DỰ ÁN THE GIFTED BATTLEFIELD
BAN CHUYÊN MÔN TOÁN HỌC

KÌ THI THỬ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
ĐỢT 2 - NĂM HỌC 2023 - 2024

HƯỚNG DẪN CHẤM THI
Đề thi thử đợt 2

Môn thi: **TOÁN (không chuyên)**
Ngày thi: **09/04/2023 – 16/04/2023**
Thời gian làm bài: **120 phút** (không kể thời gian phát đề)
Hướng dẫn chấm thi gồm 04 trang

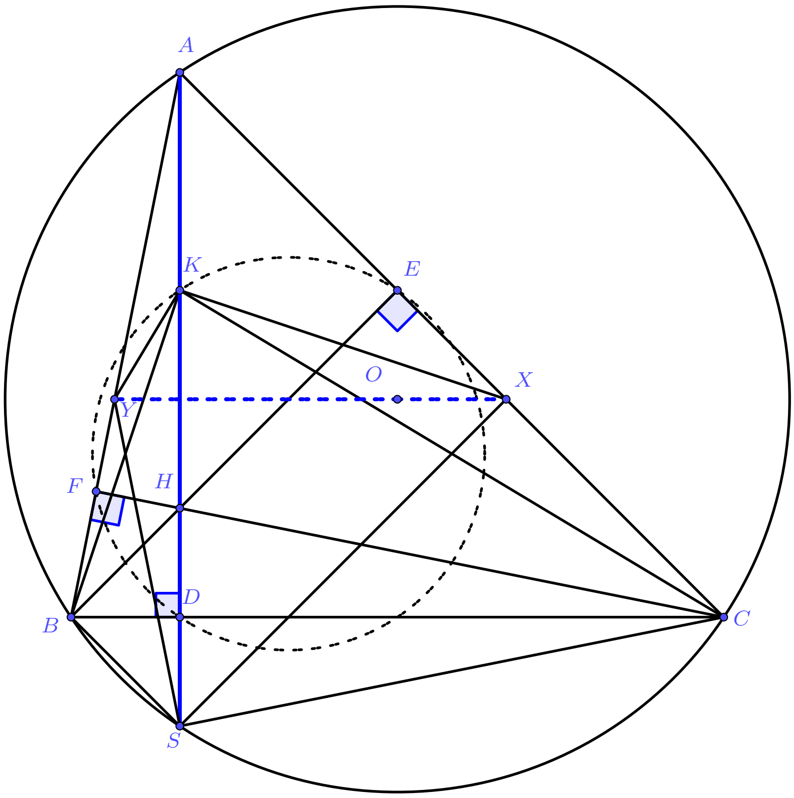
I. Hướng dẫn chung

1. Giám khảo chấm đúng theo Hướng dẫn chấm của Dự án The Gifted Battlefield.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. Đáp án và biểu điểm

Bài	Ý	Hướng dẫn	Điểm
1	a	**Giải phương trình:** $(5x^4+5x^2-30)\left(\dfrac{x-5+\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-4}}\right)=0.$	**1,25**
		Điều kiện xác định: $\begin{cases}\sqrt{x-3}\geq 0\\ \sqrt{2x-4}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 3\\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 3.$	0,25
		Trường hợp 1: $5x^4+5x^2-30=0$ (1) Đặt $t=x^2\geq 0$ thì (1) trở thành $5t^2+5t-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2 \text{ (nhận)}\\ t=-3 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (loại).	0,5
		Trường hợp 2: $\dfrac{x-5+\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-4}}=0$ (2) (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-3}=5-x \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 5\\ x-3=x^2-10x+25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 5\\ \left[\begin{array}{l}x=4 \text{ (nhận)}\\ x=7 \text{ (loại)}\end{array}\right.\end{cases}$ Kết hợp các trường hợp, ta có tập nghiệm của phương trình ban đầu là $S=\{4\}$.	0,5
	b	**Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}ab=2a+2b\\ a^2+b^2-ab=16.\end{cases}$	**1,25**
		Đặt $S=a+b$ và $P=ab$ (điều kiện: $S^2\geq 4P$).	0,25
		Hệ phương trình ban đầu trở thành: $\begin{cases}P=2S\\ S^2-3P=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}P=2S\\ S^2-6S-16=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S=-2\\ P=-4\end{cases} \vee \begin{cases}S=8\\ P=16\end{cases}$	0,25
		Trường hợp 1: $S=-2$ và $P=-4$. Khi đó a,b là nghiệm của phương trình $x^2+2x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{5}\\ x=-1+\sqrt{5}.\end{array}\right.$ Vậy $(a,b)=(-1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5}),(-1+\sqrt{5},-1-\sqrt{5})$.	0,25
		Trường hợp 2: $S=8$ và $P=16$. Khi đó a,b là nghiệm của phương trình $x^2-8x+16=0 \Leftrightarrow x=4$. Vậy $(a,b)=(4,4)$.	0,25

		Kết hợp tất cả các trường hợp, ta có tập nghiệm của hệ phương trình là $$S = \{(-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}); (-1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}); (4,4)\}$$	0,25
2	a	**Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 = x_2$.**	**1,25**
		Điều kiện đủ để phương trình có hai nghiệm dương x_1, x_2 phân biệt là: $$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 28 > 0 \\ m + 2 > 0 \\ m + 8 > 0. \end{cases}$$	0,5
		Theo định lí Vietè, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \ (1) \\ x_1 x_2 = m + 8 \ (2). \end{cases}$ Thay $x_1^3 = x_2$ vào (2) và chú ý rằng $x_1, x_2 > 0$, ta được $$x_1^4 = m + 8 \Rightarrow x_1 = \sqrt[4]{m+8} \Rightarrow x_2 = \sqrt[4]{(m+8)^3}.$$ Đặt $t = \sqrt[4]{m+8} > 0$, khi đó (2) trở thành $$t + t^3 = t^4 - 6 \Leftrightarrow (t-2)(t^3 + t^2 + 2t + 3) = 0.$$ Do $t > 0$ nên $t^3 + t^2 + 2t + 3 > 0$, nên phương trình trên có nghiệm $t = 2 \Rightarrow m = 8$ (nhận). Vậy $m = 8$ là tất cả các giá trị m cần tìm.	0,75
	b	**Tìm m, n.**	**1,25**
		Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $$4x^2 - 3mx + 2n - 1 = mx + n + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4mx + n - 2 = 0. \quad (1)$$	0,25
		Do (P) và (d) giao nhau tại duy nhất một điểm nên $$\Delta = 0 \Leftrightarrow 16m^2 - 4 \cdot 4 \cdot (n-2) = 0 \Leftrightarrow m^2 = n - 2 \quad (2)$$ Thay (2) vào (1), ta được $4x^2 - 4mx + m^2 = 0$.	0,75
		Vì (P) và (d) tiếp xúc với nhau tại một điểm duy nhất có hoành độ $\frac{1}{2}$ nên $$4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4m \cdot \frac{1}{2} + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow n = 3.$$	0,25
3	a	**Tính quãng đường (*mét*) mà chú rùa đã đi được trong lúc thỏ đang ngủ.**	**0,5**
		Quãng đường mà thỏ đi được trước khi chú rùa về đích là: $1000 - 280 = 720$ (m). Vì vận tốc của thỏ gấp 5 lần vận tốc của chú rùa nên quãng đường mà chú rùa đã đi được khi thỏ chạy được 720 (m) là: $\frac{720}{6} = 120$ (m).	0,25
		Quãng đường chú rùa đi được trong lúc thỏ đang ngủ là: $1000 - 120 = 880$ (m).	0,25
	b.1	**Tính diện tích xung quanh của tên lửa.**	**0,5**
		Diện tích xung quanh của phần được tạo bởi hình trụ là $2\pi rh = 250\pi$ (m^2). Diện tích xung quanh của phần mặt cong của hình nón là: $\pi rl = 65\pi$ (m^2). Diện tích của hình tròn là: $\pi r^2 = 25\pi$ (m^2).	0,25
		Diện tích xung quanh của tên lửa là: $250\pi + 65\pi + 25\pi = 340\pi$ (m^2).	0,25

	b.2	**Tính thể tích của tên lửa.**	**0,5**
		Thể tích của hình trụ là: $\pi r^2 h = 625\pi\ (\mathrm{m}^3)$. Chiều cao của hình nón là: $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12\ (\mathrm{m})$. Thể tích của hình nón là: $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 60\pi\ (\mathrm{m}^3)$.	0,25
		Thể tích của tên lửa là: $625\pi + 60\pi = 685\pi\ (\mathrm{m}^3)$.	0,25
4	**a**	**Chứng minh rằng tứ giác $FDEK$ nội tiếp.**	**1,0**
		 Các tam giác AFH và AEH lần lượt vuông tại F và E có K là trung điểm của cạnh huyền AH nên $KA = KH = KF = KE \Rightarrow$ tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn tâm K.	0,25
		Ta suy ra $\widehat{EKF} = 2\widehat{EAF} \equiv 2\widehat{BAC}$. $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $AFDC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{BAC}$. $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $AEDB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{BAC}$.	0,25
		Vậy $$\widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{BDF} - \widehat{CDE} = 180^\circ - 2\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{EKF},$$ suy ra tứ giác $FDEK$ nội tiếp.	0,5
	b	**Chứng minh rằng $\widehat{BSX} = \widehat{CSY} = 90^\circ$.**	**1,0**
		$\widehat{BKX} = \widehat{BEX} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BEKX$ nội tiếp đường tròn đường kính BX. Với chú ý rằng $\triangle KEH$ cân tại K vì $KE = KH$, ta có biến đổi góc sau: $$\widehat{KSB} \equiv \widehat{ASB} = \widehat{ACB} = \widehat{AHE} = \widehat{KEH} \equiv \widehat{KEB},$$ suy ra tứ giác $KESB$ nội tiếp, hay năm điểm B, S, X, E, K cùng thuộc đường tròn đường kính BX, suy ra $\widehat{BSX} = 90^\circ$. Chứng minh tương tự, ta có năm điểm C, S, Y, K, X cùng thuộc đường tròn đường kính CY, suy ra $\widehat{CSY} = 90^\circ$.	1,0

	c	**Chứng minh rằng XY vuông góc với AS và X, O, Y thẳng hàng.**	**1,0**
		Tứ giác $KESB$ nội tiếp nên $$\widehat{ASX} = \widehat{KEA} = \widehat{SAX},$$ suy ra $KA = KS$. Tương tự, $YA = YS$ nên XY là trung trực của AS, suy ra $XY \perp AS$.	0,5
		Lại có $OA = OS$ nên O cũng thuộc đường trung trực của AS, suy ra X, O, Y thẳng hàng.	0,5
5		**Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 - x + y$.**	**0,5**
		Ta có $$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 - x + y \\ &= (x^2 - 2xy + y^2) - (x - y) + \frac{1}{4} + 2xy - \frac{1}{4} \\ &= (x-y)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x - y) + \frac{3}{4} \\ &\geq \left(x - y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &\geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x - y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ Vậy $\min P = \frac{3}{4}$ tại $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.	0,5
		Tổng điểm bài thi	**10,00**