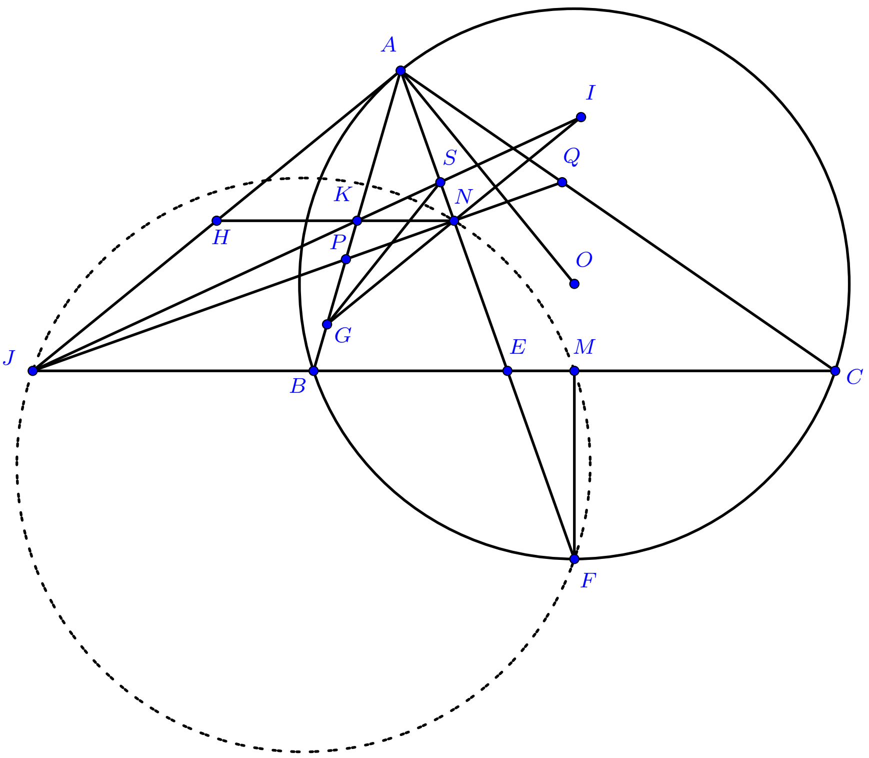
1. Giám khảo chấm đúng theo Hướng dẫn chấm của Dự án The Gifted Battlefield.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. Đáp án và biểu điểm

Bài	Ý	Hướng dẫn	Điểm
1	a	**Chứng minh rằng $x+y+z \le 3$.**	**1,5**
		Đầu tiên, nhận thấy rằng $$x+\frac{2y}{z}+y+\frac{2z}{x}+z+\frac{2x}{y}=9.$$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $$\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x}+\frac{2x}{y} \ge 3\sqrt[3]{\frac{2y}{z}\cdot\frac{2z}{x}\cdot\frac{2x}{y}}=6.$$ Vậy $$9=x+\frac{2y}{z}+y+\frac{2z}{x}+z+\frac{2x}{y} \ge x+y+z+6 \Leftrightarrow x+y+z \le 3 \qquad (1)$$	0,5
	b	**Hãy tìm tất cả các bộ số thực dương (x, y, z) thỏa mãn hệ phương trình trên.**	**1,0**
		Mặt khác, từ giả thiết ta suy ra $$\begin{cases} xz+2y=3z \\ xy+2z=3x \\ yz+2x=3y. \end{cases}$$ Cộng vế theo vế các đẳng thức trên và thu gọn, ta được $xy+yz+zx=x+y+z$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta lại có $$x+y+z=xy+yz+zx \le \frac{(x+y+z)^2}{3} \Rightarrow x+y+z \ge 3. \qquad (2)$$ Từ (1) và (2) ta suy ra $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x=y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1.$ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y,z)=(1,1,1)$.	1,0

2	**a**	**Chứng minh rằng $s < n^2$.**	**0,75**
		Vì $d_1 \leq n, \forall i = \overline{1,k}$ và số nguyên dương n không có quá n ước nguyên dương nên $$s = d_1 + d_2 + \ldots + d_k \leq n \cdot n = n^2.$$ Dấu đẳng thức không xảy ra vì khi đó, $d_1 = 1 \neq n$. Vậy $s < n^2$.	0,75
	b	**Chứng minh rằng nếu $n+1$ chia hết cho 24 thì s chia hết cho 24.**	**0,75**
		Trước hết, ta phát biểu nhận xét sau: **Nhận xét.** Nếu x là một số nguyên dương lẻ, không chia hết cho 3 thì $24 \mid x^2 - 1$. *Chứng minh.* Thật vậy, ta có $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ là hai số chẵn liên tiếp nên chia hết cho 8. Mặt khác, $x(x-1)(x+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3, mà $3 \nmid x$ nên $3 \mid (x-1)(x+1)$. Do $(3,8) = 1$ nên ta suy ra $24 \mid x^2 - 1$.	0,25
		Quay trở lại bài toán. Đầu tiên, vì $24 \mid n+1$ nên n không phải là số chính phương (nếu ngược lại thì n chia 3 dư 2, vô lí). Xét các ước dương a, b của n sao cho $ab = n$. Ta có $ab \equiv -1 \pmod{24} \Rightarrow a$ lẻ và không chia hết cho $3 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{24} \Rightarrow b \equiv a^2 b \equiv -a \pmod{24} \Rightarrow 24 \mid a+b$. Vậy, với chú ý n không phải là số chính phương, ta có thể chia các số hạng của s thành $\frac{k}{2}$ cặp mà tổng hai số trong từng cặp chia hết cho 24, suy ra $24 \mid s$.	0,5
	c	**Chứng minh rằng $d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k < n^2$.**	**0,5**
		Chú ý rằng $\forall i = \overline{1,k}$, ta có $d_i d_{k-i+1} = n$ nên ta biến đổi: $$\begin{aligned} d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k &= n^2 \left(\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}d_k} \right) \\ &\leq n^2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} \right) \\ &= n^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= n^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right) \\ &< n^2. \end{aligned}$$	0,5
3		**Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}} < \sqrt{(a^2+b^2+1)(c^2+2)} - c$.**	**1,5**
		Theo giả thiết, $a + b + c = \dfrac{1}{abc} \Rightarrow abc(a+b+c) = 1$. Vậy $1 + b^2c^2 = abc(a+b+c) + b^2c^2 = bc(a^2 + ab + bc + ca) = bc(a+b)(a+c)$. Tương tự, $1 + a^2c^2 = ac(a+b)(a+c)$ và $1 + a^2b^2 = ab(a+c)(b+c)$.	0,25
		Ta có $$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}} &= \sqrt{\frac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2(1+a^2b^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{bc(a+b)(a+c)ac(a+b)(a+c)}{c^2 \cdot ab(a+c)(b+c)}} \\ &= a+b. \end{aligned}$$ Do đó, bất đẳng thức cần phải chứng minh tương đương với $$a+b+c < \sqrt{a(a^2+b^2+1)(c^2+2)}$$	0,75

	Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $$a+b+c \le \sqrt{(a^2+b^2+1)(1+1+c^2)} = \sqrt{(a^2+b^2+1)(c^2+2)}.$$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{1}{c}$. Thay điều kiện này vào giả thiết của bài toán, ta có $2a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a\cdot a\cdot \frac{1}{a}} \Rightarrow a=0$ (vô lí, vì $a>0$). Vậy $a+b+c<\sqrt{(a^2+b^2+1)(c^2+2)}$. Bất đẳng thức ban đầu đã được chứng minh.	0,5
4	**Chứng minh rằng tồn tại ba phần tử a, b, c (không nhất thiết phân biệt) của tập T sao cho có ít nhất một trong ba số $a+b, a+b-c, a+b+c$ chia hết cho n.**	**2,0**
	Với $k>\dfrac{n}{4}$, định nghĩa các tập hợp A, B, C, D như sau: $$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \\ B &= \{-a_1, -a_2, \ldots, -a_k\} \\ C &= \{2a_1, a_1+a_2, \ldots, a_1+a_k\} \\ D &= \{0, a_1-a_2, a_1-a_3, \ldots, a_1-a_k\}. \end{aligned}$$ Xét $4k$ số là các phần tử của các tập hợp A, B, C, D đã được định nghĩa như trên. Do $k>\dfrac{n}{4}$ nên $4k>n$, mà mỗi số trong $4k$ số trên đều nhận 1 trong n số dư $0, 1, \ldots, n-1$ khi chia cho n, nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 2 số trong các số trên có cùng số dư khi chia cho n.	1,0
	Gọi hai số đó là x, y $(x>y)$ thì $n \mid x-y$. Ta có nhận xét sau: **Nhận xét.** x, y không thể cùng thuộc một tập nào trong bốn tập A, B, C, D. *Chứng minh.* Không mất tính tổng quát, giả sử $x, y \in A$. Khi đó, $x=a_i$ và $y=a_j$ $(1 \le i, j \le k)$, suy ra $n \mid a_i-a_j$. Lại có $a_i-a_j=0$ nên ta suy ra $a_i-a_j \ge n \Rightarrow n \ge a_i \ge n+a_j \ge n+1>n$, vô lý. Vậy x, y không thể cùng thuộc A. Tương tự, ta cũng có x, y không thể cùng thuộc B, C hoặc D. Từ nhận xét trên, với chú ý rằng x, y có vai trò như nhau nên ta có các trường hợp sau: • $x \in A, y \in B \Rightarrow$ tồn tại i, j sao cho $n \mid a_i-(-a_j)$ hay $n \mid a_i+a_j$. Khi đó, chọn $a=a_i, b=a_j$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán. • $x \in A, y \in C \Rightarrow$ tồn tại i, j sao cho $n \mid a_i-(a_1+a_j)$ hay $n \mid a_1+a_j-a_i$. Khi đó, chọn $a=a_1, b=a_j, c=a_i$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán. • $x \in A, y \in D \Rightarrow$ tồn tại i, j sao cho $n \mid a_i-(a_1-a_j)$ hay $n \mid a_i+a_j-a_1$. Khi đó, chọn $a=a_i, b=a_j, c=a_1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán. • $x \in B, y \in C \Rightarrow$ tồn tại i, j sao cho $n \mid -a_i-(a_1+a_j)$ hay $n \mid a_1+a_i+a_j$. Khi đó, chọn $a=a_1, b=a_i, c=a_j$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán. • $x \in B, y \in D \Rightarrow$ tồn tại i, j sao cho $n \mid -a_i-(a_1-a_j)$ hay $n \mid a_i+a_1-a_j$. Khi đó, chọn $a=a_i, b=a_1, c=a_j$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán. • $x \in C, y \in D \Rightarrow$ tồn tại i, j sao cho $n \mid (a_1+a_i)-(a_i-a_j)$ hay $n \mid a_i+a_j$. Khi đó, chọn $a=a_i, b=a_j$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.	1,0

<table>
<tr><td>5</td><td>a</td><td>Chứng minh rằng tứ giác $JNMF$ nội tiếp.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>


Vì JA là tiếp tuyến tại A của (O) và AE là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên ta có:

$$\widehat{JAE} = \widehat{JAB} + \widehat{BAE} = \widehat{ACB} + \widehat{ECB} = \widehat{JEA},$$

suy ra tam giác JAE cân tại J. Mặt khác, N là trung điểm của AE nên $JN \perp AE \Leftrightarrow \widehat{JNE} = 90^\circ$ (1).</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Nhận thấy AF là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{FAB} = \widehat{FAC} \Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{CF} \Rightarrow BF = CF \Rightarrow \triangle BFC$ cân tại F. Lại có M là trung điểm của BC nên $\widehat{FMB} = 90^\circ$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra tứ giác $JNMF$ nội tiếp.</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td></td><td>b</td><td>Chứng minh rằng $\left(\dfrac{JP}{JQ}\right)^2 = \dfrac{PB}{QC}$.</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Tam giác APQ có $AN \perp PQ$ và AN là phân giác của $\widehat{PAQ}$ nên cân tại $A \Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{AQP} \Rightarrow \widehat{JPA} = \widehat{JQC}$. Lại có $\widehat{JAP} = \widehat{JCQ}$ nên ta suy ra $\triangle JAP \sim \triangle JCQ$ (g - g), suy ra

$$\frac{JP}{JQ} = \frac{AP}{CQ}. \qquad (3)$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Chứng minh tương tự, ta được $\triangle JPB \sim \triangle JQA$, suy ra

$$\frac{JP}{JQ} = \frac{PB}{QA}. \qquad (4)$$

Với chú ý rằng $AP = AQ$, từ (3) và (4) ta suy ra $\left(\dfrac{JP}{JQ}\right)^2 = \dfrac{PB}{QC}$.</td><td>0,25</td></tr>
</table>

	c	**Chứng minh rằng N là trung điểm của GI và NK đi qua trung điểm của PS.**	**0,75**
		Gọi H là giao điểm của NK và AJ. Do NK là đường trung bình ứng với điểm A trong $\triangle ABE$ nên $NK \parallel BE$, suy ra H là trung điểm của AJ, hay $AH = HJ$. Áp dụng định lý Thales cho $IG \parallel AJ$, ta thu được $$\frac{NG}{AH} = \frac{KN}{KH} = \frac{IN}{JH}, \qquad (5)$$ suy ra $NG = IN$ hay N là trung điểm của GI.	0,5
		Mặt khác, tiếp tục áp dụng định lý Thales cho $IG \parallel AJ$, ta thu được $$\frac{PG}{AP} = \frac{NG}{AJ} = \frac{IN}{AJ} = \frac{SN}{AS}, \qquad (6)$$ suy ra $PS \parallel GN$. Lại có $GN \parallel AJ$ nên suy ra $PS \parallel AJ$. Áp dụng bổ đề hình thang cho hình thang $ASPJ$, ta thu được NK đi qua trung điểm của PS.	0,25
		Tổng điểm bài thi	**10,00**