XÂY DỰNG ÁNH XẠ TRONG CÁC BÀI TOÁN ĐẾM

Ban Toán The Gifted Battlefield

Ngày 7 tháng 11 năm 2022

1 Lý thuyết và bài tập

Định lý 1. Số bộ nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = m$ là C^{n-1}_{m+n-1}

Định lý 2. Số bộ nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = m$ là C^{n-1}_{m-1}

Một số tài liệu gọi đây là "Bài toán chia kẹo Euler". Phần chứng minh của hai định lý trên không quá phức tạp, bạn đọc có thể tự nghiền ngẫm.

Ví dụ 1: Cho phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_6 + x_7 = 29$$

a) Tính số bộ nghiệm của phương trình trên.

b) Từ bài toán trên, hãy tính số dãy nhị phân 29 chữ số sao cho có đúng 6 cặp $\overline{00}$ hoặc $\overline{11}$ trong dãy.

Giải.

a) Số bộ nghiệm nguyên dương của phương trình trên là: $C^{7-1}_{29-1} = C^6_{28} = 376740$

b) Kí hiệu $g(a, b, y)$ là dãy nhị phân có y chữ số 0,1 xen kẽ, bắt đầu bằng a và kết thúc bằng b. VD: g(0,0,5) là $\overline{01010}$

Dãy nhị phân thỏa yêu cầu đề có thể biểu diễn dưới dạng $S = \overline{g(a_1, b_1, x_1)g(a_2, b_2, x_2)...g(a_7, b_7, x_7)}$ với $a_i, b_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, 6} : b_i = a_{i+1}$ và $x_1, x_2, ...x_7$ là 1 bộ nghiệm của (1)

(Do có đúng 6 cặp $\overline{b_i, a_{i+1}}$ là $\overline{00}$ hoặc $\overline{11}$ trong dãy)

Nên có C_{28}^6 dãy nhị phân S bắt đầu bằng 1 và C_{28}^6 dãy nhị phân S bắt đầu bằng 0.

Vậy có: $2C_{28}^6$ dãy nhị phân S thỏa đề.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu bộ nghiệm (a, b, c, d, e) trong đó 3 số $a, b, c, d, e \in N$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau?
i) $c \geq 2, d \geq 3, e \leq 1$
ii) $a + b + c + d + e = 16$

Giải.

Đặt $c' = c - 2$ và $d' = d - 3$. Khi đó $c' \geq 0$ và $d' \geq 0$
Ta xét 2 trường hợp
TH1: $e = 1$
$\Leftrightarrow a + b + c' + d' = 10$ (1)
Theo công thức chia kẹo Euler (1) có C_{13}^3=286 bộ nghiệm
TH2: e=0$\Leftrightarrow a + b + c' + d' = 11$ (1)
Theo công thức chia kẹo Euler (1) có C_{14}^3=364 bộ nghiệm
Vậy tổng số bộ nghiệm thỏa mãn là 286+364=650 bộ

Bài tập rèn luyện.

Bài 1: Có 8 viên bi giống nhau và 12 hộp bi khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đó vào các hộp sao cho tổng số bi trong hộp số 1,2,3 là số chẵn?

Bài 2: Có bao nhiêu bộ $(x_1, x_2, ..., x_{10})$ các số nguyên dương thỏa $x_1 + x_2 + ... + x_{10} < 2020$

Bài 3 (PTNK 2021-2022): Cho tập X_1=1,2,...,2020. Tập con A của X được gọi là tập "tránh 2" nếu với mọi x, y thuộc A thì $|x - y|$ khác 2. Tìm số tập con tránh 2 của X có 5 phần tử.

Bài 4: Có 5 con xúc xắc lần lượt được đổ ra. Hỏi có bao nhiêu xác xuất để tổng của 5 mặt trên xúc xắc là 14?

Bài 5: Trong một hội nghị có n người ngồi xung quanh một bàn tròn. Tìm số cách chọn ra $k(k \leq [\frac{n}{2}])$ người sao cho không có 2 người được chọn nào ngồi cạnh nhau.

Bài 6: Có bao nhiêu bộ $(x_1, x_2, ..., x_{10})$ các số tự nhiên thỏa $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_{10} \leq 2022$

Bài 7: Cho đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn (O). Hỏi có bao nhiêu hình thang không là hình chữ nhật mà 4 đỉnh là đỉnh của đa giác đã cho?

Bài 8: Gieo 4 con súc sắc cân đối, đồng chất. Kí hiệu x_i $(1 \leq x_i \leq 6)$ là số chấm xuất hiện trên con súc sắc thứ i (i=1,2,3,4).Tính xác suất để có một số trong x_1, x_2, x_3, x_4 bằng tổng 3 số còn lại

Bài 9: Có bao nhiêu cách để sắp xếp 6 bạn nữ và 15 bạn nam thành một vòng tròn mà có ít nhất 2 bạn nam giữa hai bạn nữ kề nhau.

Bài 10: Có bao nhiêu bộ số nguyên dương (a, b, c, d) sao cho $d = \max\{a, b, c, d\}, d \leq 2015$ và $(ad + bc)(bd + ac)(ab + cd) = (d - a)^2(d - b)^2(d - c)^2$.

Bài 11: Cho A là họ các đa thức bậc ba, monic và có đúng 3 nghiệm (không nhất thiết phân biệt) thuộc tập {1,2,...,6}. Xác định số cặp đa thức khác nhau lấy từ A, không tính thứ tự sao cho cặp đa thức không có nghiệm chung.

Bài 12: Định nghĩa một tập hợp mà mỗi phần tử có thể xuất hiện hơn một lần là Multiset. Xét $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Gọi $f(n)$ là số Multiset lấy các phần tử từ S có không quá n phần tử. Chứng minh rằng $(n + 1)|f(n)$.

Bài 13: Một số tự nhiên a được gọi là "số may mắn" khi tổng các chữ số của nó là 7. Ta sắp xếp các số đó trong thứ tự tăng dần và có dãy $a_1, a_2, ...$ Nếu a_n là 2005 thì a_{5n} bằng bao nhiêu?

Định lý 3. *Cho M và N là các tập hợp hữu hạn phần tử.* Khi đó:

a) Tồn tại một đơn ánh f: $M \to N$ khi và chỉ khi |M| $\leq |N|$

b) Tồn tại một toàn ánh f: $M \to N$ khi và chỉ khi |M| $\geq |N|$

c) Tồn tại một song ánh f: $M \to N$ khi và chỉ khi |M| = |N|

- Để đếm các phần tử của tập hợp X, ta có thể thiết lập song ánh từ $X \to Y$ sao cho |Y| dễ đếm hơn.
- So sánh số phần tử của hai tập hợp:

1. Để chứng minh 2 tập hợp có số phần tử bằng nhau, ta thiết lập 1 quy tắc nối mỗi phần tử của tập này với mỗi phần tử của tập kia. Xong, ta chứng minh quy tắc trên là song ánh.
2. Để chứng minh $|X| \leq |Y|$, ta thiết lập một đơn ánh từ $X \to Y$.

Ví dụ 3: Cho A,B là hai điểm nguyên cùng phía với trục hoành. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua trục hoành. Chứng minh rằng số quỹ đạo từ A đến B có giao điểm với trục hoành bằng số quỹ đạo từ A' đến B.

Định nghĩa. *Một quỹ đạo trên mặt phẳng tọa độ là một bộ hữu hạn điểm* $(A_1, A_2, ..., A_n)$ *thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

1. Với mọi số nguyên $1 \leq i \leq n$ thì $A_i \in$Z^2

2. Với mọi số nguyên $1 \leq i \leq n-1$ thì $x_{Ai+1} - x_{Ai} = 1$ và $y_{Ai+1} - y_{Ai} = \pm 1$

Giải.

Gọi $|X|$ là số quỹ đạo từ A đến B cắt trục hoành, $|Y|$ là số quỹ đạo từ A' tới B.

Ta sẽ thiết lập một song ánh từ $X \to Y$

Với mỗi quỹ đạo thuộc X, ta lấy đối xứng phần từ A đến giao điểm đầu tiên của quỹ đạo với Ox qua Ox thì được một quỹ đạo từ A'. Thiết lập tương tự với mỗi quỹ đạo thuộc Y, ta cũng được 1 quỹ đạo tương đương từ A thuộc X. Vậy nên $|X| = |Y|$

Ví dụ 4 (PTNK 2016): Với các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a < b < c < d$, ta ký hiệu:

$$T(a, b, c, d) = \{\{x, y, z, t\} \subset \mathbf{N}^* | x < y < z < t, x \leq a, y \leq b, z \leq c, t \leq d\}$$

a) Tính số phần tử của $T(1,4,6,7)$
b) Cho $a = 1, b \geq 4$. Gọi d_1 là số phần tử của $T(a,b,c,d)$ chứa 1 và không chứa 2; d_2 là số phần tử chứa 1,2 mà không chứa 3; d_3 là số phần tử chứa 1,2,3 mà không chứa 4. Chứng minh rằng $d_1 \geq 2d_2 - d_3$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải.

a) Với $T(1,4,6,7)$, ta có $x = 1$ nên $2 \leq y \leq 4$ hay $y \in \{2,3,4\}$. Xét các trường hợp sau:

- Nếu $y = 2$ thì $3 \leq z \leq 6$. Với mỗi giá trị của z, ta thu được $7 - z$ giá trị của t nên ta có 10 bộ số.
- Nếu $y = 3$, lập luận tương tự ta có 6 bộ số.
- Nếu $y = 4$, lập luận tương tự ta có 3 bộ số.

Vậy có tất cả 19 bộ số trong $T(1,4,6,7)$

b) Đặt các tập hợp sau:

$$\begin{cases} T_1 = \{(1,y,z,t) \mid 3 \leq y \leq b, y < z \leq c, z < t \leq d\} \\ T_2 = \{(1,2,z,t) \mid 4 \leq z \leq c, z < t \leq d\} \\ T_3 = \{(1,2,3,t) \mid 5 \leq t \leq d\} \end{cases}$$

Ta lại viết T_1 thành $A \cup B \cup C$ đôi một không giao nhau, trong đó

$$\begin{cases} A = \{(1,y,z,t) \mid 4 \leq y \leq b, y < z \leq c, z < t \leq d\} \\ B = \{(1,3,z,t) \mid 5 \leq z \leq c, z < t \leq d\} \\ C = \{(1,3,4,t) \mid 5 \leq t \leq d\} \end{cases}$$

Dễ thấy rằng có song ánh từ C đến T_3 nên $|C| = d_3$
Xét $D = \{(1,4,z,t) \mid 5 \leq z \leq c, z < t \leq d\}$. Khi đó, $D \subset A$ nên $|D| \leq |A|$ và có song ánh từ D vào B nên $|D| = |B|$.
Ta có: $C \cup B = \{(1,3,z,t) \mid 4 \leq z \leq c, z < t \leq d\}$. Rõ ràng có song ánh từ $C \cup B$ đến T_2 nên $|C \cup B| = d_2$. Để ý rằng $C \cap B = \emptyset$ nên $|C| + |B| = d_2$ hay $|B| = d_2 - d_3$. Như vậy, ta có:

$$d_1 = |A| + |B| + |C| \geq |D| + |C| + |B| = 2d_2 - d_3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = 4$

Bài tập rèn luyện.

Bài 1 (AIME 2001): 1 viên xúc xắc được đổ 4 lần. Tính xác xuất để khi đổ thì số trên xúc xắc ở 3 lần cuối không bé hơn lần đổ trước nó.

Bài 2: Cho $n > 1$ là một số nguyên dương và T_n là số các tập con khác rỗng của của $1, 2, ...n$ sao cho trung bình cộng tất cả các phần tử của tập đó là số nguyên. Chứng minh rằng $T_n - n$ là số chẵn.

Bài 3: Có một nhóm học sinh trong trường K. Biết rằng mỗi 2 học sinh không quen nhau thì có đúng 2 người quen chung, mỗi 2 học sinh quen nhau thì không có người quen chung. Chứng rằng số người quen của mỗi học sinh là như nhau.

Bài 4: Đếm số hàm f: [n] → [m] thoả mãn:

a) f là đơn ánh.

b) f là toàn ánh.

c) f là song ánh.

Bài 5: Hỏi có bao nhiêu cách mà một số tự nhiên n có thể viết được dưới dạng tổng của 1 hoặc nhiều số và 1 số có các cách viết như nhau nhưng khác thứ tự cũng tính là 2 cách khác nhau.

Bài 6: Với mỗi số nguyên dương n, gọi $f(n)$ là số tất cả những cách biểu diễn n dưới dạng tổng của những lũy thừa của 2 với sô mũ nguyên không âm. Những hoán vị của một cách biểu diễn sẽ chỉ coi chung là 1 cách. Chứng minh
a) $f(n) \leq f(n+1)$
b) $f(2n+1) = f(2n) = f(2n-1) + f(n) = f(2n-2) + f(n)$

Bài 7: Cho n, m, k là các số nguyên dương lớn hơn 1 thỏa $k \leq n$. Đếm số bộ $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ với các số $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ đều phân biệt thỏa mãn 1 trong 2 tính chất sau:
i. Tồn tại 2 số $i, j \in \overline{1, k}$ sao cho $i < j$ và $a_i > a_j$
ii. Tồn tại $i \in \overline{1, k} : m \nmid a_i - i$

Bài 8: Trong một hội nghị có 40 người.Cứ mỗi 19 người đều thần tượng chung duy nhất 1 người trong hội nghị.Nếu A thần tượng B thì B không nhất thiết phải thần tượng A, A cũng không thần tượng chính mình.Chứng minh tại buổi hội nghị tồn tại một nhóm

20 người thỏa với bất kì P thuộc nhóm đó thì P không phải là thần tượng của cả 19 người còn lại.

Bài 9: Cho tập S gồm các số tự nhiên từ 1 tới n.Xét tất cả tập con có r phần tử của tập S với $1 \le r \le n$.Mỗi tập con luôn tồn tại một số nhỏ nhất. với F(n,r) là trung bình cộng của tất cả các số nhỏ nhất của mỗi tập con có r phần tử trên, chứng minh rằng:

$$F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}$$

Bài 10(USAMO 1996): Gọi a_n là số xâu nhị phân có độ dài n mà không chứa 3 số 0,1,0 theo thứ tự đó. Gọi b_n là số xâu nhị phân cũng có độ dài là n mà không chứa 4 số 0,0,1,1 và 1,1,0,0 theo thứ tự đó. Chứng minh rằng $2a_n = b_{n+1}$

Bài 11: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn các tính chất: nếu n cái domino được đặt trên 1 bàn cờ 6x6 với mỗi domino chiếm 2 đơn vị diện tích vuông, thì luôn luôn có thể đặt thêm 1 domino lên trên bàn mà không phải di chuyển bất kỳ domino nào khác. Xác định giá trị lớn nhất của n.

Nhận xét. Đôi khi để tính tổng các phần tử của một tập hợp. Ta thiết lập một song ánh từ $A \to A$. Khi đó: $2\sum_{x\in A} x = \sum_{x \in A}(x + f(x))$

Ví dụ 5 (HSGQG VN 2002 Bảng B: Cho tập hợp S gồm tất cả các số nguyên trong đoạn [1;2002]. Gọi T là tập hợp gồm tất cả các tập hợp con khác rỗng của S. Với mỗi tập hợp X thuộc T, kí hiệu m(X) là trung bình cộng của tất cả các số thuộc X. Đặt :

$$\mathrm{m} = \frac{\sum_{|T|} m(X)}{|T|}$$

ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp X thuộc T. Hãy tính giá trị của m. (|T| kí hiệu số phần tử của tập hợp T)

Giải.

Xét song ánh $f : X \to X, f(x) = \{2003 - x\}$ với $x \in X$. Nhận xét rằng: $m(X) + m(f(X)) = 2003$. Do đó:

$$2\sum m(X) = \sum (m(X) + m(f(X))) = |T| \cdot (2002+1) \Rightarrow m = \frac{2002+1}{2} = \frac{2003}{2}$$

Bài tập rèn luyện.

Bài 1:Hãy tính trung bình cộng của tất cả các số N gồm 2014 chữ số thỏa mãn N chia hết cho 9 và các chữ số của N được lập từ $X = 1, 2, ..., 8$.

Bài 2: Tính trung bình cộng các số tự nhiên $N = \overline{a_1a_2\ldots a_{2022}}$ gồm 2022 chữ số thoả mãn N chia hết cho 999 và các chữ số của N nằm trong tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Nhận xét. Mô hình lưới nguyên tỏ ra rất hữu dụng trong các bài toán đếm có "quá trình". Một số tài liệu gọi việc chuyển mô hình này là "phương pháp quỹ đạo".

Ví dụ 6: Tính số quỹ đạo từ $O(0, 0)$ đến $A(a, b)$

Giải.

Gọi 1 bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ là 1 quỹ đạo đi từ O đến A, khi đó:

i)A_i thuộc Z^2 với mọi $1 \leq i \leq n$.

ii)$x_{A_{i+1}} - x_{A_i} = 1$ và $y_{A_{i+1}} - y_{A_i} = \pm 1$ với mọi $1 \leq i \leq n-1$, trong đó x_{A_i}, y_{A_i} lần lượt là tọa độ của A_i trên trục hoành và trục tung.

Ta gọi đoạn A_iA_{i+1} là hướng lên nếu $y_{A_{i+1}} - y_{A_i} = 1$ và hướng xuống trong trường hợp còn lại.

Đặt x là số đoạn hướng lên, y là số đoạn hướng xuống.

Nhận xét 1: trong quỹ đạo từ O đến A có đúng a đoạn nên $x + y = a$.

Nhận xét 2: $x - y = b$.

Do vậy, $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$.

Chọn x đoạn trong $x + y$ đoạn là đoạn hướng lên

$\Rightarrow$ có $C_{x+y}^{x} = C_a^{\frac{a+b}{2}}$ cách chọn.

Vậy có $C_a^{\frac{a+b}{2}}$ quỹ đạo.

Bài tập rèn luyện.

Bài 1: Có n người xếp hàng mua trà sữa với giá 50 nghìn đồng/ly. Trong đó có đúng k người chỉ mang loại tiền 100 nghìn đồng và những người còn lại chỉ mang loại tiền 50 nghìn đồng.

a) Giả sử người bán hàng không mang tiền, tìm điều kiện của k (theo n) để luôn có một cách xếp hàng sao cho người nào cũng được thối tiền (nếu cần) ngay lập tức?

b) Với điều kiện ở câu a được thỏa mãn, giả sử người bán mang theo q tờ 50 nghìn đồng, tìm số cách xếp hàng (theo n, k, q) sao cho người nào cũng được thối tiền (nếu cần) ngay lập tức.

Bài 2: Cho số nguyên dương n. Với x, y là hai số nguyên không âm thỏa mãn $x + y < n$, các điểm nguyên (x, y) được tô bởi một trong hai màu xanh và đỏ, sao cho nếu (x, y) được tô bởi màu đỏ thì (x', y') cũng thế với $x' \leq x, y' \leq y$. Gọi A là số cách chọn ra n điểm màu xanh có hoành độ đôi một khác nhau và B là số cách chọn ra n điểm màu xanh có tung độ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng $A = B$.

Ví dụ 7 (Bài toán bàn cờ): Cho n là số nguyên dương, tìm số đường đi trong lưới nguyên từ (0,0) tới (n,n) chỉ được đi lên trên hay sang phải sao cho đường đi nằm trong phần $x \geq y$.

Giải.

Số đường đi từ (0,0) tới (n,n) là C_{2n}^n
Một đường đi P gọi là không hợp lệ khi đi vào phần x < y, khi đó đường đi đó cắt đường thẳng y = x+1 tại ít nhất 1 điểm. Gọi X là điểm đầu tiên P cắt đường thẳng y = x+1. Khi đó lấy đối xứng phần của P từ (0,0) tới X qua đường thẳng y=x+1; phần còn lại giữ nguyên sẽ được 1 đường đi P' từ (-1, 1) tới (n,n). Ngược lại, một đường đi P' bất kì từ (-1,1) tới (n,n) sẽ tương ứng với 1 đường không hợp lệ từ (0,0) tới (n,n). Số đường đi từ (-1, 1) đến (n,n) là C_{2n}^{n+1}. Vậy số đường đi thỏa mãn là: $C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$. Con số này còn được gọi là số Catalan.

Bài tập rèn luyện.

Bài 1: Cây hình học với n nút là một cấu trúc được định nghĩa: Từ nút gốc (đỉnh) trên đầu, ta phân nhánh bằng cách nối nút gốc đó với một số nút, ta tiếp tục chọn vài nút trong số đó để phân nhánh cho đến khi đủ n nút. Tìm số cây hình học với $n + 1$ nút. Dưới đây là ảnh minh họa cho số cây có 4 nút của tác giả Yufei Zhao

Bài 2: Có bao nhiêu cách để sắp xếp các đồng xu thỏa tầng cuối cùng có n xu, các đồng xu ở trên được dựng và tiếp xúc với hai đồng xu ngay dưới nó.

2 Lời giải tham khảo

Lời giải của nhóm được trình bày theo bài tập dưới từng ví dụ.

1. Lời giải bài tập ví dụ 1, 2 - Bài toán chia kẹo Euler

Bài 1: Có 8 viên bi giống nhau và 12 hộp bi khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đó vào các hộp sao cho tổng số bi trong hộp số 1,2,3 là số chẵn?
Lời giải:
Gọi số bi trong các hộp lần lượt là $x_1, x_2, ..., x_{12}$. Đặt $x_1 + x_2 + x_3 = a \Rightarrow$ a chẵn và $0 \leq$ a ≤ 8

Xét a=0 $\Rightarrow x_4 + ... + x_12 = 8 \Rightarrow$ Số trường hợp thoả của $(x_4, ..., x_{12})$ là C^7_{16} và số trường hợp thoả (x_1, x_2, x_3) là 1

Xét a=2 $\Rightarrow x_4 + ... + x_12 = 6 \Rightarrow$ Số trường hợp thoả của $(x_4, ..., x_{12})$ là C^5_{14} và số trường hợp thoả (x_1, x_2, x_3) là C^1_4

Xét a=4 $\Rightarrow x_4 + ... + x_{12} = 4 \Rightarrow$ Số trường hợp thoả của $(x_4, ..., x_{12})$ là C^3_12 và số trường hợp thoả của (x_1, x_2, x_3) là C^3_6

Xét a=6 $\Rightarrow a_4 + ... + a_12 = 2 \Rightarrow$ Số trường hợp thoả của $(x_4, ..., x_{12})$ là C^3_12 và số trường hợp thoả của (x_1, x_2, x_3) là C^5_8

Xét x=8 $\Rightarrow x_4 + ... + x_12 = 0 \Rightarrow$ Số trường hợp thoả của $(x_4, ..., x_{12})$ là 1 và số trường hợp của (x_1, x_2, x_3) là C^7_{10}

Vậy tổng số cách xếp bi vào hộp là 24528 cách.

Bài 2: Có bao nhiêu bộ $(x_1, x_2, ..., x_{10})$ các số nguyên dương thỏa $x_1 + x_2 + ... + x_{10} <$ 2020
Lời giải:
Đặt x_{11}=2020 - $(x_1 + x_2 + ... + x_{10})$ thì $x_{11} \geq 1$

Khi đó ta có phương trình: $x_1 + x_2 + ... + x_{11}$=2020 với $x_i \geq 1$ (i=1,...,11)

Áp dụng bài toán chia kẹo Euler nên số nghiệm là C^{11-1}_{2020-1}= C^{10}_{2019}

Bài 3(PTNK 2021-2022): Cho tập X_1=1,2,...,2020. Tập con A của X được gọi là tập "tránh 2" nếu với mọi x,y thuộc A thì |x-y| khác 2. Tìm số tập con tránh 2 của X có 5 phần tử.

Lời giải:
Ta phân hoạch X thành 2 tập con X_1=[1,3,...,19], X_2=[2,4,...,20]. Dễ thấy 2 số có hiệu bằng 2 khi và chỉ khi chúng là 2 số lẻ liên tiếp hoặc 2 số chẵn liên tiếp.Với n $\leq$ 5 cho trước, ta sẽ đếm số cách chọn n số từ X_1 sao cho trong các số được chọn không có 2 số lẻ liên tiếp. Thật vậy gọi n số được chọn là:
$2a_1-1$,$2a_2-1$,...,$2a_n-1$ $(a_1 < a_2 < ... < a_n)$
Khi này, do không có 2 số lẻ liên tiếp cùng được chọn,ta phải có:
$a_1 < a_2 - 1 < ... < a_n - (n-1) \leq 11 - n$
Có C_{11-n}^n cách chọn n số $a_1, a_2 - 1, ..., a_n - (n-1)$ thỏa điều kiện trên, suy ra có C_{11-n}^n cách chọn n số từ X_1. Tương tự ta cũng có C_{11-n}^n cách chọn n số từ X_2 sao cho không có 2 số chẵn liên tiếp nào được chọn. Do đó với n $\leq$5 cho trước, số tập con tránh 2 của X có 5 phần tử, trong đó có đúng 5 phần tử từ X_1 là$C_{11-n}^n.C_{5-n}^{6+n}$. Cho n chạy từ 0 đến 5, ta suy ra số tập con tránh 2 của X có 5 phần tử là:
$\sum_0^5 C_{11-n}^n.C_{5-n}^{6+n}$=4744

Bài 4: Có 5 con xúc xắc lần lượt được đổ ra. Hỏi có bao nhiêu xác xuất để tổng của 5 mặt trên xúc xắc là 14?
Lời giải:
Gọi 5 xúc xắc lần lượt là $d_1, d_2, ..., d_5$ và $x_1$là con số mặt trên của xúc xắc x_1.Với x_1 ta có 6 trường hợp có thể xảy ra => có tất cả 6^5 khả năng có thể xảy ra với cả 5 xúc xắc. Gọi A là tập hợp các khả năng tổng các mặt của xúc xắc là 14. Ta cần tính $\frac{|A|}{6^5}$. Do đó ta cần tính số bộ 5 số nguyên $(x_1, x_2, ..., x_5)$ thỏa 1$\leq$$x_1$$\leq$6 và $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$

Theo hệ quả: Có C_{n-1}^{m-1} bộ số nguyên dương $(x_1, x_2, ..., x_m)$ thỏa mãn phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_m = n$, ta có tất cả $C_{14-1}^{5-1} = 715$ bộ 5 số nguyên dương thỏa $x_1 + x_2 + ... + x_5 = 14$

Gọi B là tập các bộ 5 số nguyên dương có tổng bằng 14 và có ít nhất 1 số lớn hơn. Không mất tính tổng quát, đặt $B_i \subset B$ thỏa $x_1 > 6$. Ta có $B_i \cap B_j = \emptyset$ với i $\neq$ j (do$x_1 + x_2 + ... + x_5 > 6 + 6 + 1 + 1 + 1 + 1 = 15 => B = \cup B_i$). Ta có $|B_i| = |B_j| =>$ $|B| = 5|B_1|$. Ánh xạ từ $(x_1, x_2, ...x_5) \in B_1$ tới $(y_1, y_2, ..., y_5)$ với $y_1 = x_1 - 5$ và $y_i = x_i$ $(2 \leq i \leq 5)$. Đây là một song ánh giữa tập B_1 tới tập các bộ 5 số $(y_1, y_2, ..., y_5)$ nguyên dương thoả $y_1+y_2+...+y_5 = 8$. Suy ra$|B_1| = C_{8-1}^{5-1} = C_7^4 = 35 =>|B| = 35.5 = 175$

Vậy $|A| = 715 - 175 = 540$

Bài 5 Trong một hội nghị có n người ngồi xung quanh một bàn tròn. Tìm số cách chọn ra $k(k \leq [\frac{n}{2}])$ người sao cho không có 2 người được chọn nào ngồi cạnh nhau.

Lời giải:
Ta đánh số thứ tự từng người từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ, xếp những người theo số thứ tự đó từ trái sang phải thành 1 hàng thẳng . Ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Người thứ 1 được chọn.
Gọi A_i là tập hợp những người nằm giữa người được chọn thứ i và $i+1$ với $i = \overline{1, k-1}$ và là tập hợp những người bên phải người được chọn thứ k với $i = k$. Như vậy thì $|A_i|$ là số nguyên dương. Ta xây dựng một song ánh f, biến mỗi $|A_i|$ thành x_i trong phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = n - k$$

Theo công thức chia kẹo Euler, số bộ nghiệm của phương trình trên là C_{n-k-1}^{k-1}. Nên có C_{n-k-1}^{k-1} cách chọn $k-1$ người còn lại thỏa đề

Trường hợp 2: Người thứ 1 không được chọn.
Gọi B_i là tập hợp những người bên trái người được chọn thứ 1 với $i = 1$, là tập hợp những người nằm giữa người được chọn thứ $i-1$ và i với $i = \overline{2, k}$ và là tập hợp những người bên phải người được chọn thứ k với $i = k+1$. Như vậy thì $|B_i|$ $(i = \overline{1, k})$ và B_{k+1} $+1$ là số nguyên dương. Ta xây dựng một song ánh g biến mỗi $|B_i| (i = \overline{1, k})$ thành x_i và $|B_{k+1}|$ thành $x_{k+1} - 1$ của phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{k+1} - 1 = n - k$$

Theo công thức chia kẹo Euler, số bộ nghiệm của phương trình trên là C_{n-k}^{k}.

Vậy: Ta có $C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^{k}$ cách chọn thỏa đề

Bài 6: Có bao nhiêu bộ $(x_1, x_2, ..., x_{10})$ các số tự nhiên thỏa $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_{10} \leq 2022$
Lời giải:
Đặt $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1 \geq 0, y_3 = x_3 - x_2 \geq 0, ..., y_11 = 2022 - x_10 \geq 0$ Khi đó, từ giả thiết ta có:

$$y_1 + y_2 + ... + y_{11} = 2022, \;\; y_i \geq 0 \;\; \forall \;\; i = \overline{1, 11} \;\; (\star)$$

Quay trở lại bài toán, với một bộ nghiệm của $(\star)$ thì tương ứng duy nhất một bộ $(x_1, x_2, .., x_{10})$ thỏa đề bài.
Số bộ nghiệm của $(\star)$ là C_{2032}^{10} theo Chia kẹo Euler. Thế nên có C_{2032}^{10} bộ số $(x_1, x_2, .., x_{10})$ thỏa đề bài.

Bài 7: Cho đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn (O). Hỏi có bao nhiêu hình thang không là hình chữ nhật mà 4 đỉnh là đỉnh của đa giác đã cho?
Lời giải:
Gọi mỗi cung chứa một cạnh của đa giác đều trên đường tròn là 1 đơn vị(có n cung như vậy). Xét một hình thang thoả mãn mà đỉnh đầu tiên chứa đáy nhỏ là A_i, các đỉnh tiếp theo theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ. Gọi x,y,z,t lần lượt là số đo các cung chứa đáy nhỏ, hai cạnh bên và đáy lớn hình thang, ta có : $\begin{cases} 1 \le x, y, z \in Z \\ x < z \\ x + 2y + z = n(*) \end{cases}$

Ta có phương trình (*) tương đương với x+z=n-2y (**) với mỗi y thoả điều kiện $1 \le y \le \frac{n-2}{2}$. Theo bài toán chia kẹo Euler, phương trình (**) có (n-2y-1) nghiệm nguyên dương. Bây giờ ta đếm các nghiệm nguyên dương của (**) mà x<z.

TH1: Nếu n lẻ thì (**) không có nghiệm x=z nên số nghiệm thoả mãn điều kiện x<z là $\frac{n-2y-1}{2}$

TH2 Nếu n chẵn thì (**) có đúng 1 nghiệm x=z nên số nghiệm thoả mãn điều kiện x<z là $\frac{n-2y-2}{2}$

Số nghiệm (*) thoả mãn các ràng buộc đã cho là :

$$\begin{cases} \sum_{y=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{n-2y-1}{2} = \frac{1}{8}(n-1)(n-3)(n = 2m+1, m \in N) \\ \sum_{y=1}^{\frac{n-4}{2}} \frac{n-2y-2}{2} = \frac{1}{8}(n-2)(n-4)(n = 2m, m \in N*) \end{cases}$$

Với mỗi bộ số x,y,z thoả mãn (*) xuất phát từ 1 đỉnh của đa giác là đỉnh đầu tiên của đáy nhỏ hình thang ứng với cạnh x theo chiều thuận kim đồng hồ, ta có 1 hình thang thoả mãn.

Vậy tổng số hình thang thoả mãn là:

$$\begin{cases} \text{0,125.n(n-1)(n-3)(n=2m+1, m} \in N) \\ \text{0,125.n(n-2)(n-4)(n=2m, m} \in N*) \end{cases}$$

Bài 8: Gieo 4 con súc sắc cân đối, đồng chất. Kí hiệu x_i $(1 \le x_i \le 6)$ là số chấm xuất hiện trên con súc sắc thứ i (i=1,2,3,4).Tính xác suất để có một số trong x_1, x_2, x_3, x_4 bằng tổng 3 số còn lại.
Lời giải:
Ta tính bộ số sao cho x_1=x_2+x_3+x_4 do vai trò của 4 số là tương đương nên số các bộ

sao cho x_1 hoặc x_2 hoặc x_3 hoặc x_4 bằng tổng 3 số còn lại là bằng nhau.

Do x_1=x_2+x_3+x_4 nên ta có $x_1 \geq 3$, suy ra $x_1 \in 3, 4, 5, 6$. Lại có bộ số (x_2,x_3,x_4) thỏa mãn x_1=x_2+x_3+x_4, theo bài toán chia kẹo Euler, số nghiệm sẽ bằng $C_{x_1-1}^{3-1}$= $C_{x_1-1}^{2}$. Từ đó tổng số bộ (x_2,x_3,x_4) sao cho x_1=x_2+x_3+x_4, theo quy tắc cộng, bằng: $\sum_{x_1=3}^{6} \mathrm{C}_{x_1-1}^{2}$= 20
.

Mỗi số x_i có 6 lựa chọn(từ 1 đến 6) nên theo quy tắc nhân số bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) là 6^4=81.

Vậy xác suất cần tìm là: $\frac{4.20}{6^4}$= $\frac{5}{81}$

Bài 9: Có bao nhiêu cách để sắp xếp 6 bạn nữ và 15 bạn nam thành một vòng tròn mà có ít nhất 2 bạn nam giữa hai bạn nữ kề nhau.
Lời giải:
Coi như một cách chia hợp lệ là cách chia một nhóm có nhóm trưởng là một người nữ và có lớn hơn bằng hai thành viên nam trong nhóm.Gọi số nam trong nhóm đầu tiên đến nhóm thứ 6 là $x_1.x_2, ..x_6$.Ta có là :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$$

Đặt $y_i = x_i - 2, i = 1, 2, ..6$, ta được $y_1 + .. + y_6 = 3$.Áp dụng công thức chia kẹo ta được kết quả sau: 15 người nam được chia thành 6 nhóm thỏa mỗi nhóm có ít nhất 2 bạn nam thì sẽ có là $C_{3+6-1}^{6-1} = C_8^5$.Ta sắp xếp 6 nhóm trong một vòng tròn với (6-1)! cách(do có bị lặp lại 6 lần).15 bạn nam còn lại đứng trong vòng tròn vơi 15! cách.Theo nguyên tắc nhân ta có tổng số cách chia là 15!x5!xC_8^5

Bài 10: Có bao nhiêu bộ số nguyên dương (a, b, c, d) sao cho $d = \max\{a, b, c, d\}, d \leq 2015$ và $(ad + bc)(bd + ac)(ab + cd) = (d - a)^2(d - b)^2(d - c)^2$.
Lời giải:
Trước hết ta chứng minh $d = a + b + c$ bằng phản chứng. Giả sử $d < a + b + c$ ta thấy là:

$$(d - a)(d - b) = d^2 - d(a + b) + ab < d^2 - d(d - c) + ab = ab + cd$$

Một cách tương tự, ta cũng có $(d - a)(d - c) < bd + ac, (d - b)(d - c) < ad + bc$ Do đó $(d - a)^2(d - b)^2(d - c)^2 < (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$ điều này vô lí.

Nếu ta giả sử $d > a + b + c$ thì ta cũng làm tương tự trên và chỉ ra được $(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2 > (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$ .Khi đó suy ra $d = a + b + c$.

Ta thấy rằng $3 \leq d = a+b+c \leq 2015$, đặt $a_1 = a-1, b_1 = b-1, c_1 = c-1$ thì $0 \leq a_1 + b_1 + c_1 \leq 2012$ do đó số bộ thoả mãn là C^3_{2015}

Bài 11: Cho A là họ các đa thức bậc ba, monic và có đúng 3 nghiệm (không nhất thiết phân biệt) thuộc tập {1,2,...,6}. Xác định số cặp đa thức khác nhau lấy từ A, không tính thứ tự sao cho cặp đa thức không có nghiệm chung.

Lời giải:

Trước hết, $|A|$ chính là số tổ hợp có lặp chập 3 của 6 và bằng số nghiệm của phương trình chia kẹo Euler(với x_k là số lần xuất hiện của k) là $x_1 + x_2 + ... + x_6 = 3$ nên $|A| = C^5_8 = 56$. Rõ ràng P(x), Q(x) không thể có 3 nghiệm chung. Gọi A_k là tập hợp các cặp đa thức nhận nghiệm chung là k $\in \{1, 2, ..., 6\}$. Khi đó, số bộ ba không chứa k là $C^4_7 = 35$ nên số bộ có chứa k là 56 - 35 = 21. Do đó, có tất cả 21 đa thức nhận x = k là nghiệm, số cách chọn là $|A_k| = C^2_{21} = 210$.

Xét $A_1 \cup A_2$ là tập hợp các cặp đa thức có nghiệm chung là 1,2. Giả sử nghiệm còn lại của chúng là a $<$ b với a,b $\in \{1, 2, ..., 6\}$ thì rõ ràng có tất cả $C^2_6 = 15$ cặp. Suy ra $|A_1 \cap A_2| = 15$. Từ đó theo nguyên lý bù trừ, ta thấy số cặp đa thức có ít nhất một nghiệm chung là

$$\sum_{i=1}^{6} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| = C^1_6.210 - C^2_6.15 = 1035.$$

Vậy số cặp đa thức không có nghiệm chung là C^2_56 - 1035 = 505.

Bài 12: Định nghĩa một tập hợp mà mỗi phần tử có thể xuất hiện hơn một lần là Multiset. Xét $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Gọi $f(n)$ là số Multiset lấy các phần tử từ S có không quá n phần tử. Chứng minh rằng $(n+1)|f(n)$.

Lời giải:

Gọi $(a_1, a_2, a_3, ...a_n)$ là số lần xuất hiện của các phần tử $(x_1, x_2, ...x_n)$ Theo đề bài ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \leq n$$

Do đó số bộ $(a_1, a_2, ...a_n)$ thoả mãn sẽ là C^n_{2n} cũng chính là giá trị cuả f(n). Do đó ta chỉ cần chứng minh $(n+1)|C^n_{2n}$

Chúng ta để ý là $C^n_{2n} - C^{n+1}_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} - \dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \dfrac{(2n!)}{(n!)^2}\left(1 - \dfrac{n}{n+1}\right) =$

$C_{2n}^{n}.\dfrac{1}{n+1}$

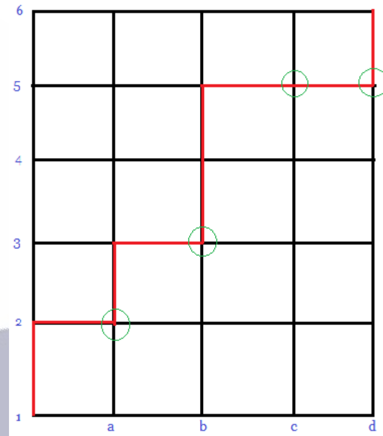
Đẳng thức này chứng tỏ $(n+1)|f(n)$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 13: Một số tự nhiên a được gọi là "số may mắn" khi tổng các chữ số của nó là 7. Ta sắp xếp các số đó trong thứ tự tăng dần và có dãy $a_1, a_2, ...$ Nếu a_n là 2005 thì a_{5n} bằng bao nhiêu?
Lời giải:
Chúng ta thấy là số nghiệm không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_k = m$ là C_{m+k-1}^{m} khi $x_1 \geq 1$ và $x_i \geq 0$ $(i \geq 2)$. Số bộ nghiệm không âm chính là C_{m+k-2}^{m-1}, số lượng số may mắn có k chữ số là P(k)=C_{k+5}^{6}. Ta biết rằng 2005 số may mắn nhỏ nhất có dạng $\overline{2abc}$, P(1)=$C_6^6 = 1$, P(2)=C_7^6=7, P(3)=$C_8^6 = 28$. Đồng thời số lượng số may mắn có 4 chữ số có dạng $\overline{1abc}$ chính là số lượng số nguyên không âm thỏa phương trình $a + b + c = 6$ là $C_{6+3-1}^{6} = 28$.Vì 1+7+28+28+1=65 nên 2005 là số thứ 65 của dãy số may mắn, nên $a_65 = 2005$, vậy n=65 và 5n=325. Thêm nữa, P(4)=C_9^6=84, P(5)=$C_{10}^{6} = 210$, và $\sum_{k=1}^{5} P(k) = 330$. Do đó, 6 số may mắn có 5 chữ số theo thứ tự là $a_{330} = 70000, a_{329} = 61000, a_{328} = 60100, a_{327} = 60010, a_{326} = 60001, a_{325} = 52000$.

Vì vậy $a_{5n} = a_{325} = 52000$

2. Lời giải bài tập ví dụ 3,4 - Thiết lập ánh xạ giữa các tập hợp

Bài 1(AIME 2001): 1 viên xúc xắc được đổ 4 lần. Tính xác xuất để khi đổ thì số trên xúc xắc ở 3 lần cuối không bé hơn lần đổ trước nó.
Lời giải:
Ta xét một lưới ô vuông như hình dưới, với trục đứng chính là các giá trị mà ta đổ được, trục ngang là lần đổ xúc xắc.



Ta thấy, cứ sau 4 lần tung, các giá trị ta đổ được có thể biểu diễn bằng đường đi từ (d,1) đến (d,6). Ví dụ là nếu 4 lần ta tung được (2,3,5,5) thì nó có thể được biểu diễn qua đường màu đỏ như hình.

Như vậy, ta xây dựng được song ánh từ số cách tung xúc xắc thỏa mãn đến số đường đi từ (d,1) đến (d,6). Như vậy xác suất để tung được như vậy sẽ là

$$\frac{C_9^4}{6^4} = \frac{7}{72}$$

Bài 2: Cho $n > 1$ là một số nguyên dương và T_n là số các tập con khác rỗng của của $1, 2, ...n$ sao cho trung bình cộng tất cả các phần tử của tập đó là số nguyên. Chứng minh rằng $T_n - n$ là số chẵn.
Lời giải
Gọi tập con A của $\{1, 2, \ldots, n\}$ có tính chất $(*)$ khi và chỉ khi trung bình cộng tất cả phần tử của A là số nguyên.
Dễ thấy các tập 1 phần tử là $\{i\}$ với $i = \overline{1, n}$ đều thỏa tính chất $(*)$.
Gọi S là tập hợp tất cả tập con của $\{1, 2, \ldots, n\}$ thỏa mãn tính chất $(*)$ ngoại trừ các tập $\{i\}$ với $i = \overline{1, n}$ như trên.
Ta thiết lập một song ánh $f : S \longrightarrow S$ như sau: Xét $A \in S$ bất kì với trung bình cộng của A là a:

- Nếu $a \in A : f(A) = A\ \{a\}$ vẫn thỏa mãn $(*)$
- Nếu $a \notin A : f(A) = A \cup \{a\}$ vẫn thỏa $(*)$

Dễ kiểm chứng rằng f là một song ánh. Do đó $|S|$ chẵn (do ta có thể chia cặp như trên).

Vậy $T_n - n = |S|$ là một số chẵn.

Bài 3: Có một nhóm học sinh trong trường K. Biết rằng mỗi 2 học sinh không quen nhau thì có đúng 2 người quen chung, mỗi 2 học sinh quen nhau thì không có người quen chung. Chứng rằng số người quen của mỗi học sinh là như nhau.
Lời giải:
Xét 2 học sinh a, b bất kì:

- *Nếu a quen b*: a, b không có người quen chung.
  Gọi A, B lần lượt là tập hợp các người quen của a, b. Ta chỉ ra 1 tương ứng $1-1$ giữa A, B như sau:
  Xét $c \in A$ thì c không quen b nên c, b có 2 người quen chung, 1 trong đó là a, bạn còn lại là $d \in B$. Tương tự thì d cũng chỉ quen mỗi c trong A. Do đó ta có thể ghép cặp (c, d) phủ hết $(A, B) \Rightarrow |A| = |B|$

- *Nếu a không quen b*: a, b cùng quen với c, mà theo trường hợp trên thì

$$|A| = |C|, |B| = |C| \Rightarrow |A| = |B|$$

Vậy số người quen của mỗi học sinh là như nhau.

Bài 4: Đếm số hàm f: [n] $\rightarrow$ [m] thoả mãn:

a) f là đơn ánh.

b) f là toàn ánh.

c) f là song ánh.
Lời giải:
a) Nhận thấy nếu n>m, thì phải có 2 số nguyên x $\neq$ y với f(x) = f(y) (theo nguyên lý Dirichlet). Vậy sẽ không có trường hợp đơn ánh từ [n] $\rightarrow$ [m] trong trường hợp này. Do đó ta sẽ giả định n $\leq$ m để thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có m cách chọn cho f(1). f(2) có thể chọn các giá trị trừ giá trị đã được chọn bởi f(1), vì thế f(2) có m-1 cách chọn. Cứ thế f(3) có m-2 cách chọn, f(4) có m-3 cách chọn...Do đó f(n) sẽ có m-(n-1) cách chọn.

Vậy số hàm f đơn ánh từ [n] $\rightarrow$ [m] là m(m-1)(m-2)...(m-(n-1)).

b) Để đếm các hàm thỏa toàn ánh, thì đầu tiên ta đếm các hàm không thỏa trước. Đó là những hàm có giá trị k ($1 \leq k \leq m$) sao cho $f(x) \neq k$ ($1 \leq x \leq n$) (đây là những giá trị không "chạm" được tới hàm). Gọi A_k là các hàm không thỏa giá trị k. Ta cần đếm các hàm trong $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$. Để tìm, ta sử dụng nguyên lý bù trừ:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m| = \sum_{l=1}^{m} (-1)^{l+1} \sum_{I \subset [m], |I|=l} |\cap_{i \in I} A_i|.$$

Có $I \subset [m]$ là tập con của l phần tử; do đó $|I|$=l. Để hàm f trong $\cap_{i \in I} A_i$, f không thể thỏa những l phần tử trong tập I. Vì thế, f(x) có m-l cách chọn. Dẫn đến có $(m-l)^n$ hàm như vậy. Ta có: $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m| = \sum_{l=1}^{m} (-1)^{l+1}\ C_m^l\ (m-l)^n$

Vậy tổng số hàm thỏa f toàn ánh là:

$$m^n - \sum_{l=1}^{m} (-1)^{l+1}\ C_m^l\ (m-l)^n$$

c) Hàm chỉ song ánh từ [m] đến [n] khi n=m. Nếu n=m, và muốn f song ánh thì f là đơn ánh và toàn ánh. Từ đó ta có thể đếm số hàm f song ánh theo công thức đơn ánh n=m từ câu a:

$n(n-1)(n-2)...(n-(n-1)) = n!$

Bài 5: Hỏi có bao nhiêu cách mà một số tự nhiên n có thể viết được dưới dạng tổng của 1 hoặc nhiều số và 1 số có các cách viết như nhau nhưng khác thứ tự cũng tính là 2 cách khác nhau.
Lời giải:
Đầu tiên ta nhận thấy n có thể viết dưới dạng tổng của n số 1:

$$n = \underbrace{1+1+1+...+1}_{n}$$

Để có thể viết n thành tổng của 1 hoặc nhiều số, chúng ta có thể lựa chọn vị trí đặt các dấu ngoặc trong cách diễn đạt trên. Đầu tiên để dấu mở ngoặc ở trước vị trí số 1 đầu tiên, với trước mỗi dấu + thứ i, ta quyết định có đặt dấu đóng ngoặc không, nếu đã đặt dấu đóng ngoặc thì ở số 1 sau đó ta phải để dấu mở ngoặc và tiếp tục như vậy, đến cuối đặt 1 dấu đóng ngoặc ở cuối số 1 sau cùng . Ta tính tổng các số trong ngoặc và nhận thấy sau khi làm vậy ta sẽ được một cách biểu diễn n bằng tổng của 1 hoặc nhiều số. Dưới đây là một ví dụ.

Với $n = 5$, ta quyết định đặt dấu đóng ngoặc ở trước dấu cộng thứ 2 và 4:

$$8 = (1+1) + (1+1) + (1) = 2+2+1$$

Một cách tổng quát hơn, ta thấy cách diễn đạt của n có $n-1$ dấu + nên sẽ có 2^{n-1} cách biểu diễn n

Bài 6: Với mỗi số nguyên dương n, gọi $f(n)$ là số tất cả những cách biểu diễn n dưới dạng tổng của những lũy thừa của 2 với sô mũ nguyên không âm. Những hoán vị của một cách biểu diễn sẽ chỉ coi chung là 1 cách. Chứng minh
a) $f(n) \leq f(n+1)$
b) $f(2n+1) = f(2n) = f(2n-1) + f(n) = f(2n-2) + f(n)$
Lời giải:

a) Với mỗi cách biểu diễn của n ta có thể cộng thêm $1 = 2^0$ để ra một cách biểu diễn của $n+1$ nên tồn tại đơn ánh biến $g(n)$ thành $g(n+1)$ nên $f(n) \leq f(n+1)$

b). Xét một cách biểu diễn bất kì của $2n+1$, ta có những nhận xét sau:
i) số hạng $1 = 2^0$ xuất hiện 1 số lẻ lần
ii) Nếu bỏ đi một số hạng 1 đi, ta có một cách biểu diễn của 2n, nên tồn tại toàn ánh biến $g(2n)$ thành $g(2n+1)$
iii) Theo ý 1, tồn tại đơn ánh biến $g(2n)$ thành $g(2n+1)$.
Như vậy tồn tại song ánh biến $g(2n)$ thành $g(2n+1)$ nên $f(2n+1) = f(2n)$. Lập luận tương tự, ta có $f(2n-1) = f(2n-2)$
Do đó, ta chỉ cần chứng minh $f(2n) = f(2n-2) + f(n)$
Gọi A_1, A_2 lần lượt là cách biểu diễn của $2n$ có chứa số 1 và không chứa số 1. Như vậy $|A_1| + |A_2| = f(2n)$
Xét một cách biểu diễn thuộc A_1, ta có những nhận xét sau:
i) Số hạng 1 xuất hiện 1 số chẵn lần. Nếu bỏ đi hai số hạng 1, ta có một cách biểu diễn của $2n-2$
ii) Ngược lại, với một cách biểu diễn s của $2x-2$, ta thêm hai số hạng 1 có được một cách biểu diễn $u \in A_1$
Nên tồn tại song ánh biến A_1 thành $g(2n-2)$
Xét một cách biểu diễn thuộc A_2, ta có những nhận xét sau:
i) Mỗi hạng tử đều chia hết cho 2. Nên chia từng hạng tử cho 2, ta có một cách biểu diễn của n
ii) Ngược lại, với mỗi cách biểu diễn s của $2n$, ta nhân 2 cho từng hạng tử có được một cách biểu diễn $u \in A_2$

Nên tồn tại song ánh biến A_2 thành $g(n)$
Vậy: $f(2n) = |A_1| + |A_2| = f(2n-2) + f(n)$

Bài 7: Cho n, m, k là các số nguyên dương lớn hơn 1 thỏa $k \le n$. Đếm số bộ $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ với các số $a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ đều phân biệt thỏa mãn 1 trong 2 tính chất sau:
i. Tồn tại 2 số $i, j \in \overline{1, k}$ sao cho $i < j$ và $a_i > a_j$
ii. Tồn tại $i \in \overline{1, k} : m \nmid a_i - i$
Lời giải:
Gọi A là tập hợp tất cả các bộ $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ thỏa mãn $a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\forall i = \overline{1, k}$, và các số đều phân biệt. B là tập tất cả bộ $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A$ không thỏa mãn điều kiện đề bài.
Xét $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in B$ bất kì thì

$$\begin{cases} 1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_k \le n \\ \text{m} \mid \ a_i - i \ \ \forall i = \overline{1, k} \end{cases}$$

Xét $f : B \longrightarrow C$:

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in B \longrightarrow \big(a_1 + (m-1), a_2 + 2(m-1), \dots, a_k + k(m-1)\big)$$

Dễ thấy rằng f là một song ánh nên $|B| = |C|$ với $C = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ thỏa mãn $m \mid c_i \ \forall i = \overline{1, k}$ và đồng thời $1 < c_1 < c_2 < \dots < c_k \le n + k(m-1)$.
Mà ta đã biết trong p số nguyên dương đầu tiên thì có $\lfloor \frac{p}{r} \rfloor$ bội số của r.

$$\Rightarrow |B| = |C| = \binom{\left\lfloor \frac{n+k(m-1)}{m} \right\rfloor}{k}$$

Mà $|A| = A_n^k = \frac{n!}{k!}$ nên lấy phần bù ta được kết quả bài toán là:

$$\frac{n!}{k!} - \binom{\left\lfloor \frac{n+k(m-1)}{m} \right\rfloor}{k}$$

Bài 8: Trong một hội nghị có 40 người.Cứ mỗi 19 người đều thần tượng chung duy nhất 1 người trong hội nghị.Nếu A thần tượng B thì B không nhất thiết phải thần tượng A, A cũng không thần tượng chính mình.Chứng minh tại buổi hội nghị tồn tại một nhóm

20 người thỏa với bất kì P thuộc nhóm đó thì P không phải là thần tượng của cả 19 người còn lại.

Lời giải:

Gọi tính chất A của tập 20 người bất kì là tập tồn tại 1 người là thần tượng của 19 người còn lại.Gọi tập X là tập các tập con có tính chất A, tập Y là tập các tập con có 19 phần tử lấy từ 40 người trên.Gọi P_i là thần tượng chung của tập có tính chất A thứ i.Định nghĩa $f(Xi)$ là phép biến đổi cho phép lấy thần tượng chung của 19 người còn lại ra.

Ta có ánh xạ sau:

$$f : X \mapsto Y$$
$$X_i \mapsto X'$$

Ta sẽ đi chứng minh phép xây dựng ánh xạ này là một đơn ánh.Thật vậy, với mọi X1', X2' thuộc Y, vì luôn tồn tại duy nhất chỉ 1 người thần tượng chung của 19 người trong nhóm đó, nên ta có được tính chất đơn ánh của phép xây dựng ánh xạ ta vừa dựng.

Từ đó ta có được $|X| \leq |Y| = C_{40}^{19} < C_{40}^{20}$ nên ta có được số tập có tính chất A phải bé hơn số tập có 20 phần tử nên luôn tồn tại một tập có 20 phần tử không có tính chất A, cũng chính là điều phải chứng minh.

Bài 9: Gọi a_n là số xâu nhị phân có độ dài n mà không chứa 3 số 0,1,0 theo thứ tự đó. Gọi b_n là số xâu nhị phân cũng có độ dài là n mà không chứa 4 số 0,0,1,1 và 1,1,0,0 theo thứ tự đó. Chứng minh rằng $2a_n = b_{n+1}$

Lời giải:

Dưới đây là một lời giải vô cùng đặc sắc của tác giả Evan Chen .Và để dễ hiểu hơn bọn mình đã có sự thay đổi để phù hợp với người đọc.

Ta sẽ chuyển bài toán về dưới dạng tập hợp. Gọi $(y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ chính là 1 xâu nhị phân độ dài n không có 4 số 0,0,1,1 hay 1,1,0,0 và B_n là tập hợp các xâu như vậy.A_n là tập hợp các xâu nhị phân thỏa mãn không có 3 số 0,1,0 theo thứ tự đó . Ta xây dựng một xâu nhị phân mới từ mỗi xâu nhị phân thuộc B_{n+1} như sau:

$$(y_1, y_2, y_3, ..., y_{n+1}) \mapsto (y_1 + y_2, y_2 + y_3, ..., y_n + y_{n+1})$$

Với mỗi xâu nhị phân mới được xây dựng đều có n chữ số không có chứa 3 số 0,1,0 theo thứ tự đó, thế nên các xâu như vậy thuộc A_n. Như vậy ta đã xây dựng 1 ánh xạ $f : B_{n+1} \mapsto A_n$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh $2|A_n| = |B_{n+1}|$ với mọi $n \in N$ Với mỗi xâu nhị phân i thuộc B_{n+1} và f(i) là 1 ảnh của nó , ta thấy trong B_{n+1} cũng sẽ có 1 xâu nhị phân khác cũng có ảnh là f(i). Bởi vì chỉ cần đổi 2 số đầu của xâu nhị phân (ví dụ 2 số đầu của i là 00 thì đổi lại 11, nếu là 01 thì đổi lại là 10 và ngược lại) và xây dựng tiếp các số còn lại dựa trên f(i).

Giả sử có ít nhất 3 xâu nhị phân riêng biệt thuộc B_n nhận f(i) là ảnh, thì sẽ có ít nhất 2 xâu có chung 2 số đầu. Xét 2 xâu như vậy, ta thấy số thứ 3 của mỗi xâu phải là như nhau, nếu không ảnh của cả 2 xâu sẽ khác nhau, vô lí. Tiếp tục cho số thứ 4, thứ 5,... Do đó 2 xâu đó phải bằng nhau mâu thuẫn. Vậy chỉ có duy nhất 2 xâu nhị phân có f(i) là ảnh.

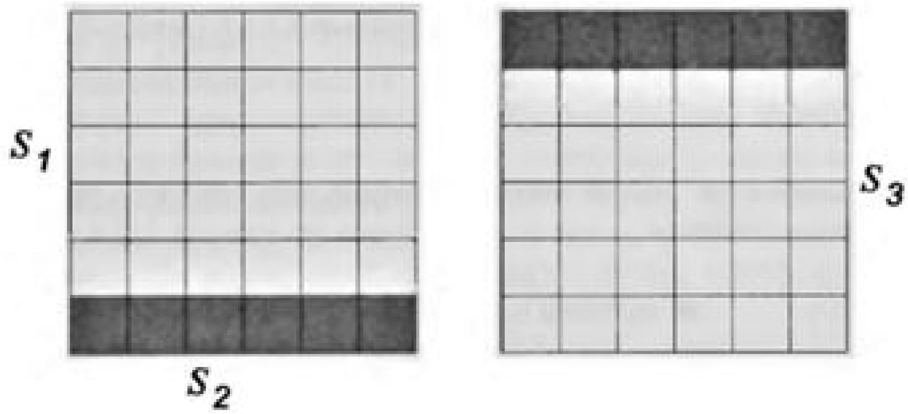
Do đó với mọi xâu A_n thì tương ứng 2 xâu B_{n+1} do đó ta suy ra $2|A_n| = |B_{n+1}|$

Bài 10: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn các tính chất: nếu n cái domino được đặt trên 1 bàn cờ 6x6 với mỗi domino chiếm 2 đơn vị diện tích vuông, thì luôn luôn có thể đặt thêm 1 domino lên trên bàn mà không phải di chuyển bất kỳ domino nào khác. Xác định giá trị lớn nhất của n.
Lời giải:
) Ta sẽ chứng minh giá trị lớn nhất của n là 11. **Hình 7** là cách sắp xếp 12 domino trên bàn cờ thì không thể để thêm 1 domino nào nữa. Suy ra n $\leq$ 11

Hình 7

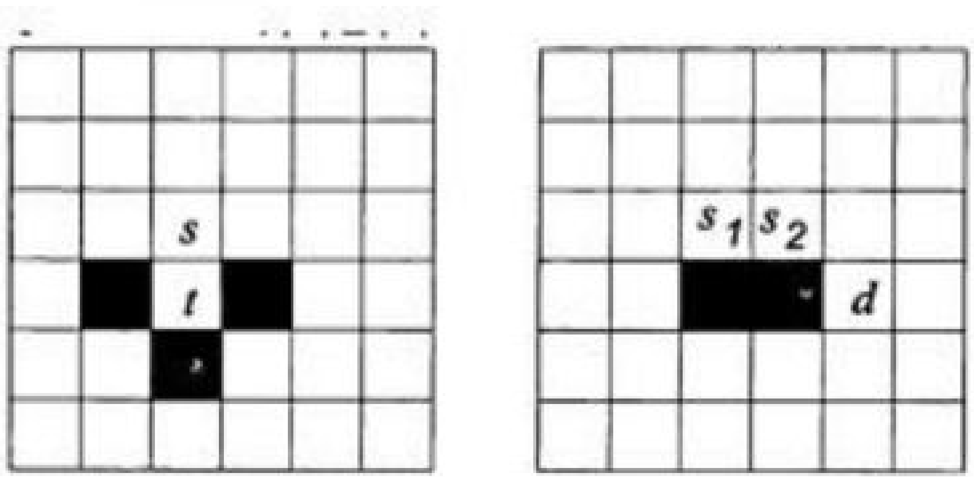
. Ta sẽ chứng minh rằng với 11 domino trên bàn cờ thì luôn đặt thêm được 1 domino nữa bằng chứng minh phản chứng.
Giả sử rằng tồn tại cách đặt 11 domino trên bàn cờ mà không thể đặt thêm 1 domino

nào nữa. Khi đó số ô vuông trên bàn chưa bị phủ bởi 11 domino là: 36-22=14.



Hình 8

. Đặt S_1 là phần trên của bàn cờ ban đầu có kích thước 5x6 **(Hình 8)**. Đặt A là tập các ô vuông trong S_1 mà không bị phủ bởi các domino, và S_2 là hàng cuối của bàn cờ (bàn cờ chia làm 2 phần S_1 và S_2). Vì ta không thể điền thêm 1 domino nào vào bàn cờ, nên một trong 2 ô vuông bất kỳ cạnh nhau sẽ được bao phủ bởi 1 domino, suy ra S_2 có nhiều nhất là 3 ô không bị phủ bởi domino (trống), suy ra có S_1 ít nhất là 14-3=11 ô trống.
Đặt S_3 là phần dưới của bàn cờ và có kích thước 5x6 (Hình 8), B là tập tất cả các domino nằm trong S_3 . Ta sẽ định nghĩa một ánh xạ f từ A vào B. Ta có, với mỗi ô vuông trống s trong S_1, sẽ tồn tại một ô vuông t nằm dưới s. Suy ra ô vuông t nằm trong S_3 và được phủ bởi một domino d. Rõ ràng domino d phải nằm trong S_3 (vì nếu ko thuộc S_3 thì nó sẽ gồm 2 ô t và s-vô lý). Khi đó ta xác định ánh xạ f là f(s) = d .
Ta sẽ chứng minh rằng f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $\forall\, s_1, s_2 \in A$ sao cho f(s_1)=f(s_2)=d.Suy ra d phủ 2 ô vuông ở dưới s_1 và s_2 . Suy ra s_1 và s_2 nằm cạnh nhau **(Hình 9)**, như vậy khi đó ta có thể đặt thêm 1 domino phủ lên s_1 và s_2 (vô lý). Vậy f là đơn ánh, suy ra $|A| \leq |B|$ hay $|B| \geq 11$. Nhưng cả bàn cờ chỉ có 11 domino, suy ra |B|=11 . Khi đó thì hàng trên cùng sẽ không bị phủ bởi 1 domino nào, và sẽ đặt được thêm 1 quân domino nữa (vô lý). Vậy giá trị lớn nhất của n là 11.



Hình 9

.

3. Lời giải bài tập ví dụ 5 - Tổng các phần tử trong một tập hợp

Bài 1: Hãy tính trung bình cộng của tất cả các số N gồm 2014 chữ số thỏa mãn N chia hết cho 9 và các chữ số của N được lập từ $X = 1, 2, ..., 8$.
Lời giải:
Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có dạng thoả mãn đề bài. Ta xây dựng 1 song ánh như sau:

$$\begin{aligned} f &: X \to X \\ x = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{2022}} &\mapsto f(x) = \overline{(9 - a_1)(9 - a_2)\ldots(9 - a_{2022})} \end{aligned}$$

Nhận xét rằng: $999 \mid N + f(N) = \underbrace{\overline{99\ldots9}}_{\text{2022 chữ số 9}}$ nên $f(N) \in S$ và f là một ánh xạ. Mặt khác, ta dễ có được f là một song ánh. Khi đó:

$$2\sum_{N\in S} N = \sum_{N\in S} N + f(N) = |S| \underbrace{\overline{99\ldots9}}_{\text{2022 chữ số 9}}$$

Suy ra TBC các số thoả mãn đề bài là $\frac{\underbrace{\overline{99...9}}_{\text{2022 chữ số 9}}}{2}$

Bài 2: Tính trung bình cộng các số tự nhiên $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{2022}}$ gồm 2022 chữ số thoả mãn N chia hết cho 999 và các chữ số của N nằm trong tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Lời giải:
Gọi M là tập các số thỏa yêu cầu đề bài.

Ta xây dựng một ánh xạ đi từ M đến M như sau: Với mỗi N= $\overline{a_1a_2...a_{2014}} \in M$ đặt f(N)= $\overline{b_1b_2...b_{2014}}$ với b_i= 9 - a_i với mọi i= 1,2,...,2014.Vì N + f(N) = 99...9 (2014 số 9) chia hết cho 9 và N chia hết cho 9 nên suy ra f(N) cũng chia hết cho 9. Do đó f là một ánh xạ đi từ M vào M. Hơn nữa dễ thấy f là một song ánh. Từ đó suy ra $2\sum_{N\in M} N= \sum_{N\in M}(N+f(N)) = |M|.99...9$.

Vậy trung bình cộng của các số trong M là 99...9 : 2.

4. Lời giải bài tập ví dụ 6 - Chuyển sang mô hình quỹ đạo

Bài 1: Có n người xếp hàng mua trà sữa với giá 50 nghìn đồng/ly. Trong đó có đúng k người chỉ mang loại tiền 100 nghìn đồng và những người còn lại chỉ mang loại tiền 50 nghìn đồng.

a) Giả sử người bán hàng không mang tiền, tìm điều kiện của k (theo n) để luôn có một cách xếp hàng sao cho người nào cũng được thối tiền (nếu cần) ngay lập tức?

b) Với điều kiện ở câu a được thỏa mãn, giả sử người bán mang theo q tờ 50 nghìn đồng, tìm số cách xếp hàng (theo n, k, q) sao cho người nào cũng được thối tiền (nếu cần) ngay lập tức.

Lời giải:

a) Dễ thấy $k \leq \frac{n}{2}$ vì nếu $k > \frac{n}{2}$ thì sẽ có ít hơn $\frac{n}{2}$ tờ tiền 50 nghìn, mà lại có nhiều hơn $\frac{n}{2}$ người cần được thối 50 nghìn nên ta có điều vô lý.

Khi $k \leq \frac{n}{2}$ ta sẽ cho $n-k$ người có loại tiền 50 nghìn mua trà sữa trước sau đó dùng $n-k$ tờ tiền đó để thối cho k người chỉ mang loại tiền 100 nghìn.

Vậy điều kiện của k là $k \leq \frac{n}{2}$.

b) Sau khi bán hết cho n người này, người bán hàng sẽ có $q+n-2k$ tờ tiền 50 nghìn đồng. Ta xây dựng quỹ đạo $(A_1(x_{A_1}, y_{A_1}), A_2(x_{A_2}, y_{A_2}), \ldots, A_n(x_{A_n}, y_{A_n}))$ từ điểm $O(0,q)$ đến $A(n, q+n-2k)$ trên mặt phẳng tọa độ thỏa:

i)A_i thuộc Z^2 với mọi $1 \leq i \leq n$.

ii)Với mọi $1 \leq i \leq n-1$, $x_{A_{i+1}} - x_{A_i} = 1$ và $y_{A_{i+1}} - y_{A_i} = 1$ nếu người mua hàng thứ i có loại tiền 50 nghìn, $y_{A_{i+1}} - y_{A_i} = -1$ trong trường hợp còn lại.

Dễ thấy tung độ y_{A_i} của điểm A_i chính là số tờ tiền loại 50 nghìn người bán hàng có sau khi người thứ i mua trà sữa. Để mọi người mua đều được thối tiền (nếu cần) ngay lập tức nghĩa là tung độ của mọi điểm A_i đều không âm. Vậy ta đếm số quỹ đạo đi từ $O(0,q)$ đến $A(n,q+n-2k)$ mà không cắt đường thẳng $y=-1$.

Khi tịnh tiến quỹ đạo về phía chiều dương của trục tung 1 đơn vị thì quỹ đạo mới là quỹ đạo đi từ $O(0,q+1)$ đến $A(n,q+1+n-2k)$ mà không cắt trục hoành. Trước hết ta đếm số quỹ đạo đi từ $O(0,q+1)$ đến $A(n,q+1+n-2k)$ và cắt trục hoành. Theo ví dụ 3, số quỹ đạo như vậy sẽ bằng số quỹ đạo đi từ $O'(0,-q-1)$ đến $A(n,q+1+n-2k)$. Vậy có $C_n^{q+1+n-k}$ quỹ đạo như vậy.

Do số quỹ đạo đi từ $O(0,q+1)$ đến $A(n,q+1+n-2k)$ mà không cắt trục hoành bằng hiệu của số quỹ đạo và số quỹ đạo đi qua trục hoành nên đáp án của bài toán là $C_n^{n-k} - C_n^{q+1+n-k}$.

Bài 2: Cho số nguyên dương n. Với x,y là hai số nguyên không âm thỏa mãn $x+y<n$, các điểm nguyên (x,y) được tô bởi một trong hai màu xanh và đỏ, sao cho nếu (x,y) được tô bởi màu đỏ thì (x',y') cũng thế với $x' \le x, y' \le y$. Gọi A là số cách chọn ra n điểm màu xanh có hoành độ đôi một khác nhau và B là số cách chọn ra n điểm màu xanh có tung độ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng $A=B$.
Lời giải
Ta đặt a_x là số điểm xanh có hoành độ x và b_y là số điểm xanh có tung độ y.

Gọi các đa tập (tập hợp mà các phần tử có thể bằng nhau) $P=\{a_x|x<n\}$ và $Q=\{b_y|y<n\}$

Điều phải chứng minh tương đương với $P=Q$

Ta chứng minh điều này bằng quy nạp theo số điểm đỏ. Trước hết nếu số điểm đỏ bằng 0 thì ta dễ thấy $P=Q=\{1,2,...,n\}$.

Giả sử ta có thể đổi màu của 1 điểm đ $A(x,y)$ bất kì thành xanh mà vẫn giữ được tính chất của đầu bài, quan sát thấy trước khi đổi màu điểm A, $a_x=b_y=n-(x+y)$, sau khi đổi màu ta vẫn có $a_x=b_y=n-(x+y)-1$ và những giá trị a_i,b_i khác vẫn không bị thay đổi, vì vậy ta vẫn có $P=Q$.

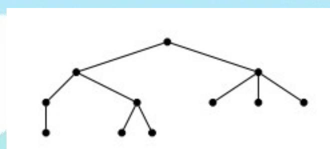
Bây giờ ta chứng minh việc thay đổi màu của lần lượt từng điểm như vậy mà không trái với yêu cầu bài toán sẽ cho ta mọi trường hợp của các điểm đỏ có thể có. Cách tô dễ thấy là tô tất cả các điểm đỏ có hoành độ $x=0$ từ dưới lên trên, sau đó là $x=1$ và cứ tương tự như vậy cho đến $x=n$.

Vậy ta có $P=Q$ nên $A=\prod_{a_x\in P} a_x = \prod_{b_y\in Q} b_y = B$.

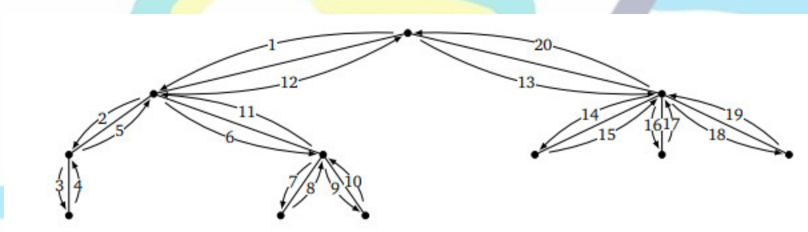
Ví dụ 7 (Bài toán bàn cờ): Cho n là số nguyên dương, tìm số đường đi trong lưới nguyên từ (0,0) tới (n,n) chỉ được đi lên trên hay sang phải sao cho đường đi nằm trong phần $x \geq y$.

5. Lời giải bài tập ví dụ 7 - Số Catalan

Bài 1: Cây hình học với n nút là một cấu trúc được định nghĩa: Từ nút gốc (đỉnh) trên đầu, ta phân nhánh bằng cách nối nút gốc đó với một số nút, ta tiếp tục chọn vài nút trong số đó để phân nhánh cho đến khi đủ n nút. Tìm số cây hình học với $n+1$ nút. Dưới đây là ảnh minh họa cho số cây có 4 nút của tác giả Yufei Zhao.
Lời giải
Xét cây hình học có $n+1$ nút bất kì, ta thực hiện một "lộ trình" bắt đầu từ nút gốc, theo thứ tự trái sang phải như sau: đi hướng xuống dưới theo các nhánh cây, cho tới khi chạm tới "ngõ cụt" ta trở lại đi lên trên cho tới khi gặp nút giao gần nhất và tiếp tục thực hiện đường đi như vậy với nhánh mới. Lộ trình sẽ kết thúc khi ta quay lại nút gốc ban đầu.



Dưới đây là hình minh họa cho lộ trình của cây hình học trên



Trong một lộ trình như thế, ta biểu diễn dưới dạng 1 chuỗi kĩ tự gồm: D cho mỗi lần đi xuống và U cho mỗi lần đi lên

Xét ánh xạ $f : g \to h$
g là tập hợp các chuỗi kí tự lộ trình của nhánh cây có $n+1$ nút, h là số đường đi từ điêm (0,0) tới (n,n) trên lưới tọa độ nguyên mà không chạm đường thẳng $x = y + 1$. Mỗi kí tự D trong chuỗi biến thành một đường đi ngang 1 đơn vị và mỗi kí tự U biến thành một đường đi dọc 1 đơn vị của đường đi từ (0,0) tới (n,n)
Ta có những nhận xét sau:
i) Độ dài của một chuỗi kí tự bằng 2 lần số nhánh hay bằng 2n, bằng với số đường đi

dọc hoặc ngang 1 đơn vị
ii) $\forall i = \overline{1,n}$, chuỗi con từ 1 tới i luôn có số kí tự D $\geq$ số kí tự U. Như vậy, những điểm nằm trên đường đi từ (0,0) tới (n,n) luôn có hoàng độ $\geq$ tung độ nên không cắt đường thẳng $x = y + 1$

Nên f là song ánh, tức $|g| = |h| = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$ (Số catalan)
mà mỗi cây hình học chỉ có thể biểu diễn bởi 1 chuỗi duy nhất nên ta kết luận số cây hình học có $n+1$ nút là $\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$

Bài 2: Có bao nhiêu cách để sắp xếp các đồng xu thỏa tầng cuối cùng có n xu, các đồng xu ở trên được dựng và tiếp xúc với hai đồng xu ngay dưới nó.
Lời giải:
Nhận xét: ta có dãy số Catalan sẽ có một tính chất đặc trưng sau: $C_0 = 1$ và $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ Với n là số tự nhiên, ta gọi tập A_n là tập các cách dựng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta xây dựng ánh xạ như nhau:

$$\{(k, X, Y) : k \in \{0, \dots, n\}, X \in A_k, Y \in A_{n-k}\} \mapsto A_{n+1}$$

Với phép biến đổi như sau: cho thêm $n - k + 1$ đồng xu vào phía bên phải tầng cuối cùng của cách sắp xếp X, cho cách sắp xếp Y lên trên $n - k + 1$ cuối cùng ta mới tạo.Ta được một cách sắp xếp thuộc tập A_{n+1}.Ta nhận thấy phép ánh xạ ta vừa mới xây dựng là một song ánh, nên số cách xây dựng có tầng cuối cùng là n+1 sẽ là $\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ do nguyên tắc nhân.Vì ta vừa chứng minh được dãy số cách xây dựng đồng xu mang tính chất đặc trưng của dãy Catalan, đồng thời ta có với n=0 thì ta được 1 cách xây dựng(xây dựng rỗng) nên ta có số cách xây dựng sẽ là C_n

3 Tài liệu tham khảo

[1] *Thầy Lê Anh Vinh, Định hướng bồi dưỡng học sinh năng khiếu Toán (tập 4: Tổ hợp)*

[2] *Diễn đàn AoPS: https://artofproblemsolving.com/*

[3] *Lê Ngọc Đức, Ứng dụng phương pháp ánh xạ trong bài toán tổ hợp*

[4] *Yufhei Zhao, tài liệu "Bijections"*

[5] *Tham khảo tài liệu của một số thầy cô khác*